

אסטרטגיות להוראת עובדות היסוד

Strategies for Basic-Facts Instruction

מאת: Andrew C. Isaacs and William M. Carroll

הופיע ב: Teaching Children Mathematics, Vol. 5 , No. 9 , May 1999

תרגום: ברכה סגליס

בתחילת כיתה ב', ילדים הסבירו איך הם פתרו את התרגיל $8 + 7$ בעזרת התשובות הטיפוסיות הבאות: "אני יודע ש $7 + 7$ הם 14, ועוד 1 זה 15"; " $2 + 8$ זה 10. אבל ל-7 יש 5 יותר, אז התשובה היא 15"; "אני פשוט ידעתי שהתשובה היא 15".

הוראה של עובדות יסוד כמו $8 + 7$ הייתה המטרה של הוראת המתמטיקה בכיתות היסוד במשך למעלה מ-100 שנה וממשיכה להיות חשובה גם כיום. בעוד מרבית המורים מסכימים שחשוב שתלמידים ישלטו בעובדות היסוד, רבים מהם אינם בטוחים כיצד ניתן להגיע לכך בדרכים העולות בקנה אחד עם הסטנדרטים של ה-NCTM (1989, 1991, 1995). הם אפילו חלוקים בדעתם מה פרוש ידיעת עובדות היסוד, ומתי ואפילו האם, צריכים התלמידים להגיע לשליטה. האם זה נכון לצפות מתלמידי כיתה א' לשנן את עובדות החיבור, או שמא משימה זו תפריע לחשיבה המתמטית שלהם? אילו מן הפעילויות הנעשות בכיתה יכולות לבנות הן את ההבנה והן את השליפה המהירה? האם ניתן להגיע לשליטה בעובדות באמצעות פעילויות של פתרון בעיות, או שהתרגול הכרחי? אם הרפורמות העכשוויות של החינוך המתמטי רוצות להצליח, יש לתת תשובות לשאלות על עובדות היסוד.

מדוע ילדים צריכים ללמוד את העובדות?

מרבית האנשים מכירים בכך שילדים צריכים ללמוד את עובדות היסוד משום שידיעתן מביאה תועלת, הן בבית הספר והן בחיים מחוץ לבית הספר. עשיית אומדן וחישובים בראש דורשים שימוש בעובדות היסוד. כיצד יכולים תלמידים להשתמש ב- 80×40 לצורת עשיית אומדן לתרגיל 84×41 , אם הם אינם יודעים כמה זה 8×4 ? תלמידים שיודעים את העובדות מצליחים יותר במתמטיקה של בית הספר. הורים, מורים, והציבור מצפים שבתי הספר ילמדו את עובדות היסוד. למזלנו, אין צורך שתהיה סתירה בין שליטה בעובדות לבין הרפורמה במתמטיקה של בית הספר. רבות מן המטרות של הרפורמה – לעזור לתלמידים לעשות קשרים בין המתמטיקה של בית הספר לבין העולם האמיתי, לעזור לתלמידים לפתח הבנה מושגית ביחד עם כישורים פרוצדורליים, לעזור לתלמידים ללמוד להסביר את החשיבה שלהם ולהבין את ההסברים של אחרים – ניתנות להשגה באמצעות תכנית שמובילה גם לשליטה בעובדות. בגישה נכונה, עובדות היסוד יכולות לספק הזדמנויות מצוינות ללמד ילדים לחשוב בצורה מתמטית.

כיצד צריך ללמד את העובדות?

לגישה המסורתית של שינון עובדות היסוד, עם תרגול תדיר ומבחנים המוגבלים בזמן, יש חסרונות רציניים. דרישות מוקדמות מדי לביצוע מהיר עלולות לגרום לחרדה ולהפחית הבנה. קביעת לוחות

זמנים נוקשים לשליטה לא נותנת מקום להבדלים אישיים ויש לה השלכות מצערות על חלק מן הילדים. גישת השינון מעודדת את התלמידים להאמין שמתמטיקה היא יותר זכירה מאשר חשיבה. היום, לעומת זאת, המאפיינים של גישה טובה יותר ברורים. גישה זו מתחילה עם החשיבה הטבעית של הילדים. המהות של רבות מהרפורמות העכשוויות במתמטיקה של כיתות היסוד, כולל הגישה לעובדות היסוד המתוארת כאן, היא להכיר בעושר של ידע מתמטי לא-פורמלי שילדים מביאים לבית הספר ולבנות עליו. בגישה המסורתית, נטו להתעלם או לדכא הרבה מן הידע הזה. עבודה מוקדמת עם עובדות היסוד צריכה לעזור לילדים לעדן ולהרחיב את האסטרטגיות הבסיסיות שלהם לפתרון בעיות פשוטות. בשעה שילדים מגבירים את שליטתם באסטרטגיות שונות, הם מתחילים לזכור את העובדות הפשוטות ביותר. ידיעת העובדות הפשוטות יותר מאפשרת שימוש באסטרטגיות יעילות יותר עבור עובדות קשות יותר. בהדרגה, תלמידים מפתחים שליטה באסטרטגיות יותר ויותר יעילות, ושומרים יותר ויותר עובדות בזיכרוןם. בסופו של התהליך, תלמידים יכולים להפיק בדייקנות ובאופן אוטומטי את כל הצרופים המספריים הבסיסיים. מרבית הצרופים נשלפים מהזיכרון, אבל יש גם אחדים שעשויים להתקבל על ידי ביצוע מהיר של אסטרטגיה או חוקים מתאימים. שימוש באסטרטגיות ושליפה מהזיכרון של עובדות נעשים הן על ידי ילדים והן על ידי מבוגרים. לדוגמה, אנו מכירים מתמטיקאי חוקר, שפותר את התרגיל 8×7 על ידי הכפלה פי 2 שלוש פעמים – 14, 28, 56 – אבל הוא עושה זאת כל כך מהר וללא מאמץ כך שזה נעשה באופן אוטומטי. בחלק זה של המאמר, נתאר גישה זו של "אסטרטגיות" עבור עובדות של חיבור וחסור; רבים מאותם רעיונות מתאימים גם לעובדות הכפל והחילוק. תחילה נתאר כיצד הידע הלא-פורמלי של ילדים, ובמיוחד הידע של ספירה ושל יחסי חלק-שלם, ניתנים לשימוש בתחילת העבודה על העובדות. לאחר מכן נתאר כיצד ילדים משתמשים בעובדות שהם מכירים כדי לשלוף עובדות שהם לא מכירים. לבסוף, נדון בתפקיד של אימון ונתווה רצף אפשרי להוראה של עובדות החיבור והחסור.

ספירה לשם פתרון בעיות

יתכן שהדרך הטובה ביותר להרחיב את ההבנה הלא-פורמלית לחיבור וחסור של ילדים בכיתות הראשונות, היא לבקש מהם לפתור בעיות פשוטות מבלי לומר להם כיצד יש לעשות זאת. בעיות אלו יכולות לבוא מחיי היומיום, ממצבים בכיתה, מספרי לימוד, מהמורה או מדמיונם של הילדים: כרטיס קולנוע למבוגר עולה \$7 ואילו כרטיס לילד עולה \$4. כמה יעלו כרטיס למבוגר וכרטיס לילד? "מרים רוצה סוס צעצוע שעולה \$15. יש לה \$8. כמה עוד היא צריכה?" בשעה שתלמידים מתמודדים עם הבעיות, יש לעודד אותם להמציא פרוצדורות לפתרון משלהם, על ידי חיפוש דפוסים, חשיבה בהגיון, ושימוש באמצעי המחשה. הגישה של המבוגרים – צמצום בעיות כאלו לתרגילי חיבור וחסור ומציאת התשובות על ידי שליפה מהזיכרון – איננה האסטרטגיה הטבעית עבור ילדים צעירים. במקום זה, ילדים בכיתות הראשונות, נוטים להשתמש בייצוג ישיר [direct modeling], אסטרטגיות של ספירה, ואסטרטגיות של עובדות נגזרות [derived facts] (Bergeron and Herscovics 1990).

טכניקות של ייצוג ישיר [direct modeling] הן הראשונות שמופיעות על פי רוב עבור בעיה מסוג נתון. הילד מונה עצמים על מנת לייצג את הכמויות שבבעיה, מבצע פעולות עם העצמים המקבילים לסיטואציה שבבעיה, ומונה קבוצה כלשהי כדי למצוא את התשובה. לדוגמה, כדי לפתור את בעיית הקולנוע שהוצגה קודם, הילד עשוי למנות שבע דיסקיות עבור מחירו של הכרטיס למבוגר וארבע

דיסקיות עבור מחיר הכרטיס לילד. לאחר מכן, באמצעות מניית כל הדיסקיות, הילד יכול למצוא את המחיר הכולל. ילדים צעירים משתמשים בייצוג ישיר כדי לפתור בעיות חיבור וחיסור פשוטות ואפילו בעיות כפל וחילוק המפתיעות בקושי שלהן (Carpenter et al. 1993).

עם זאת, ייצוג ישיר יכול להיות במידה מסוימת בלתי יעיל, במיוחד עבור בעיות עם מספרים גדולים, לכן, בשלב השני אסטרטגיות של ייצוג ישיר מוחלפות באסטרטגיות של ספירה בקול או באופן מנטלי. זוהו מספר גדול של אסטרטגיות כאלו לחיבור (Resnick 1983; Carpenter and Moser 1984; Baroody and Ginsburg 1986; Siegler and Jenkins 1989). שתי אסטרטגיות מצויות הן "ספירת המשך מהמספר הראשון" ו"ספירת המשך מהמחובר הגדול".

מאפיין משמעותי של אסטרטגיות הספירה הוא שהילד צריך לעקוב אחר כמות המספרים שכבר אמר. כדי לפתור, למשל, את התרגיל $3 + 4$ באמצעות האסטרטגיה "ספירת המשך מהמספר הראשון", הילד מתחיל מהמספר של המחובר הראשון (במקרה זה מהמספר 3) ולאחר מכן סופר ארבעה מספרים נוספים (4,5,6,7). "ספירה כפולה" זו יכולה להיות מסובכת שכן הילד צריך לדעת מתי סיים להוסיף ארבעה מספרים (כלומר, עליו לספור במקביל את כמות המספרים שהוסיף ולכן זוהי ספירה כפולה). שימוש באצבעות עשוי לעזור.

אסטרטגיות ספירה דומות קיימות עבור חיסור, כמו ספירה קדימה מן המספר הקטן אל המספר הגדול וספירה אחורה מהמספר הגדול.

מהי הדרך הטובה ביותר לקדם ילדים לשימוש באסטרטגיות יעילות יותר, היא שאלה פתוחה. הצגת רצף מפורש של אסטרטגיות וציפייה מכל הילדים לפעול לפיו, יהיה ללא ספק עצה גרועה. לא רק שילדים שונים מתקדמים בקצבים שונים, אלא גם אותו הילד עשוי להשתמש באסטרטגיות שונות לבעיות שונות, או אפילו לאותה בעיה בהקשרים שונים. יחד עם זאת, אם מורים יהססו יותר מדי בהצגת שיטות טובות יותר, אזי התקדמות התלמידים עלולה להתעכב.

אחת הדרכים לעודד שיטות יעילות יותר היא לבקש מהילדים לשתף זה את זה באסטרטגיות שלהם. דרך זו עוזרת להם לשפר את כישורי השיח שלהם וללמוד איש מרעהו. **איור 1**, לדוגמה, מראה כיצד ילדים בכתה אי השתמשו בלוח המאה כדי למצוא כמה זה $5 + 9$. בכיתה טיפוסית, ילדים ישתמשו ויתארו גישות שונות, כך שמרבית הילדים יתקלו בטכניקות חדשות אך ניתנות להבנה. המורה יכול גם הוא להציע ולהדגים אסטרטגיות, תוך השגחה על כך שאסטרטגיות מסוימות לא יהפכו ל"רשמיות" בעוד אחרות אינן מקבלות תמיכה. המורה לא צריך להתאכזב כאשר ילד לא מאמץ מיד אסטרטגיות יעילות יותר – ההתפתחות עשויה להיות מתחת לפני השטח בקצב המתאים ביותר לילד.

דיונים כיתתיים על אסטרטגיות צריכים לבוא ביחד עם תרגילים המתוכננים כך שיקדמו אסטרטגיות מתוככמות יותר. לדוגמה, ההתקדמות מספירת הכל לספירת המשך תלויה בחלקה ביכולת להמשיך לספור ממספר מסוים. אימון בספירה מחוץ להקשר של בעיה נתונה, יכול לעזור לילדים לפתח יכולות שתומכות באסטרטגיות מתוככמות יותר לפתרון בעיות. יש לכלול מגוון של תרגילים כאלה: ספירה קדימה וספירה אחורה באחדות, החל ממספרים שונים; ספירה בדילוגים, במיוחד בדילוגים של 2, 5 ו-10; וספירה קדימה ואחורה של כמות נתונה של מספרים: "התחל ב-8 וספור קדימה 3" או "התחל ב-11 וספור אחורה 2", וכן הלאה.

איור 1: אסטרטגיות של לוח המאה לתרגיל $5 + 9$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

"התחלתי ב- 5. אחרי זה ספרתי עוד 5 עד 10, אחר כך עוד 4 עד 14."

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

"התחלתי ב- 5 וקפצתי קדימה ב- 10 עד 15. אבל צריך רק 9, אז חזרתי אחורה 1 ל- 14."

חלקים ושלמים

הבנה מרכזית נוספת שילדים צעירים מביאים לבית הספר היא שניתן לפרק כמות לחלקים, כך שאם שמים אותם ביחד הם שווים לכמות המקורית. הם מבינים גם, שאם יש להם קצת והם מקבלים עוד, אז יש להם בסוף יותר; ואם יש להם קצת והם מאבדים ממנו קצת, אז יש להם בסוף פחות (Resnick, Lesgold, and Bill 1990). פיתוח נוסף של הרעיונות הבסיסיים האלה על "שלמים וחלקים" הינו הכרחי להבנה של חיבור וחסור. מסגרות-עשר, כמו אלו המופיעות באיור 2, טובות לפיתוח הבנות של חלק-שלם הכרוכות בנקודות ציון של המספרים 5 ו-10 (Thompson and Van de Walle 1984; Thornton and Smith 1988; Van de Walle 1994). הבנות אלו שימושיות במיוחד בלימוד העובדות של חיבור וחסור. לדוגמה, ה"מסגרת-עשר" עבור 8 המופיעה באיור 2 מראה ש- 8 זה 3 יותר מ- 5 וגם 2 פחות מ- 10. ה"מסגרת-עשר" עבור 4 מראה ש- 4 זה 1 פחות מ- 5 ו- 6 פחות מ- 10. ברגע שתלמידים לומדים עובדות הכרוכות ב- 5 וב- 10, במיוחד את זוגות המספרים שסכומם 10, הם יכולים להשתמש בידע שלהם כדי לפתור בעיות עם עובדות יסוד אחרות.

עובדות נגזרות [Derived facts]

למרות שלמרבית הילדים הצעירים אין שליטה אוטומטית בעובדות היסוד, הרי שלמרבית המבוגרים יש. בתווך ישנו השלב שבו חלק מן העובדות ידועות וחלק לא. במהלך שלב זה, ילדים רבים משתמשים בעובדות שהם כבר יודעים, כדי לגזור מהם את העובדות שהם אינם יודעים. דיון כיתתי באסטרטגיות כאלה לעובדות נגזרות עוזר לתלמידים ללמוד מעמיתיהם ונותן לגיטימציה לשימוש באסטרטגיות, ובכך מעודד המצאה של אסטרטגיות נוספות (Steinberg 1985). במהלך הדיון הכיתתי צריך לבחון את היתרונות היחסיים של אסטרטגיות שונות עבור בעיות שונות (Thornton and Smith 1988). עידוד הדיון

על פתרונות מרובים מקדם את הידע של אסטרטגיות ועובדות ועוזר לתלמידים לפתח שיטות לחישובים רב-ספרתיים ולחישובים בראש. הוראה המקדמת אסטרטגיות ספציפיות יכולה גם כן להועיל.

איור 2: מסגרות עשר המראות ש $4 + 8 = 12$

$4 + 8 = \underline{\quad}$

מריה עשתה 4 ו-8 בתוך מסגרות העשר. אחרי זה היא העבירה 2 דסקיות כדי לעשות 10 ועוד 2 כדי לעשות 12. אז $4 + 8 = 12$

העובדות של "התאומים" מסייעות לעיתים קרובות לגזור עובדות לא ידועות. לדוגמה, ילד עשוי לפתור את התרגיל $3 + 4$ על ידי ציון ש $3 + 3 = 6$, אז $3 + 4$ צריך להיות 1 יותר מ-6. עובדות כמו $8 + 6$ ניתנות לפיתרון או על ידי "חלוקה שווה" ($8 + 6 = 7 + 7 = 14$) או על ידי שימוש בתאומים והוספת 2 ($8 + 6 = 6 + 6 + 2 = 12 + 2 = 14$). מאחר שאסטרטגיות המבוססות על התאומים שכיחות, כדאי ללמד ילדים את עובדות התאומים בשלב מוקדם. ניתן לשנות משחקים רבים כך שיכללו תאומים. לדוגמה, משחקים שבהם נדרשות שתי קוביות ניתן לשחק במקום זה עם קובייה אחת שמוכפלת. תרשים ובו דוגמאות של עובדות חיבור כפולות, כמו 6 ביצים + 6 ביצים = 12 ביצים, ניתן לשמור כמשימה כיתתית ולעשות בו חקירות למציאת דפוסים, למשל, שכל הסכומים הם זוגיים. בשלב זה מתאים גם לעשות תרגולים קצרים בע"פ כדי לחזק אצל הילדים את הידע שלהם לעובדות אלו.

אסטרטגיות שכיחות רבות נוספות כרוכות ב-10. למשל, ילד ששתמש ב-10 עשוי לפתור את התרגיל $9 + 7$ בצעדים אחדים: $9 + 1 = 10$, $10 + 6 = 16$, אז $9 + (1 + 6) = 16$. כדי לתמוך באסטרטגיות כאלו יש לתת תשומת לב בשלב מוקדם למרכיבי ה-10, כמו $4 + 6$, $7 + 3$, וכן הלאה. הפעילויות עם "מסגרת-עשר" שתוארו קודם הן אידיאליות.

ילדים משתמשים גם באסטרטגיות של עובדות נגזרות לחיסור. כמה מן האסטרטגיות לחיסור הן עידון של ספירה, כמו שימוש ב-10 כגשר לספירה קדימה או אחורה. לדוגמה, כדי לפתור את התרגיל $13 - 6$, ספור קדימה 4 מ-6 עד 10, ואחרי זה עוד 3 מ-10 ל-13, סה"כ ספירה של $4 + 3 = 7$ אסטרטגיות אחרות כוללות שימוש בעובדות חיבור ידועות כדי לגזור עובדות חיסור לא ידועות: $15 - 8 = 7$, משום ש $7 + 8 = 15$.

תרגול

מקומו של התרגול במתמטיקה של ביה"ס שנוי במחלוקת. אנו חושבים שעמדה הגיונית תוארה על ידי William Brownell לפני יותר מחמישים שנה. Brownell ותלמידתו Charlotte Chazal מצאו שבתנאים מסוימים, תרגול יכול להזיק. דרישות מוקדמות מדי למהירות, למשל, גרמו לילדים רבים להיות פשוט מהירים יותר בגישות לא בשלות. דחיית התרגול הביא להבנה טובה יותר ובסופו של דבר לפחות צורך לתרגל (Brownell and Chazal 1935). לצערנו, במהלך השנים, כמה מן המחנכים לא הבינו נכון מחקר זה ומחקרים דומים, והסיקו שכל תרגול הוא רע. אנו מאמינים שהמסקנה הנכונה היא שתרגול מוקדם מדי יכול להיות מזיק, אבל תרגול המנוהל נכון הכרחי לפיתוח מומחיות – בין אם הנושא הוא פסנתר, טניס, או עובדות היסוד (Brownell 1956; Chase and Chi 1981; Siegler 1988; Anderson, Reder, and Simon 1996). תרגול קצר, מעניין ומכוון למטרה, המפוזר לאורך זמן, הוא על פי רוב יעיל ביותר. פתרון בעיות הינו מקור חשוב אחד לתרגול כזה, אבל משחקים, מחשבים, או אפילו השיטות המיושנות של כרטיסי הברקה ושינון במקהלה יכולים להיות מועילים גם כן.

רצף של הוראה

הרעיונות הבאים יכולים לשמש להתוויית רצף הוראה אפשרי לעובדות החיבור והחיסור. שימו לב שברצף זה, העובדות מקובצות לפי אסטרטגיה במקום לפי סכום. לדוגמה, תאומים כמו $6 + 6$, יכול להיות קל יותר מתרגיל כמו $3 + 4$, ובהתאם, מופיע מוקדם יותר ברצף זה.

1. מושגים בסיסיים של חיבור; הדגמה ישירה ו"ספירת הכל" עבור חיבור
2. עובדות החיבור של ה-0 וה-1; "ספירת המשך"; הוספת 2
3. תאומים ($6+6$, $8+8$, וכדו')
4. מרכיבים של 10 ($1 + 9$, $2 + 8$, וכדו')
5. מושגים בסיסיים של חיסור; הדגמה ישירה עבור חיסור
6. עובדות חיסור פשוטות (0, -1, -2); "ספירה אחורה" כדי לחסר
7. עובדות חיבור קשות יותר; אסטרטגיות של עובדות נגזרות לחיבור (קרוב לתאומים, עובדות של שבירת עשרת)
8. "ספירה קדימה" כדי לחסר
9. עובדות חיסור קשות יותר; אסטרטגיות של עובדות נגזרות לחיסור (שימוש בעובדות החיבור, עובדות של שבירת עשרת)

כיצד ניתן להעריך ידע של עובדות?

הערכת ילדים על ידע של עובדות צריכה להיות מאוזנת, מבוססת על מחוונים מרובים, ומתואמת עם ההוראה. ההערכה צריכה לעזור למורה להעריך לא רק את התשובות, אלא גם כיצד התלמידים מגיעים לתשובות אלו והאם הם מבינים את המושגים המתמטיים והקשרים המונחים ביסודם. לדוגמה, תלמיד עשוי להראות כיודע את עובדות היסוד במהלך פעילויות של פתרון בעיות, אבל למעשה הוא מסתמך על ספירה. תלמיד אחר עשוי להיות בקי בעובדות מבודדות, אבל יש לו הבנה מועטה על המושגים של

הפעולות. שילוב של שיטות הערכה יכול להבהיר במה התלמיד חזק ובמה הוא חלש ויכול לעזור למורה לתכנן את ההוראה.

המשמעות של שליטה בעובדות משתנה בגילאים השונים. לדוגמה, תלמיד כיתה א' המופיע באיור 3 השתמש בספירת אצבעות, תאומים, ושליפה מהזיכרון כדי לענות על עובדות שונות. תגובות אלו מעידות על מגוון טוב של הבנה מתמטית ומצביעות על כך שהתלמיד שולט במידה סבירה בעובדות החיבור הבסיסיות. מאידך, בכיתה ג' או ד' נצפה שכל עובדות החיבור יינתנו במהירות באמצעות שליפה מהזיכרון או אסטרטגיות אוטומטיות.

איור 3: תלמיד כיתה א' בעל "שליטה סבירה"

תלמיד: [התלמיד קורא] שלוש ועוד חמש שווה... א..[הפסקה] שלוש [התלמיד סופר באצבעות, תוך כדי הצבת חמש אצבעות בבת אחת]. ארבע, חמש, שש, שבע, שמונה. שמונה.

מורה: איך חיבת את זה?

תלמיד: עשיתי באצבעות.

[המורה מראה לתלמיד כרטיס עם התרגיל $5+5$]

תלמיד: [במהירות] חמש ועוד חמש שווה עשר.

מורה: איך קיבלת את זה?

תלמיד: חיבתתי את זה בראש שלי.

מורה: תמיד ידעת את זה? [התלמיד מסמן שכן]. טוב, כמה זה שש ועוד שש?

תלמיד: [די במהירות] שלוש עשרה

מורה: איך קיבלת את זה?

תלמיד: משום שספרתי חמש ואחרי זה הוספתי עוד שניים: חמש ועוד חמש ועוד שניים.

מורה: וקיבלת מה, שלוש עשרה?

תלמיד: כן. [התלמיד קורא את הבעיה הבאה] "שבע ועוד תשע שווה..." [הפסקה]. אחרי זה התלמיד מתחיל לספור באצבעות. קודם התלמיד מתחיל כנראה לספור הכל – עד שבע ביד אחת. ואז הוא מתחיל שוב, כשהוא אומר שבע ומתחיל לספור שוב באצבעות, תוך כדי הצבת תשע אצבעות זו אחר זו] שמונה, תשע, עשר, שש עשרה. שש עשרה.

מורה: שש עשרה. טוב, אז הנה עוד אחד. אם שבע ועוד תשע הם שש עשרה, כמה הם תשע ועוד שבע?

תלמיד: [שתי שניות, ואז הוא עונה בהתלהבות]. שש עשרה!

מורה: איך ידעת את זה?

תלמיד: זה לא משנה מי קודם. הם תמיד... הם פשוט תמיד כמו... לא משנה מה ראשון, הם תמיד אותו מספר.

מורה: הנה עוד תרגיל. ארבע ועוד עשר.

תלמיד: [במהירות] ארבע ועוד עשר הם ארבע עשרה.

מורה: איך קיבלת את זה?

תלמיד: טוב, אני פשוט חיבתתי את זה

מורה: באצבעות?

תלמיד: לא. בראש.

מדגמים של עבודת התלמידים

איסוף מדגמים של עבודת התלמידים הינה דרך טובה ללקט עדויות אודות הידע ויישום העובדות של התלמידים. מדגמים אלו, המבוססים על ביצוע, צריכים להגיע מפעילויות בהם התלמידים משתמשים בעובדות. לדוגמה, איור 4 מראה תיבת איסוף למספר שבה תלמיד בכיתה ב' רשם דרכים שונות להגיע למספר מטרה, בדוגמה זו, 9. תרגילים כאלו עוזרים לילדים לפתח את ההבנה שלהם לחיבור וחיסור ומספקים גם הזדמנויות להערכת ידע של עובדות. למרות שמדגמים המבוססים על ביצוע מספקים עדויות על הבנה מושגית ויישום, המידע אודות רמת השליטה של התלמיד הוא על פי רוב מוגבל. לדוגמה, מדגמים של עבודה אינם מגלים האם התלמיד השתמש בספירה, אסטרטגיות של עובדות נגזרות, או שלפה מהזיכרון. המידע מוגבל גם למספרים המיוחדים המופיעים במדגם. ללא מידע נוסף, המורה עלולה להתקשות לתכנן הוראה משמעותית.

איור 4: "תיבת איסוף למספר" עבור המספר 9

7+2, 8+1, 9+0
6+3, 5+4, 18-9
9-0, 8-0+1
7+4-2, 12-3
11-2, 10-1
1+1+1+2+3+1
1+2+3+3

תצפיות, דיונים כיתתיים וראיונות

צפייה בתלמידים העוסקים במשחקים או בפעילויות של פתרון בעיות יכולה להניב מידע עשיר אודות הידע שלהם על העובדות. לדוגמה, בזמן שתלמידים משחקים במשחק, המורה יכולה להבחין האם הם משתמשים באסטרטגיות של ספירה, עובדות נגזרות, או עובדות ידועות. חשוב יותר, המורה יכולה לקבל מושג טוב יותר אודות הטווח של הידע של התלמידים לגבי עובדות בודדות. רישום הערות קצרות מן התצפיות יכול לסייע בתכנון הוראה יחידנית ולכיתה כולה: תומס עדיין משתמש בספירת המשך, אפילו בשביל עובדות פשוטות; ג'ואנה יודעת את מרבית עובדות התאומים, והיא גם משתמשת בעובדות אלו כדי לפתור כמה מן המספרים הקרובים לתאומים. ניתן לקבל מידע שימושי גם במהלך דיונים כיתתיים כאשר תלמידים מסבירים את דרך הפיתרון שלהם לבעיות מילוליות או לפעילויות אחרות של פתרון בעיות. ראיונות אישיים קצרים הם קרוב לוודאי הדרך הטובה ביותר לקבל תמונה מלאה של מידת ההתקדמות בעובדות היסוד של התלמיד. למרות שראיונות אלו גוזלים זמן, מורה יכולה, עם מעט תכנון, להתמודד עם ראיונות של חמש דקות פעמיים בשנה לכל תלמיד, אולי על ידי ריווח הראיונות על פני חודש ימים. עריכת ראיונות בתדירות גבוהה יותר לתלמידים המגלים קשיים עשויה לעזור באיתור הבעיות.

מבחני סיכום [Inventory Tests]

למרות שברור שהסתמכות יתר על מבחנים המוגבלים בזמן מזיקה יותר ממועילה (Burns 1995), הרי שעובדה זו קיבלה לעתים פירוש שגוי שאוסר לחלוטין שימוש בהם. להיפך, אם אנו רוצים להעריך שליטה בעובדות, זמן הוא מרכיב חשוב. מבחני זמן משרתים גם את המטרה החשובה להעביר לתלמידים ולהורים את המסר ששליטה בעובדות היסוד הוא יעד מפורש של התוכנית במתמטיקה. עם זאת, מבחני זמן יומיומיים, או אפילו שבועיים או חודשיים, הינם מיותרים. ניתן להעביר מבחן מסכם על כל עובדות החיבור והחיסור בתחילת כיתות ב' ו-ג'. מבחנים אלו קובעים קו התחלה למדידת מידת ההתקדמות ומספקים מידע שיכול להועיל בתכנון ההוראה. ניתן להשתמש במבחני סוף שנה, ואולי גם במבחני אמצע השנה, לתיעוד מידת ההתקדמות. באופן דומה, ניתן להעביר מבחני מסכם לעובדות הכפל והחילוק בכיתות ד' ו-ה'. אנו ממליצים נגד מבחני זמן במהלך כיתה א', או בשימוש תדיר בכיתות היסוד, משום שהם מנוגדים לגישה של שימוש באסטרטגיות למציאת העובדות. כלומר, במצב של זמן מוקצב, תלמידים יטו פחות לחקור ולגלות את האסטרטגיות המתוחכמות יותר הנחוצות להתקדמות שלהם.

אבחונים דיאגנוסטיים בזעיר אנפין

למרות שתוצאות חיוביות במבחנים מסכמים מרגיעות, הם מניבים מידע מוגבל. יכול להיות, למשל, שתלמיד שולט במספר עובדות אבל משתמש בספירה לעובדות אחרות. מסיבה זו, זה יעזור לבדוק קבוצות קטנות של עובדות באמצעות אבחונים דיאגנוסטיים קצרים, המקושרים לאסטרטגיות ספציפיות. לדוגמה, אחרי שהתלמידים עובדים על התאומים, מבחן קצר של עובדות התאומים יכול להראות האם התלמידים מוכנים להתקדם הלאה. בשעה שהתלמידים מתקדמים לקראת שליטה, מבחנים קצרים של אסטרטגיות מעורבות לעובדות – תאומים, קרוב לתאומים, והשלמה לעשר – יכולים גם כן להועיל למטרות דיאגנוסטיות. חוק שלוש השניות משמש לעיתים קרובות כאמת המידה לאוטומטיזציה (Van de Walle 1994), אם כי מורים אחדים מעדיפים שתי שניות (Thornton 1990). שימו לב שקריטריונים אלו מאפשרים מספיק זמן לתלמידים להשתמש באסטרטגיות יעילות או בכללים עבור חלק מן העובדות. אם אנו מצפים שהתלמידים יתקדמו מאסטרטגיות ספירה לקראת שטף בעובדות, אז העברה מדי פעם של מבחן לא מאיים או תרגול, הם עקביים עם המטרות שלנו ועם המסר שאנו רוצים שהתלמידים יקבלו. הנקודה המכריעה היא להדגיש התקדמות אישית. בגן הילדים ובכיתה א', אסטרטגיות ספירה הולמות את פתרון עובדות החיבור היסודיות, אבל אנו צריכים לגלות דאגה כאשר תלמידים עדיין "סופרים הכל" באמצע כיתה ב', או שלא מגלים שליטה אפילו בעובדות החיבור הפשוטות ביותר. אם לא נגלה את הקשיים של תלמידים אלו ונתכנן עבורם תוכנית הוראה מתאימה, נעשה להם שרות רע. גישה מאוזנת להערכה – מדגמים של עבודות, תצפיות אחדות, מידע כלשהו ממבחנים, ומידע כלשהו מראיונות – נותנת למורה, לתלמיד ולהורה, תמונה שלמה יותר של ידע התלמיד בעובדות, כיצד הוא מקושר לידע מתמטי אחר, ואיזו התקדמות נעשתה.

סיכום

לגישה המבוססת על אסטרטגיות ללימוד עובדות היסוד יש יתרונות אחדים. ראשית, זה עובד : ילדים אכן לומדים את העובדות. Rathmell (1987) מצא שהוראה של אסטרטגיות חשיבה לילדים, משפרת את הלמידה שלהם ואת זכירת עובדות היסוד. מחקרים שנעשו לאחרונה מאשרים תוצאה זו שוב ושוב. ממצאים אלו לא צריכים להפתיע: גישה המבוססת על אסטרטגיות עוזרת לתלמידים לארגן את העובדות ברשת בעלת משמעות כך שזוכרים אותם ומגיעים אליהם בקלות רבה יותר. נוסף על כך, למרות שעובדות רבות נעשות אוטומטיות, גם מבוגרים משתמשים באסטרטגיות ובכללים עבור עובדות מסוימות. אסטרטגיות רבות, כמו התכונות של הכפולות של 9, גם תומכות בעובדות וגם מספקות קשרים למושגים מתמטיים אחרים, כמו התחלקות. חוקרים רבים המליצו על גישות המבוססות על אסטרטגיות ללימוד עובדות היסוד, כולל Thornton (1987, 1990), Cook and Dossey (1982), Myren (1996) ו-Chambers (1996).

גישה המבוססת על אסטרטגיות בונה גם את ההבנה והביטחון של התלמיד. אי-הדגשה של היזכרות מתוך שינון מעודדת את התלמידים להשתמש בהגיון שלהם במתמטיקה, ובכך תומכת בהתפתחות מושגית. מחקר בינלאומי מאשר שאוטומטיזציה מוקדמת של העובדות ופתרון בעיות אינם מטרות סותרות (Fuson, Stigler, and Bartsch 1988; Stigler, Lee, and Stevenson 1990). המחיר בזמן הוראה גם הוא נמוך: דחיית התרגול משמעותה לעיתים קרובות פחות תרגול. ההצלחה של ילדים בלימוד העובדות מרגיעה גם את ההורים בקשר לתוכנית הלימודים במתמטיקה של ילדיהם. יש להימנע ממלכודות מסוימות בגישה המבוססת על אסטרטגיות. סכנה אחת היא שילדים ילמדו את האסטרטגיות על ידי שינון, כך ששינון ללא מחשבה מוחלף ב"אסטרטגיות" שאף הן ללא מחשבה (Cobb 1985). אפשרות אחרת היא שהדיון הכיתתי עלול להידרדר לתיאור מייגע של כל שיטה שניתן להעלות על הדעת, עם הערכה ביקורתית מועטת של הגישות השונות. עידוד דרכים מרובות לפיתרון בעיות של עובדות עלול גם להביא את התלמידים אל המסקנה שלימוד בע"פ של העובדות אינו חשוב. אנו מאמינים, עם זאת, שבמרבית המצבים, מורה חושבת ורגישה יכולה להימנע מסכנות אלו.

המטרה שלנו היתה להתייחס לשאלות חשובות אודות עובדות היסוד, מחשש שהזנחה שלהם תחת תחת הרפורמות שבדרך. אנו חוששים שהמאמצים של הרפורמה לתקן את המיקוד הצר על מיומנויות ברמה-נמוכה עלול להוביל לתיקון יתר. אנו זוכרים את ההזרה של Brownell בתחילת העידן של ה-New Math: "בהתנגדותנו לדגש על תרגול שהיה שכיח לפני זמן לא רב, יתכן שנכשלנו בהדגשה שלאומן לצורך שליטה במיומנויות יש גם מקום" (1956). אנו חייבים לזכור שחינוך מוצלח כרוך הן במיומנויות בסיסיות והן בתהליכים ברמה גבוהה.

ביבליוגרפיה

- Anderson, John R., Lynne M. Reder, and Herbert A. Simon. "Situated Learning and Education." *Educational Researcher* 25 (May 1996): 5-11.
- Baroody, Arthur J. and Herbert P. Ginsburg. "The Relationship between Initial Meaning and Mechanical Knowledge of Arithmetic." *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*, edited by James Hiebert, Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, 1986.
- Bergeron, Jacques C., and Nicolas Herscovics. "Psychological Aspects of Learning Early Arithmetic." In *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, edited by Pearla Nesher and Jeremy Kilpatrick. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- Brownell, William A. "Meaning and Skill - Maintaining the Balance." *Arithmetic Teacher* 3 (October 1956): 129-36. Reprinted in *Arithmetic Teacher* 34 (April 1987): 18-25.
- Brownell, William A., and Charlotte B. Chazal. "The Effects of Premature Drill in Third-Grade Arithmetic." *Journal of Educational Research* 29 (September 1935):17-28.
- Burns, Marilyn. "In My Opinion: Timed Tests." *Teaching Children Mathematics* 1 (March 1995): 408-9.
- Carpenter, Thomas P., and James M. Moser. "The Acquisition of Addition and Subtraction Concepts in Grades One through Three." *Journal for Research in Mathematics Education* 15 (May 1984):179-202.
- Carpenter, Thomas P., Ellen Ansell, Megan L. Franke, Elizabeth Fennema, and Linda Weisbeck. "Models of Problem Solving: A Study of Kindergarten Children's Problem-Solving Processes." *Journal for Research in Mathematics Education* 24 (November 1993): 428-41.
- Chambers, Donald L. "Direct Modeling and Invented Procedures: Building on Children's Informal Strategies." *Teaching Children Mathematics* 3 (October 1996): 92-95.
- Chase, William G., and Michelene T.H. Chi. "Cognitive Skill: Implications for Spatial Skill in Large-Scale Environments." in *Cognition, Social Behavior, and the Environment*, edited by John H. Harvey. Hillsdale, N.j.: Lawrence Erlbaum Associates, 1981.
- Cobb, Paul. "Critique: A Reaction to Three Early Number Papers." *Journal for Research in Mathematics Education* 16 (March 1985): 141-45.
- Cook, Cathy J., and John A. Dossey. "Basic Fact Thinking Strategies for Multiplication-Revisited." *Journal for Research in Mathematics Education* 13 (May 1982): 163-71.
- Fuson, Karen C., James W. Stigler, and Karen Bartsch. "Grade Placement of Addition and Subtraction Topics in Japan, Mainland China, the Soviet Union, Taiwan, and the United States." *Journal for Research in Mathematics Education* 19 (November 1988): 449-56.
- Myren, Christina L. "Encouraging Young Children to Solve Problems Independently." *Teaching Children Mathematics* 3 (October 1996): 72-76.

- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: NCTM, 1989.
- _____. *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston, Va.: NCTM, 1991.
- _____. *Assessment Standards for School Mathematics*. Reston, VA.; NBTM, 1995.
- Rathmell, Edward C. "Using Thinking Strategies to Teach the Basic Facts." In *Developing Computational Skills*. 1978 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, edited by Marilyn N. Suydam and Robert E. Reys, 13-38. Reston, Va.: NCTM, 1978.
- Resnick, Lauren B. "A Developmental Theory of Number Understanding." In *The Development of Mathematical Thinking*, edited by Herbert P. Ginsburg. New York: Academic Press, 1983.
- Resnick, Lauren B., Sharon Lesgold, and Victoria Bill. "From Protoquantities to Number Sense." Paper presented at the Psychology of Mathematics Education Conference, Mexico City, 1990.
- Siegler, Robert S. "Individual Differences in Strategy Choices: Good Students, Not-So-Good Students, and Perfectionists." *Child Development* 59 (August 1988): 833-51.
- Siegler, Robert S., and Eric Jenkins. *How Children Discover New Strategies*. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, 1989.
- Steinberg, Ruth M. "Instruction on Derived Facts Strategies in Addition and Subtraction." *Journal for Research in Mathematics Education* 16 (November 1985), 337-55.
- Stigler, James W., Shin-Ying Lee, and Harold W. Stevenson. *Mathematical Knowledge: Mathematical Knowledge of Chinese, Japanese, and American Elementary School Children*. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 1990.
- Thompson, Charles S., and John Van de Walle. "Let's Do It: Modeling Subtraction Situations." *Arithmetic Teacher* 32 (October 1984): 8-12.
- Thornton, Carol A. "Emphasizing Thinking Strategies in Basic Fact Instruction." *Journal for Research in Mathematics Education* 9 (May 1978): 214-27.
- _____. "Strategies for the Basic Facts." In *Mathematics for the Young Child*, edited by Joseph N. Payne. 133-51. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 1990.
- Thornton, Carol A., and Paula J. Smith. "Action Research: Strategies for Learning Subtraction Facts." *Arithmetic Teacher* 35 (April 1988): 8-12.
- Van de Walle, John. *Elementary School Mathematics: Teaching Developmentally*. White Plains, N.Y.: Longman, 1994.