ערך המקום וחיבור וחיסור

Place Value and Addition and Subtraction

מאת: Diana Wearne and James Hiebert

מתוך: Arithmetic Teacher, Vol. 41 , No. 5 , January 1994, pp. 272-274

תרגום: מיכל סוקניק

בהיותן בכיתה ב׳ פתרה כל אחת מהבנות, מרסי ואנג׳לה, את הבעיה הבאה:

בקפיטריה של ביה"ס יש 347 ארטיקים בקופסה אחת, ו- 48 ארטיקים בקופסה אחרת.
כמה ארטיקים יש בקפיטריה בשתי הקופסאות?

שתי הבנות ייצגו את המצב הסיפורי ע״י אותם התרגילים, וקבלו את אותה התשובה: 395 ארטיקים.
עבודתן הכתובה נראתה אותו הדבר:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 347 \\ +\ \ 48 \\ \hline 395 \end{array}$$

מרסי נתבקשה להסביר את פתרונה. היא אמרה: ״ימין זה נכון (Right is right). תמיד מצמידים את המספרים לימין , אחד מתחת לשני, ואז מחברים את המספרים החל מהימין: 7 ועוד 8 זה 15, אז כתבתי את ה- 5 והעברתי את ה- 1. 4 ועוד 4 זה 8 ועוד 1 זה 9, אז כתבתי 9. 3 ועוד כלום זה 3, אז כתבתי 3.״
כשנשאלה מדוע הציבה את הספרות אחת מתחת לשנייה כמו שעשתה בחישוב שלה, אמרה מרסי: ״זו הדרך שהמורה אמרה לעשות. ימין זה נכון״.
אנג׳לה הסבירה את עבודתה כך: ״ 7 ועוד 8 זה 15, אז היו לי מספיק יחידות כדי לעשות עוד 10. 4 ועוד 4 זה 8 עשרות, ועוד אחת זה 9 עשרות. אין לי מה להוסיף למאות, אז זה 3 מאות.״ כשנשאלה מדוע הציבה את הספרות אחת מתחת לשנייה כמו שעשתה בחישוב שלה, אנג׳לה אמרה: ״שמתי את שני ה- 4 ביחד, כי הם שניהם עשרות, ואת ה- 7 וה- 8 ביחד כי הם שניהם יחידות, וזה יותר קל כשהם ביחד.״

שנתיים לאחר מכן, הבנות בכיתה ד׳ והן מחברות מספרים עשרוניים. הבנות פותרות את הבעיה הבאה:

לג׳רמי היו 3.5 פאונדס של תפוזים בשקית אחד, ו- 0.62 פאונדס של תפוזים בשקית אחרת.
כמה פאונדס של תפוזים יש לג׳רמי?

עבודתן הכתובה נראתה כך:

עבודתה של מרסי

$$\begin{array}{r} 3\,.\,5 \\ +\,.\,6\ \ 2 \\ \hline .\,9\ \ 7 \end{array}$$

עבודתה של אנג׳לה

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1}\ \ \ \ \ \ \\ 3\,.\,5\ \ \\ +\ \ .\,6\,2 \\ \hline 4\,.\,1\,2 \end{array}$$

מרסי הסבירה את עבודתה: "קודם מציבים את המספרים אחד מתחת לשני ואז מחברים: 5 ועוד 2 זה 7, ו- 3 ועוד 6 זה 9. ואז מורידים את הנקודה העשרונית. אני שמתי אותה שם, במקום שהיו שני מספרים אחרי הנקודה."

ההסבר של אנג'לה היה כדלקמן: "אין מה להוסיף ל- 2 מאיות, אז פשוט כותבים אותם. ואז 5 עשיריות ו- 6 עשיריות זה 11 עשיריות, אז יש מספיר עשיריות כדי לעשות יחידה אחת, אז יש לך 4 יחידות. התשובה היא 4 ו- 12 מאיות." כשנשאלה אנג'לה מדוע שמה את הספרות אחת מתחת לשנייה כפי שעשתה, היא ענתה: "שמים את ה- 6 וה- 5 ביחד כי הם שניהם עשיריות."

במה שונות התשובות?

מהו ההבדל בין העבודות של שתי הבנות? ההבדלים הם מעבר לעובדה שמרסי טעתה בתרגיל עם המספרים העשרוניים ואנג'לה צדקה. ההבדלים ניכרו כבר בכיתה ב', בדרך שבה מרסי ואנג'לה הסבירו או הצדיקו את הפתרון שלהן. מרסי הסתמכה על הוראות המורה כדי לדעת מה לעשות, ולא נראה שהבינה הרבה לגבי תהליך הפתרון. אנג'לה, לעומת זאת, הסתמכה על הידע של עצמה, לגבי הדרך בה ניתן לחבר כמויות. לעיתים קרובות מתעלמים מהבדלים אלה, ואפילו לא מגלים אותם, כל עוד התשובה נכונה.

בכיתות הנמוכות, אולי לא **נראה** שיש הבדל גדול בין מרסי לאנג'לה בהתפתחות המתמטית שלהן – שתי הבנות מגיעות לתשובות נכונות – אך הסבריהן של הבנות מעידים על הבדלים לפחות משתי בחינות עיקריות. ראשית, אנג'לה ומרסי מפתחות דעות שונות לחלוטין לגבי מתמטיקה. עבור מרסי, המתמטיקה מתחילה להראות כמו סדרה של חוקים קשים לזכירה וליישום כשמוצגות בעיות שונות במקצת. עבור אנג'לה, מתמטיקה היא פתרון בעיות בדרך שנראית הגיונית. השיטות מביאות לתוצאות נכונות משום שהן מבוססות על דרכים הגיוניות של עבודה עם כמויות.

הבדל שני בין מרסי ואנג'לה הוא, שההסבר של מרסי לגבי חיבור מספרים שלמים אינו שם אותה בעמדה טובה לגבי חיבור מספרים עשרוניים. היא יכולה ללמוד לחבר מספרים עשרוניים רק על ידי לימוד של סדרת חוקים שונה. לעומת זאת, אנג'לה נמצאת בעמדה טובה לחבר מספרים עשרוניים. הרעיון של חיבור כמויות הנמדדות על ידי אותה יחידה, ניתן להעברה ממספרים שלמים למספרים עשרוניים ולשברים.

בסיפור של מרסי ואנג'לה, מרסי לא פתרה את בעיית המספרים העשרוניים נכון. כמובן, המורה שלה יכולה ללמד את החוק של "לשים נקודה מתחת לנקודה", ולתת למרסי לתרגל עד שהיא מצליחה לפתור בעיות מסוג זה. אך שימו לב שהעובדה שמרסי תלמד את החוק, לא תשנה את שני ההבדלים המשמעותיים בינה לבין אנג'לה. ההבדלים מתבטאים בצורה שבה הן מסבירות או מצדיקות את עבודתן, ולא בשאלה האם הן משיגות פתרון נכון לבעיה.

מדוע הבדלים אלה כה חשובים, אם שתי התלמידות קבלו תשובה נכונה? סביר להניח שמרסי לא תמשיך לקבל תשובות נכונות, במיוחד בבעיות שהן אפילו במעט שונות מאלה אותן תרגלה בביה"ס. המתמטיקה היא פשוט מורכבת ורחבה מדי, כדי לאפשר לתלמיד חוקים נפרדים לפתרון כל בעיה חדשה. אם השיטות מובנות, הבעלים שלהן יכולים לרוב לשנות ולהתאים אותן, כדי לפתור בעיות חדשות. אנג'לה לא הייתה צריכה ללמוד שיטה נפרדת כדי לפתור את בעיית חיבור העשרוניים. היא השתמשה במה שידעה מחיבור מספרים שלמים, ורק שינתה מעט מהשלבים.

ההשפעה של מטרות שונות של הוראה

כיצד התפתחו הבדלים אלה בין מרסי ואנג׳ילה? למרסי ולאנג׳ילה היו בוודאי התנסויות שונות של מתמטיקה בביה״ס. מבט חטוף על שיעורי המתמטיקה בכיתה ב׳ של מרסי מראה שהם הקדישו זמן ניכר לתרגול של חישובים. מרסי התאמנה על כ- 30 תרגילים כל יום, לרוב ללא הקשר של בעיה מילולית. מטרת ההוראה הייתה חישוב יעיל ונכון. כיתתה של אנג׳ילה, לעומת זאת, הקדישה יותר זמן לפיתוח רעיונות של ערך המקום, שימוש ברעיונות אלה כדי לפתח שיטות לחיבור מספרים, ושיתוף תלמידים אחרים בכיתה בשיטות שפותחו. כתוצאה מכך, אנג׳ילה תרגלה הרבה פחות בעיות כל יום, יחסית למרסי. הגברת הדגש בכיתתה של אנג׳ילה, על פתרון בעיות משמעותי ודיון, והפחתת הדגש על חישובים יעילים של נייר ועפרון, עולים בקנה אחד עם הסטנדרטים של תכנית לימודים והערכה במתמטיקה (Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, NCTM 1989) ועם הסטנדרטים המקצועיים עבור הוראת מתמטיקה (Professional Standards for Teaching Mathematics, NCTM 1991).

החשיבות של הבנת ערך המקום

הבנת ערך המקום כוללת בניית קשרים בין רעיונות מרכזיים של ערך המקום – כמו כימות קבוצות של אובייקטים על ידי קיבוץ לעשר, והתייחסות לקבוצות כאל יחידות – ושימוש במבנה של הסימון הכתוב כדי לשמר אינפורמציה זו לגבי הקבוצות. צורות שונות של ייצוגים עבור כמויות, כמו אמצעי המחשה וסמלים כתובים, מדגישים אספקטים שונים של מבנה ההקבצה. בניית קשרים בין ייצוגים אלה מביאה להבנה ברורה יותר של ערך המקום. הנה דוגמה לפעילות בכיתה א׳ המסייעת לתלמידים לפתח משמעות לערך המקום:

> במכולת של פיט מוכרים תפוחים בשקיות של 10. אם במכולת יש 74 תפוחים,
> כמה שקיות של 10 יכול פיט למלא? כמה תפוחים יישארו?

התלמידים לוקחים שבעים וארבעה עצמים ומקבצים אותם לעשרות, כדי לקבוע את מספר השקיות המלאות ומספר התפוחים שיישארו. התלמידים אז רואים שה- 7 ב- 74 מייצג את מספר הקבוצות של עשר שיכולות להיווצר משבעים וארבע, שה- 7 מייצג שבע קבוצות של עשר, או שבעים, ושה- 4 מייצג כמה תפוחים נשארו לאחר שכל הקבוצות של עשר נאספו. כדי לתת בעיה קשורה, אפשר לומר לתלמידים כמה שקיות מלאות ותפוחים בודדים יש במכולת, ולבקש מהם לכתוב את המספר המתאים. שני התרגילים מסייעים לתלמידים בפיתוח משמעות עבור הסמל הכתוב.
פיתוח שיטות לחיבור וחיסור מספרים רב-ספרתיים, הן במספרים שלמים והן בעשרוניים, צריך להתפתח מהבנתם של התלמידים את ערך המקום. הרציונל העומד מאחורי זה הוא שתלמידים נוטים יותר להבין את השיטות (פרוצדורות), אם ניתנת להן הזדמנות לבנות אותן ולשתף אחרים בהן (Hiebert and Carpenter 1992). השיטות (פרוצדורות) מתגלות בעקבות הבנת התלמידים את ערך המקום, ומשימוש באמצעי המחשה לייצוג הכמויות. קחו לדוגמא את הבעיה הבאה:

> ונדי אכלה ארוחת בוקר במזנון. היא אכלה ביצה מקושקשת, המכילה 145 קלוריות,
> ושתתה מיץ תפוזים המכיל 187 קלוריות. כמה קלוריות היו בארוחת הבוקר שלה?

תלמידים יכולים לפתור את הבעיה על ידי המחשת שתי הכמויות, ראיית הקיבוץ מחדש שיש לעשות כדי להגיע לפתרון, ויצירת קשר בין ההמחשה לבין הייצוג הסימבולי של הבעיה. או שהתלמידים יכולים להשתמש בהבנתם את ערך המקום כדי להנחות את פתרונם – הבנה שהתפתחה תוך כדי שימוש באמצעי המחשה . ההבנה תסייע לתלמידים לזהות שכאשר הם מחברים את ה- 5 וה- 7 בבעיה שלעיל, יש להם מספיק יחידות כדי ליצור עשרת נוספת.

האלגוריתמים הסטנדרטיים אולי לא יהיו השיטות הראשונות אותן מציעים התלמידים. לדוגמה, בבעיית ארוחת הבוקר, 145+187, תלמידים אולי ירצו לחבר את המספרים משמאל לימין במקום מימין לשמאל. תלמיד יכול לומר: "100 ועוד 100 זה 200, 40 ועוד 80 זה 120, אז זה 300 ו- 20 נוספים, ו- 5 ועוד 7 זה 12, אז זה 320, 330, 332." תלמיד אחר אולי יגיד: " 1 ועוד 1 זה 2, אז זה 2 מאות. 4 ועוד 8 זה 12, אז יש 12 עשרות, ויש לי מספיק עשרות כדי לעשות עוד מאה עם 2 עשרות נותרות. 5 ועוד 7 זה 12, אז יש לי מספיק יחידות כדי לעשות עוד עשרת, התשובה היא 332."

למרות ששיטות אלה שונות מהאלגוריתם הסטנדרטי, הן רק מעט פחות יעילות, והכי חשוב, מראות על מידה רבה של תובנת המספר (number sense) המבוססת על הבנה של ערך המקום. הניסיון שלנו הראה, שמרבית התלמידים שמעודדים אותם לפתח שיטות משלהם לחיבור מספרים רב-ספרתיים, מתחילים עם שיטה הדומה לאלה שתוארו לעיל, ואחר כך בהדרגה נעשים יעילים יותר, ולעיתים עוברים לשיטה מימין לשמאל. ההצלחה שלהם נובעת משימוש בשיטה שהם מבינים, ויכולים להסביר לחבריהם. שיטות יעילות מתפתחות כשתלמידים רואים ומקשיבים לחברי כיתתם המסבירים את השיטות שלהם.

התסריט הזה מתאים לכיתות הגבוהות יותר, בעבודה עם מספרים עשרוניים, בדיוק כפי שהוא מתאים בכיתות הנמוכות עבור מספרים שלמים.

סיכום

מורה חייב להבין מדוע תלמיד משתמש בשיטה מסוימת. אם התלמיד רק ממלא אחר חוקי המורה, או נכנע ללחץ חברתי, אז הוא יטה להתחיל לתפקד כמו מרסי. אם התלמיד משתמש בשיטה משום שהיא הגיונית עבורו, אז הוא יטה לתפקד כמו אנג׳לה.

הסיפורים של מרסי ואנג׳לה נלקחו ממחקרים שערכו כותבי המאמר במשך עשר שנים. ההשפעות של התנהגותן של מרסי ואנג׳לה מבוססות על הפרשנויות שלנו לגבי ממצאי מחקרים אלה. קוראים מתעניינים יכולים לעיין במאמרים שבביבליוגרפיה, לגבי תיאורים נוספים של תלמידים כמו מרסי ואנג׳לה.

ביבליוגרפיה

Carpenter, Thomas P., Elizabeth Fennema, Penelope L. Peterson, Chi-Pang Chiang. And Megan Loef. “Using Knowledge of Children’s Mathematics Thinking in Classroom Teaching: An Experimental Study.” *American Educational Research Journal* 26 (winter 1989): 499-531.

Heibert, James, and Thomas P. Carpenter. “Learning and Teaching with Understanding.” In *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, edited by Douglas A. Grouws. New York: Macmillan Publishing Co., 1992.

Heibert, James and Diana Wearne. “Links between Teaching and Learning Place Value with Understanding in First Grade.” *Journal for Research in Mathematics Education* 23 (March 1992): 98-122.

Heibert, James, Diana Wearne, and Susan Taber. “Fourth Graders’ Gradual Construction of Decimal Fractions during Instruction Using Different Physical Representations.” *Elementary School Journal* 91 (March 1991): 322-41.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, Va.: NCTM, 1989.

______. *Professional Standards for Teaching Mathematics.* Reston, Va.: NCTM, 1991.

Wearne, Diana. “Acquiring Meaning for Decimal Fraction Symbols: A One-Year Follow-Up.” *Educational Studies in Mathematics* 21 (1990): 545-64.

Wearne, Diana and James Hiebert. “Cognitive Changes during Conceptually Based Instruction On Decimal Fractions.” *Journal of Educational Psychology* 81 (December 1989): 507-13.

Yackel, Erna, Paul Cobb, and Terry Wood. “Small-Group Interactions as a Source of Learning Opportunities in Second-Grade Mathematics.” *Journal for Research in Mathematics Education* 22 (November 1991): 390-408.