المنازل والجمع والطرح

Place Value and Addition and Subtraction

المؤلفون: Diane Wearne and James Hiebert

Arithmetic Teacher , Vol. 41, No. 5, January 1994, pp. 272-274

ترجمة: د. عزمي أبو العسل

عندما كانتا، مارسي و أنجيلا، في الصف الثاني حلّتا المسألة على هذا النحو:
مطعم المدرسة يحتوي على 347 حبة بوظة في صندوق و 48 حبة بوظة في صندوق آخر. كم عدد حبات البوظة الموجودة في الصندوقين الموجودين في المطعم؟
كل من الطفلتين استعملتا نفس الجمل العددية لعرض حلهما وكذلك توصلتا إلى نفس الجواب: وهو أن عدد حبات البوظة الكلي 395. وكذلك حلهما المكتوب بدا مطابقا:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 347 \\ +\ \ 48 \\ \hline 395 \end{array}$$

عندما طُلِب من مارسي شرح حلها. قالت: " اليمين هو الصح. يجب دائما وضع الأعداد إلى اليمين أحدهما فوق الآخر ثم نجمع الأعداد بدءا باليمين: 7 زائد 8 يساوي 15 , وهكذا أنا كتبت 5 وفي اليد 1، 4 زائد 4 يساوي 8 زائد 1 الذي في اليد يصبح 9 . وهكذا أنا كتبت 9 . والآن 3 زائد لا شيء يكون 3. ولهذا أنا كتبت 3". ثم سُئلت عن سبب وضعها للأرقام فوق بعضها كما فعلت في حلها. أجابت مارسي:" هكذا قالت لنا المعلمة أن نعمل. واليمين هو الصح".
أنجيلا شرحت حلها هكذا: "7 زائد 8 يساوي 15 . فهكذا كان معي وحدات (آحاد) كفاية لأن اعمل 10 أخرى: 4 زائد 4 تساوي 8 عشرات وكمان 1 يصبح عندنا 9 عشرات: أما المئات فليس عندي ما أزيد لها. فهي إذاً 3 مئات. " وعندما سُئلت أنجيلا عن سبب وضعها للأرقام فوق بعضها البعض في حلها. قالت :" لقد وضعت الأربعتين مع بعض لأنهما عشرات والـ 7 والـ 8 مع بعض لأنهما وحدات (آحاد)، وهكذا أهون وهم مع بعض".
بعد سنتين وعندما كانتا أنجيلا ومارسي في الصف الرابع تجمعان أعدادا عشرية (كسور عشرية). ولقد أُعطيت كل منهما المسألة التالية:

كان مع جروم 3.5 كيلو من البرتقال في كيس وَ 0.62 كيلو من البرتقال في كيس آخر.
كم كيلو برتقال يوجد مع جروم في الكيسين؟

الحل الكتابي للبنتين كان كما يلي :

حل مارسي:		حل أنجيلا:	
			1
	3.5		3.5
	+ . 6 2		+ . 62
	. 97		4. 12

مارسي شرحت عملها بقولها:" في البداية نضع الأعداد فوق بعضها ثم نجمع: 5 زائد 2 يساوي 7. وَ 3 زائد 6 يساوي 9. ثم ننزل النقطة العشرية، أنا وضعت تلك، حيث العددين وراء النقطة".

أما شرح أنجيلا فكان كالتالي: " لا يوجد عندنا أي شيء لنزيده للـ 2 من أجزاء المئة. لذا نكتب فقط 2 في مكانها . ثم 5 أعشار زائد 6 أعشار يعطينا 11 عُشْر، لذا يكفينا لعمل واحد صحيح. لذلك لدينا 4 وحدات. فالجواب 4 وَ 12 في المئة." وعندما سألنا أنجيلا عن سبب وضعها للأرقام كما فعلت. أجابت أنجيلا: "نضع ألـ 5 و ألـ 6 مع بعض لأنهما أعشار".

بماذا تختلف الأجوبة؟

ما هو الفرق بين عمل البنتين؟ إن الفرق هنا يتجاوز الحقيقة أن مارسي أخطأت في سؤال يحتوي على أعداد عشرية، بينما أنجيلا لم تخطئ. لقد ظهرت الفروق مبكراً في الصف الثاني، عندما شرحت كل منهما طريقة حلها. فنرى مارسي معتمدة كليا على تعليمات معلمتها في الوصول إلى الحل مع أنها لم تفهم تماما أسلوب الحل. أما أنجيلا، فلقد اعتمدت
على معرفتها للكميات وطرق تجميعها. إن هذه الفروق غالبا تُهْمل ولا تُكْتَشَف ما دام الجواب صحيحاً.

في الصفوف المبكرة، نرى أن الفروق تكاد أن تكون معدومة بين مارسي وأنجيلا في تطورهما الرياضي – حيث إن اثنتيهما تصلان إلى الجواب الصحيح- أما شرحهما للأجوبة فيدل على فروق بطريقتين أساسيتين: الأولى، أنجيلا ومارسي تطوران أفكارا مختلفة عن الرياضيات. فبالنسبة لمارسي، الرياضيات تبدأ بالظهور مثل سلسلة من القواعد (القوانين) التي من الصعب حفظها واستعمالها كلما تغير شكل السؤال المعروض للحل. أما لأنجيلا، فالرياضيات هو حل مسائل بطريقة منطقية. فأُسلوب الحل يعطي أجوبة صحيحة لأنه مبني على طرق معقولة للعمل بالكميات.
فرق ثان بين مارسي وأنجيلا، إن شرح مارسي لجمع الأعداد الصحيحة لا يساعدها على جمع الأعداد العشرية. قدرتها على جمع أعداد عشرية يعتمد على تعلم قاعدة جديدة لذلك. بالمقابل،

أنجيلا قادرة على جمع الأعداد العشرية. لأن فكرة وضع الكميات المُقَاسَة بنفس الوحدة يمكن نقلها من الأعداد الصحيحة إلى الأعداد العشرية وإلى الكسور العادية.

في قصة مارسي وأنجلا، مارسي لم تقدر على حل المسألة بشكل صحيح. طبعًا، بإمكان معلمتها أن تعلمها قاعدة لوضع كل النقط العشرية فوق بعضها البعض ثم تطلب من مارسي التدرب على هذا النوع من المسائل، إلى أن تصبح قادرة على حل هذا النوع من المسائل. لكن يجب الانتباه هنا أن تعليم مارسي للقاعدة لن يغير الفرقين المهمين بينها وبين أنجلا. الفروق تظهر في طريقة شرح أو تعليل أسباب العمل، وليس الحصول على الجواب الصحيح للمسألة.

لماذا كل هذه الفروق مهمة عندما كلا الطالبتين تتوصلان إلى الجواب الصحيح؟

لأنه على الأغلب سوف لن تستمر مارسي في الوصول إلى الجواب الصحيح، خصوصا للأسئلة التي تختلف بعض الشيء عن التي تدربت عليها في المدرسة. إن الرياضيات موضوع مركب كثيرٌ ومن الصعب السماح للطالب بأن يتعلم قواعد وقوانين مختلفة لكل مسألة جديدة. إذا كانت الأساليب مفهومة، فإن بإمكان مستعمليها أن يغيروا الطريقة بما يتلاءم مع حلّ المسألة الجديدة. لم يكن من الواجب على أنجيلا أن تتعلم أسلوب حل مختلف لحل مسألة جمع الأعداد العشرية. فقد استعملت ما تعلمت عن جمع الأعداد الصحيحة وغيرت فقط بعض الأشياء.

تأثير الأهداف التعليمية المختلفة

كيف تطورت الفروق بين مارسي وأنجيلا؟ على الأغلب كان لمارسي وأنجيلا تجارب مختلفة في دراسة الرياضيات. فنظرة على رياضيات الصف الثاني لمارسي تكشف لنا، أنها قضّت وقتا طويلا تتدرب على الحساب. لقد تدربت على مسائل عديدة، وصلت في بعض الأحيان إلى الثلاثين مسألة يوميا، وفي الأغلب لم تحتو على مسائل كلامية. هدف التعليم كان القيام بحسابات صحيحة وسريعة. أما، في المقابل، فقد أمضى صف أنجيلا وقتا أطول في تطوير فكره قيمة المنزلة. فقد استعملوا هذه الأفكار في تطوير أسلوب للتعامل مع جمع الأعداد، وبعدها مشاركة الطلاب الآخرين بالأساليب والطرق التي توصلوا لها. وكنتيجة لذلك، فقد انحسر تدريب أنجيلا بعدد اقل من المسائل التي تدربت عليها مارسي. إن زيادة الأهمية، في صف أنجيلا، على حل المسائل الكلامية وطرحها للنقاش، وكذلك تقليل التشديد على سرعة حسابات بواسطة القلم والورقة، يتماشى مع توصيات المناهج ومستوى التقييم في الرياضيات المدرسية(NCTM 1989)، والمستوى المهني لمعلمي الرياضيات (NCTM 1991).

أهميه فهم المنازل

إن فهم المنازل يدخل فيه بناء علاقات بين أفكار عن المنازل – مثل تجميع مجموعات أغراض في مجموعات الـ 10ومعاملة المجموعة كوحدة— واستعمال البناء المكتوب رمزيا ليحمل معه معنى المجموعات. هنالك أشكال مختلفة لتمثيل الكميات، مثل الأدوات المحسوسة، والرموز المكتوبة، التي توضح وجوه مختلفة للبناء المجموعاتي. إن بناء العلاقات بين طرق التمثيل المختلفة يعطي فهم وتجانس للمنازل. هاكم مثلا لفعالية للصف الأول التي من شأنها مساعدة الطالب على تطوير حسّه لمعنى المنازل :

في دكانِ بيث يبيعون التفاح في أكياس الـ 10 تفاحات. إذا كان في الدكان 74 تفاحة،

كم عدد الأكياس من الـ 10 تفاحات بإمكان بيث أن يعبئ ؟ وكم عدد التفاحات الباقية؟

يأخذ الطلاب 74 غرضًا ثم يجمِعوها إلى مجموعات من عشرات، كي يصلوا إلى عدد الأكياس (المليئة) ومن ثم الباقي.الطالب، هنا، يرى الطلاب أن الـ 7 في الـ 74 تمثل مجموعات الـ 10 التي من الأربعة وسبعين، الـ 7 تمثل سبع مجموعات من العشرات، أو سبعين، والأربعة تمثل الباقي بعد تجميع مجموعات العشرات. مسألة على نفس على نفس النهج، أعطوا الطلاب عددا من الأكياس المليئة وتفاحات أخرى زائدة وأطلبوا منهم كتابة العدد الملائم. كلا التمرينين يساعدان على تطوير المعنى للرمز المكتوب .

إن تطوير أسلوب حل لعمليتي الجمع والطرح لأعداد متعددة المنازل، صحيحة كانت أم عشرية، يجب أن يتطور من فهم الطالب للمنازل. المنطق هنا، الطلاب على الأغلب سيفهمون أسلوب الحل إذا أتيحت لهم الفرصة لبناء أسلوبهم ومشاركة الآخرين ذلك (Hierbert and Carpenter 1992). أسلوب الحل هنا ناتج عن فهم الطلاب للمنازل ومن استعمالهم لأدوات محسوسة لتمثيل الكميات. مثلا لننظر إلى المسألة التالية:

وندي كانت تأكل فطورها في مطعم للأكل السريع. لقد أكلت بيضتين مخلوطتين تحتويان على 145 كالوري.

وشربت كأسًا من عصير البرتقال يحتوي على 187 كالوري. كم عدد الكالوريهات الموجودة قي فطورها؟

باستطاعة الطلاب أن يحلوا هذه المسألة وذلك بتمثيل (نمذجة) الكميتين، ورؤية إعادة التجميع للوصول إلى الحل. وبهذا نكون قد ربطنا بين التمثيل والرمز في هذه المسألة. أو، باستطاعة الطلاب أن يستعملوا فهمهم للمنازل كي يصلوا إلى الحل – الفهم الذي طوّروه من خلال استعمالهم للمواد المحسوسة. الفهم يساعد الطلاب على التعرف، بأنه عندما نجمع أل 5 وأل 7 في السؤال السابق نعلم أنه عندنا وحدات كافية لأن نكون عشرة أخرى.

الألغورثمات العادية من المكن أن لا تكون أول طريقة حل يعرضه الطلاب. مثلاً، في مسألة الفطور، 145 + 187، ممكن أن يطلب الطلاب أن يجمعوا الأعداد من اليسار إلى اليمين بدلاً من اليمين إلى اليسار. أحد الطلاب ممكن أن يقول:

" 100 وَ 100 يساوي 200، وَ 40 وَ 80 يساوي 120 وهكذا 300 وَ 20، ثم 5 وَ 7 يساوي 12 وهكذا ألـ 320، 330، 332 ". وطالب آخر يمكن أن يقول: " 1 وَ 1 يساوي 2، وهكذا عندنا 2 مئات، 4 وَ 8 يساوي 12، وهنالك 12 عشرة، وعندي عشرات كافية لأصنع مئة أخرى وزيادة عشرتين، 5 وَ 7 يساوي 12. وهكذا عندي عشرة زيادة. والجواب هو 332".

مع أن هذه الأساليب مختلفة عن الألغورثمات العادية، فهي فقط أقل كفاءة منه، وقمة في الأهمية، أنها تدل على فهم عميق للحس العددي (number sense) المبني على فهم المنازل. أن تجربتنا تدل على أن أغلب الطلاب الذين نشجعهم على تطوير أسلوب حلهم الخاص لعملية جمع أعداد ذات المنازل المتعددة يبدءون بأسلوب يشبه الأسلوب الذي شرحناه سابقًا، ثم تتطور بعض الشيء لتصبح أكثر كفاءة. في بعض الأحوال تتغير إلى أسلوب يمين- إلى- يسار. أن نجاحهم ينبع من استعمالهم لأسلوب يفهمونه ويقدرون على شرحه لأصدقائهم. أن أساليب الحل الأكثر كفاءة تتطور أمامهم وهم ينظرون ويستمعون إلى أصدقائهم الذين يشرحون أساليب وطرق حلهم. أن هذا السيناريو هو طريقة ناجحة للمستقبل في الصفوف العالية، عندما يعملون في الأعداد العشرية كما استعملوها في الأعداد الصحيحة.

المجمل:

يجب أن يعرف المعلم لماذا يستعمل الطالب أسلوب حل معين. إذا اتبع الطالب قواعد أستاذه أو إذا تنازل لضغوط أصدقائه، عندها يبدأ بأتباع طريقه مارسي. إذا أستعمل الطالب أسلوب حل لأنه منطقي وهو يفهمه، عندها سوف يقدم أعمالا مثل أنجيلا. قصص مارسي وأنجيلا أخذت من أبحاث أجراها كاتبو المقال، وذلك خلال 10 سنوات. القراء الذين يهمهم الموضوع بإمكانهم قراءة المقالات الواردة في قائمة المصادر.

المصادر:

Carpenter, Thomas P., Elizabeth Fennema, Penelope L. Peterson, Chi-Pang Chiang. And Megan Loef. "Using Knowledge of Children's Mathematics Thinking in Classroom Teaching: An Experimental Study." *American Educational Research Journal* 26 (winter 1989): 499-531.

Heibert, James, and Thomas P. Carpenter. "Learning and Teaching with Understanding." In *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, edited by Douglas A. Grouws. New York: Macmillan Publishing Co., 1992.

Heibert, James and Diana Wearne. "Links between Teaching and Learning Place Value with Understanding in First Grade." *Journal for Research in Mathematics Education* 23 (March 1992): 98-122.

Heibert, James, Diana Wearne, and Susan Taber. "Fourth Graders' Gradual Construction of Decimal Fractions during Instruction Using Different Physical Representations." *Elementary School Journal* 91 (March 1991): 322-41.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, Va.: NCTM, 1989.

______. *Professional Standards for Teaching Mathematics.* Reston, Va.: NCTM, 1991.

Wearne, Diana. "Acquiring Meaning for Decimal Fraction Symbols: A One-Year Follow-Up." *Educational Studies in Mathematics* 21 (1990): 545-64.

Wearne, Diana and James Hiebert. "Cognitive Changes during Conceptually Based Instruction On Decimal Fractions." *Journal of Educational Psychology* 81 (December 1989): 507-13.

Yackel, Erna, Paul Cobb, and Terry Wood. "Small-Group Interactions as a Source of Learning Opportunities in Second-Grade Mathematics." *Journal for Research in Mathematics Education* 22 (November 1991): 390-408.