

הבנת ההבנה של תלמידים על גרפים

Understanding Student's Understanding of Graphs

מאת: Susan N. Friel, George W. Bright, and Frances R. Curcio

הופיע ב: Mathematics Teaching In the Middle School, Vol.3, No.3, Nov. - Dec. 1997, 224-227.

תרגום: ברכה סגליס

במהלך שנות ה-90 הופיעה הסטטיסטיקה כמרכיב עיקרי בתוכנית הלימודים במתמטיקה (NCTM 1989). אנו יודעים שהבנת התהליך של חקירה סטטיסטית הינה גורם מרכזי בעבודה עם סטטיסטיקה. חקירה סטטיסטית כוללת באופן טיפוסי ארבעה מרכיבים: (1) העלאת השאלה; (2) איסוף נתונים; (3) ניתוח נתונים; ו- (4) פירוש התוצאות – המופיעים בסדר כלשהו (Graham 1987). Kader and Perry (1994) מציעים שלב חמישי של חקירה סטטיסטית: תקשורת לגבי התוצאות. על אף שההבנה כיצד תלמידים משתמשים בתהליך של חקירה סטטיסטית בהקשר הרחב יותר של פתרון בעיות, הינה מטרה מרכזית, חשוב גם להתבונן בהבנה של התלמידים המתייחסת למושגים המקושרים לתהליך עצמו. זה הוביל אותנו לשקול למה הכוונה בלהבין ולהשתמש בגרפים כמרכיב מרכזי של כל הכלול בידיעה ויכולת לעשות סטטיסטיקה. בדרך כלל, תלמידים מתבקשים רק לקרוא מידע מן הגרפים. אבל, יתכן ואנו צריכים לחשוב מחדש לא רק על טיבם של גרפים אלא גם לשאול על שימוש וקריאה של גרפים כדי לעזור לתלמידים להבין טוב יותר כיצד לקרוא ולהשתמש בגרפים.

רפלקציה

האם אתם מבחינים בבעיות כלשהן בדרך שבה התלמידים שלכם קוראים גרפים?

תובנה לגרפים

אנשים רבים התייחסו לשאלה מה בדיוק מהוה גרף (למשל, Berlin [1980]; Fry ;Doblin [1980]; [1983]; [1980] Twyman). ההגדרות כללו לא רק גרפים, אלא גם מפות, דיאגרמות, טבלאות וייצוגים ויזואליים אחרים. בזמן האחרון (Wainer 1992), התמקדה תשומת הלב על גרפים סטטיסטיים שבהם משתמשים להעביר מידע בתחומים שונים. בכיתות הביניים (ה' – ח'), גרפים סטטיסטיים הם בדרך כלל תרשימים של משתנה אחד, כלומר, תרשימי קו (line plots); דיאגרמות עמודות (bar graphs); דיאגרמות עוגה או עיגול (pie or circle graphs); תרשימי גזע ועלים (stem-and-leaf plots), או תרשימי גזע (stem plots); היסטוגרמות (histograms); ותרשימי חמשת המספרים (box-and-whisker plots), או תרשימי קופסה (box plots). אחת הדרכים לחשיבה על מה אנו מתכוונים לגבי ידע על גרפים היא להשתמש בכותרת הרחבה של **תובנה לגרפים (graph sense)**. בדומה למה שנעשה בנוגע לתובנת המספר (Sowder 1992), ניתן לאפיין למה מתכוונים בתובנה לגרפים (Friel, Curcio, and Bright 1997):

1

Translated and reprinted with permission from *Mathematics Teaching In the Middle School*, copyright © 1997 by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved. NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation

תובנה לגרפים מתפתחת בהדרגה כתוצאה מתכנון הצגות גרפיות של נתונים, חקירת השימוש שלהם במגוון של קונטקסטים, והתייחסות אליהם בדרכים שאינן מוגבלות רק להתמקדות במבנה הגרף או להוצאה פשוטה של נתונים כמטרה של קריאת הגרף.

אנו יכולים גם לתאר מספר התנהגויות שונות (Friel, Curcio, and Bright 1997) המראות נוכחות כלשהי של תובנה לגרפים. התנהגויות אלו כוללות את היכולת לדבר בשפת הגרפים כאשר מסבירים מידע המוצג בצורה גרפית, ולהגיב לרמות שונות של שאלות הקשורות בפירוש של מידע המוצג בגרפים.

רפלקציה

על מה אתם מסתכלים כאשר אתם מחפשים ראיות לכך שתלמידיכם מבינים כיצד לקרוא ולהשתמש במידע המוצג להם באמצעות גרפים?

לדבר בשפת הגרפים

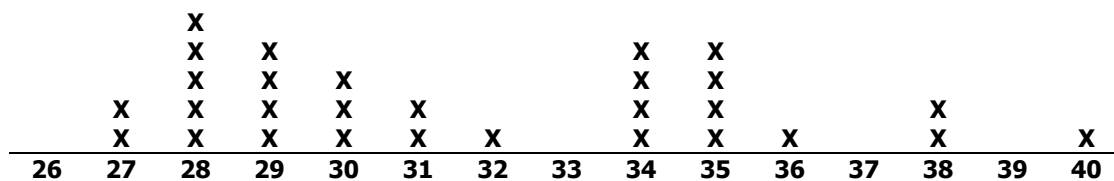
משימה שבה השתמשנו לצורך חקירת החשיבה של תלמידים על גרפים מוצגת באיור 1.

איור 1: צימוקים בקופסה (Friel and Bright 1995b)

תלמידים הביאו לביה"ס סוגים שונים של חטיפים. אחד החטיפים שרבים אוהבים הוא צימוקים. הם החליטו שהם רוצים לגלות כמה צימוקים יש בקופסאות צימוקים בעלות משקל זהה. הם תהו האם יש אותו מספר צימוקים בכל קופסה. ביום המחרת כל אחד מהם הביא כחטיף קופסה קטנה של צימוקים. הם פתחו את הקופסאות וספרו את מספר הצימוקים בכל אחת מן הקופסאות.

בפני התלמידים מוצג תרשים קו המראה את המידע שהכיתה מצאה:

מספר הצימוקים בקופסה



השאלות הבאות, המיועדות להערכת מרכיבי התובנה לגרפים, ניתנו לתלמידי כיתות ה' עד ח' על מנת לבדוק את הבנתם לגבי תרשימי קו ויכולתם לקשר ייצוג זה לגרף של עמודות.

- 1) האם יש מספר זהה של צימוקים בכל קופסה? כיצד ידעת?
- 2) בכמה קופסאות של צימוקים היו יותר מ-34 צימוקים? כיצד ידעת?
- 3) אם תלמידים יפתחו קופסה אחת או כמה קופסאות של צימוקים, כמה צימוקים הם יכולים לצפות למצוא בהם? מדוע אתה חושב כך?

בתרשים הקו, סימני ה- X מציינים שכיחויות של הופעה; ארבעה סימני X מעל המספר שלושים וחמש פירושים שארבע קופסאות הכילו כמות של שלושים וחמש צימוקים כל אחת. אם יש מספר זהה של צימוקים בכל קופסה, אז כל סימני ה- X יופיעו מעל המספר המתאים. בנוסף, המספרים הרשומים לאורך הציר האופקי מציינים את מספר הצימוקים בכל קופסה; סימני ה- X מעל המספרים מציינים את מספר הקופסאות שיש בהן את אותו מספר מסוים של צימוקים. מאחר שעל הציר רשומים מספרים אחדים, כאשר לרבים מהם יש אחד או יותר סימני X , אזי פירוש הדבר הוא שקבוצת הנתונים כוללת קופסאות המכילות מספרים שונים של צימוקים.

השאלה הראשונה במשימה שואלת, "האם יש מספר זהה של צימוקים בכל קופסה? כיצד ידעת?" תשובות כתובות של תלמידים לשאלות אלו מצביעות על מספר סוגים שונים של תגובות. תלמידים אחדים הסבירו תוך שימוש בשפה של תרשימי קו, הכוללת דיון בתכונות של הגרף כמו, טווח הנתונים או שכיחות ההופעה של ערכים שונים של הנתונים.

- "לא, משום שסימני ה- X לא נמצאים כולם על אותו מספר".
- "לא. אם היה אותו מספר בכל קופסה, היו כל סימני ה- X מופיעים מעל אותו מספר".
- "לא, משום שסימני ה- X מראים בכמה קופסאות היה אותה כמות של צימוקים. כמו שלעשרים ושמונה [צימוקים] היו חמש [קופסאות] ולעשרים ותשע [צימוקים] היו ארבע [קופסאות]".
- "לא, המספר איננו זהה. כל מה שצריך לעשות זה להסתכל על המספרים שלמטה, וזה אומר לך כמה צימוקים היו בכל קופסה".

תלמידים אחדים נימקו על ידי התייחסות לתכונות הקשורות לקונטקסט או לנתונים עצמם. הם לא התייחסו בתגובתם לגרף של הנתונים.

- "לא, משום ששוקלים את הקופסאות עד שיש בהן חצי אונקיה. הם לא סופרים את הצימוקים".
- "לא, משום שחלק מן הצימוקים יכולים להיות קטנים יותר וזה אומר שאתה יכול לקבל יותר".

תלמידים אחרים הראו בלבול בקריאת הגרף. ההסברים שלהם התמקדו במספר סימני ה- X או ב'גובה' של 'מגדלי סימני ה- X '. זה כאילו כל X מתייחס למספר מסוים של צימוקים במקום לערכים הרשומים על הציר האופקי. עבור תלמידים אלו, הרעיון ש"בכל קופסה יש מספר זהה של צימוקים" משמעותו שמספר סימני ה- X מעל כל מספר צריך להיות זהה.

- "לא, לסימני ה- X יש מספרים שונים, אז יש מספר שונה של סימני X בכל קופסה".
- "לא, משום שאין אותו מספר של סימני X מעל כל מספר".
- "לא, משום שיש יותר סימני X בחלק ופחות באחרים".

רפלקציה

מה מגלות התשובות בכתב של התלמידים שלכם על השאלות שבאיור 1, אודות התובנה שלהם על גרפים?

היכולת להגיב לרמות שונות של שאלות

מספר מחברים (Bertin 1983; Curcio 1987, 1989; McKnight 1990; Wainer 1992) אפיינו הן את סוגי השאלות (לדוגמא, **איור 2**) והן, במידה רבה או מועטה יותר, את טיב התגובות לשאלות אלו המתייחס לרמות שונות בנוגע לקריאה של גרפים. שלוש רמות של שאלות מתגלות: (1) חילוץ נתונים מתוך גרף, (2) מציאת ערך בין שני נתונים ידועים (Interpolation) ומציאת קשרים בנתונים כפי שהם מופיעים בגרף, ו-3) עריכת תחזית על ערכו של נתון מסוים הנמצא מחוץ לטווח הנתונים (Extrapolation) ופירוש היחסים שזוהו בגרף.

איור 2: מרכיבים של הבנת גרפים (Curcio 1987, 1989)

Curcio ערכה מחקר על הבנת גרפים שבדק את ההבנה של תלמידי כיתה ד' וכיתה ז' בארבעה גרפים טיפוסיים הניתנים בבתי ספר: פיקטוגרפים (Pictographs), גרפים של עמודות, גרפים של עיגול או עוגה, וגרפים של קו. היא זיהתה שלושה מרכיבים בהבנה של גרפים:

1. **קריאה של הנתונים** כרוכה ב"חילוץ" מידע כדי לענות על שאלות מפורשות שלגביהן התשובה מופיעה בצורה ברורה בגרף. לדוגמה, "לכמה תלמידים יש 13 אותיות בשם שלהם?"
2. **קריאה בין הנתונים** כרוכה במציאת ערך בין שני נתונים ידועים (Interpolation) ומציאת קשרים בנתונים כפי שהם מופיעים בגרף. זה כולל עריכת השוואות (למשל, גדול מ-, הכי גדול, הכי גבוה, הכי קטן וכו') כמו גם שימוש בפעולות על הנתונים (למשל, חיבור, חיסור, כפל, חילוק). לדוגמה, "לכמה תלמידים יש יותר מ-13 אותיות בשם שלהם?"
3. **קריאה מעבר לנתונים** כרוכה בעריכת תחזית על ערכו של נתון מסוים הנמצא מחוץ לטווח הנתונים (Extrapolation), ניבוי, או הסקה מהייצוג כדי לענות על שאלות סמויות. לדוגמה, "אם תלמידה חדשה הצטרפה לכיתתנו, כמה אותיות אתה מנבא שיהיו בשם שלה?"

מספר האותיות בשמות של תלמידי הכיתה

														X				X
														X				X
														X				X
														X	X	X	X	X
														X	X	X	X	X
														X	X	X	X	X
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17		

דוגמאות של שאלות שנבדקו אצל תלמידי כיתות היסוד הגבוהות וכיתות הביניים (**איור 1**) מספקות כיוונים אפשריים להערכת מרכיבים שונים של תובנה לגרפים.

שאלה 1 באיור 1 ניתנת לאפיון, תוך שימוש בסכמה של Curcio (איור 2), כ'קריאה בין הנתונים'. שאלה הנוגעת ל'קריאה של הנתונים' עשויה להיות "בכמה קופסאות של צימוקים היו שלושים צימוקים?" או "מהו מספר הצימוקים הקטן ביותר שניתן למצוא בקופסה של צימוקים?" שאלות כאלו יכולות לשמש כדרך להבהיר לתלמידים את מבנה הגרף לפני שהם עוברים לשאלות של 'קריאה בין הנתונים' ו-'קריאה מעבר לנתונים'.

שאלה 3 באיור 1 ניתנת לאפיון, תוך שימוש בסכמה של Curcio, כשאלה של 'קריאה מעבר לנתונים'. שאלה זו כרוכה בהסקה מהייצוג הגרפי כדי לעשות ניבוי על מצב לא ידוע, שהוא פתיחת קופסה נוספת של צימוקים. שאלה כזו מסתמכת על היכולות של התלמידים לחשוב על נושאים כמו מדדים מרכזיים או קיבוץ של הנתונים. בתגובה לשאלה זו, תלמידים מציעים מגוון של הסברים, הכוללים זיהוי של השכיח, התמקדות על זיהוי מקבצים של נתונים, דאגה לנתונים חסרים בחלק מן הערכים וטענה שנתונים חדשים "ימלאו את החורים", זיהוי החציון על ידי יצירה מחדש של קבוצת הנתונים מתוך הגרף, וקביעת מרכז הטווח במקום לקבוע את מרכז הנתונים. לא כל התגובות מתאימות, עלינו לחשוב בזהירות אילו מן התגובות מראות על הבנה של תצוגת הנתונים, וכיצד לבנות קישורים מתאימים למושגים סטטיסטיים אחרים.

נראה בברור שתלמידים צריכים לדבר יותר על גרפים, הן כאלה שניתנים להם לקריאה והן כאלה שהם יוצרים בעצמם. הם צריכים לדבר על המבנה של גרפים וכיצד מבנה זה משפיע על ההיגדים שהם יכולים להשמיע על מה שמופיע בתמונה. נוסף על כך, אנו צריכים לחשוב על השאלות שאנו שואלים וכיצד שאלות אלו יכולות למקד את תשומת הלב של תלמידים על המידע המצויר בגרף.

רפלקציה

בעזרת הקטגוריות של Curcio (איור 2), אילו שאלות תוכלו לפתח עבור תלמידיכם? כיצד עשויים התלמידים להשתמש בשלוש הקטגוריות של שאלות כדי לפתח שאלות על גרפים של נתונים משלהם? מה מגלות תגובות התלמידים לשאלותיכם או לשאלות שהתלמידים חיברו, אודות התובנה שלהם לגרפים?

שתפו אותנו ברפלקציות שלכם

עם הגדלת חלקו של התוכן הסטטיסטי בתוכניות הלימודים מהגן עד י"ב, ניתן כעת הן להבהיר מושגי מפתח והן לחקור את התפתחות החשיבה של תלמידים בנוגע למושגים אלו. החומר המופיע במאמר זה מתחיל למקד את הדיון על תפקידם של גרפים כחלק מן התהליך של חקירה סטטיסטית. אנו מעודדים אתכם:

- 1) לחקור את דרכי החשיבה של תלמידיכם כאשר הם מגיבים לשאלות כאלו ודומות להן, לאור התנהגויות שלדעתכם מעידות על חוש לגרפים,
- 2) לבדוק כיצד החשיבה שלכם משתנה כתוצאה מהאזנה לתלמידים שלכם,
- 3) ליצור משימות משלכם שיסייעו לתלמידים לפתח תובנה לגרפים,
- 4) לשתף אותנו בתוצאות של התנסויותיכם.

ביבליוגרפיה

- Berlin, Jacques. "The Basic Test of a Graph: A Matrix Theory of Graph Construction and Cartography." In *Processing of Visible Language*, Vol. 2, edited by Paul A. Kolers, Merald E. Wrolstad, and Herman Bouma. New York and London: Plenum Press, 1980.
- Bright, George W. , and Susan N. Friel. "Graphical Representations: Helping Students Interpret Data." In *Reflections on Statistics: Agenda for Learning, Teaching, and Assessment in K-12*, edited by S.P. Lajoie, Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Assoc., in press.
- Curcio, Frances R. "Comprehension of Mathematical Relationships Expressed in Graphs." *Journal for Research in Mathematics Education* 18 (November 1987): 382-93.
- _____. *Developing Graph Comprehension: Elementary and Middle School Activities*. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 1989.
- Doblin, Jay. "A Structure for Nontextual Communications." In *Processing of Visible Language*, Vol. 2, edited by Paul A. Kolers, Merald E. Wrolstad, and Herman Bouma. New York and London: Plenum Press, 1980.
- Friel, Susan N., and George W. Bright. "Graph Knowledge: Understanding How Students Interpret Data Using Graphs." Paper presented at the annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Columbus, Ohio, 1995a.
- _____. *Assessing Students' Understanding of Graphs: Instruments and Instructional Module*. Chapel Hill, N.C.: University of North Carolina at Chapel Hill Mathematics and Science Education Network, 1995b.
- _____. "Building a Theory of Graphicacy: How Do Students Read Graphs?" Paper Presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, New York, 1996.
- Friel, Susan N., Frances R. Curcio, and George W. Bright. "Making Sense of Graphs: Theory Development for Instruction." Chapel Hill, N.C.: University of North Carolina – Chapel Hill School of Education, 1997. Unpublished paper.
- Fry, Edward R. *A Theory of Graphs for Reading Comprehension and Writing Communication*. New Brunswick, N.J.: Rutgers University, 1983. ERIC document reproduction service no. ED 240528.

6

Translated and reprinted with permission from *Mathematics Teaching In the Middle School*, copyright © 1997 by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved. NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation

- Graham, Alan. *Statistical Investigations in the Secondary School*. New York: Cambridge University Press, 1987.
- Kader, Gary, and Mike Perry. "Learning Statistics with Technology." *Mathematics Teaching In the Middle School* 1(September-October 1994): 130-36.
- McKnight, Curtis C. "Critical Evaluation of Quantitative Arguments." In *Assessing Higher Order Thinking in Mathematics*, edited by Gerald Kulm, 169-85. Washington, D.C.: American Association for the Advancement of Science, 1990.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: NCTM, 1989.
- Sowder, Judith. T. "Making Sense of Numbers in School Mathematics." In *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching*, edited by Gaea Leinhardt, Ralph Putnam, and Rosemary A. Hattrup, 1-15. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Assoc., 1992.
- Twyman, Michael. "A Schema for the Study of Graphic Language." In *Processing of Visible Language*, Vol. 2, edited by Paul A. Kolers, Merald E. Wrolstad, and Herman Bouma. New York and London: Plenum Press, 1980.
- Wainer, Harold. "Understanding Graphs and Tables." *Educational Researcher* 21 (January-February 1992): 14-23.