ערך המקום כמפתח להוראת פעולות במספרים עשרוניים

Place Value as the Key to Teaching Decimal Operations

מאת: Judith Sowder

הופיע ב: Teaching Children Mathematics, Vol. 3 , No. 8 , April 1997, pp. 448-453

תרגום: ברכה סגליס

לפני מספר שנים בדקתי את ההבנה של תלמידים בחטיבת הביניים בנושא מספרים (Threadgill-Sowder, 1984). התשובות שהתלמידים נתנו לי במהלך אותו מחקר הראו לי שההבנה שלהם, שהתפתחה בעיקר באמצעות התנסויותיהם בכיתות היסוד, היתה מעורפלת, והובילה אותי ליטול על עצמי עשר שנים של מחקר על תובנת המספר של ילדים בכיתות היסוד ובחטיבות הביניים. אפתח מאמר זה בהצגת שתיים מתוך השאלות שנתתי לתלמידים באותו מחקר וכמה מן התגובות שקיבלתי.

שאלה 1

מהו בערך הסכום של 148.72 ו - 51.351 ?

תלמיד אחד אמר: "מאתיים נקודה אחד אפס אפס. מפני שהסכום של 72 ו- 35 זה בערך 100, ו- 148 ועוד 51 זה בערך 200." (הערה: השתמשתי במילים להצגת ספרות במקומות בהם יש בלבול באופן שבו התלמידים קוראים את המספרים). תלמיד אחר אמר: "מאה וחמישים נקודה ארבע שבע אפס, משום שמאה ארבעים ושמונה נקודה שבע שתיים מעגלים למאה נקודה שבע, וחמישים ואחד נקודה שלוש חמש אחד מעגלים לחמישים נקודה ארבע אפס אפס. ואז מחברים אותם." פחות ממחצית התלמידים נתנו את המספר 200 כאומדן של סכום זה. האחרים ראו את המספר העשרוני כשני מספרים המופרדים באמצעות נקודה וחשבו שהכללים לעיגול מספרים לא ניתנים להגמשה.

שאלה 2

כמה זה בערך 789×0.52 ?

אחת התגובות היתה: "789, אני עיגלתי את אפס נקודה חמש שתיים למעלה ל- 1 וכפלתי". תלמיד שני אמר: "אפס. זה (789) מספר שלם, וזה (0.52) לא מספר שלם. זה (0.52) מספר, אבל הוא מאוד קטן. מעגלים את 789 ל- 800, כפול אפס זה אפס." רק 19 אחוז מן התלמידים עיגלו את 0.52 ל- 0.5 או 1/2 או 50 אחוז. אחדים מהם אמרו שאי אפשר לענות על שאלה זו ללא נייר ועיפרון וסרבו להמשיך. למרבית התלמידים היה מושג מועט על הגודל של שבר עשרוני והם יישמו את כללי העיגול המקובלים שלא התאימו לאומדן זה.

אחרים שחקרו את ההבנה של ילדים בבית הספר היסודי בנושא מספרים עשרוניים, מצאו שכאשר תלמידים נתקלים במספרים עשרוניים, רבים מהם מבולבלים לגבי המשמעות של הסמלים. במחקר של תלמידי כיתות ד' עד ז' שנערך על ידי Sackur-Grisvard, and Leonard (1985), ילדים המציאו שני

״כללים״ לעזור להם להשוות מספרים עשרוניים (עמ׳ 161). כללים אלו עבדו טוב מספיק פעמים כך שהתלמידים לא יבחינו שהם בעצם שגויים. (אני מניחה שמורים רבים יזהו אותם).

כלל 1: בחר כקטן יותר את המספר שבו החלק העשרוני, כמספר שלם, קטן יותר. (לדוגמה: 12.4 קטן יותר מ- 12.17, משום ש- 4 קטן יותר מ- 17.)

כלל 2: בחר כקטן יותר את המספר שבו לחלק העשרוני יש יותר ספרות (לדוגמא: 12.94 ו- 12.24 קטנים יותר מ- 12.7, משום שבכל אחד מהם יש שתי ספרות ואילו ב- 12.7 יש רק ספרה אחת).

מחקרים עדכניים יותר על הבנה של מספרים עשרוניים מאשרים שלתלמידים רבים יש הבנה חלשה של מספרים עשרוניים. סיכום של עבודה זו, ניתן לראות אצל Hiebert (1992). התלמידים במחקרים אלו היו בעיקר מכיתות בהם ההקדמה למספרים עשרוניים היתה קצרה, על מנת שיישאר מספיק זמן לעבודה היותר קשה של לימוד האלגוריתמים לביצוע פעולות על מספרים עשרוניים. אבל זמן שמוקדש לפיתוח ההבנה של תלמידים את הסימון העשרוני, אינו זמן מבוזבז. מורים עימם עבדתי טוענים שנדרש פחות זמן בהמשך לפעולות על מספרים עשרוניים, אם התלמידים קודם מבינים את הסימון העשרוני ואת מקורו במערכת העשורית המבוססת על ערך המקום שבה אנו משתמשים. בהמשך מאמר זה אדון בסימון העשרוני וכיצד אנו יכולים לעזור לתלמידים לבנות משמעות למספר העשרוני.

מתן משמעות לסמלים העשרוניים

השיטה של המספרים העשרוניים הינה הרחבה של השיטה של המספרים השלמים, ובהיותה כזו, היא מכילה את קבוצת המספרים השלמים. למען הנוחיות, מאמר זה מתייחס למספרים עשרוניים כאל מספרים שספרותיהם מכילות נקודה עשרונית.

מספרים עשרוניים, כמו מספרים שלמים, מיוצגים בסמלים בשיטה של ערך מקום. ההוראה של ערך המקום באופן מסורתי מסתפקת במיקום של הספרות. כך, מלמדים ילדים שה- 7 ב- 7200 הוא במקום של האלפים, ה- 2 הוא במקום של המאות, במקום של העשרות יש 0, ובמקום של היחידות יש 0. אבל אם שואלים ילדים כמה שטרות של $100 ניתן לקבל מחשבון בנק שמכיל $7200, או כמה קופסאות של 10 כדורי גולף ניתן לארוז בארגז שיכול להכיל 7200 כדורים, הם כמעט תמיד יעשו חילוק ארוך, כשהם מחלקים ב- 100 או ב-10. הם לא קוראים את המספרים כ- 7200 יחידות, או 720 עשרות, או 72 מאות, ובודאי שלא כ- 7.2 אלפים. אבל מדוע לא? שמות אלו מייצגים אותו מספר, והיכולת לשיים מחדש בדרך זו מספקת מידה רבה של גמישות ותובנה כאשר עובדים עם מספרים. (מעניין שמאוחר יותר אנו מצפים מתלמידים להבין מספרים כמו 3.2 בליון דולר, המופיעים בעיתונים).

לכן, לפני שאנחנו מתחילים ללמד על מספרים עשרוניים, אנו צריכים ללמד יותר על ערך המקום כפי שמשתמשים בו במספרים שלמים, על ידי כך שנשאל שאלות כמו שאלת הבנק ושאלת כדורי הגולף, ועלינו לתרגל קריאת מספרים בדרכים שונות. בעיות הדורשות עבודה עם חזקות וכפולות של 10, הן בחישובים בע״פ והן בחישובים על הנייר, מעניקות לתלמידים גמישות המסייעת להם במספרים שלמים, וגמישות זו מקלה על הרחבת ההוראה למספרים עשרוניים.

נושא השיום של המספרים העשרוניים דורש התייחסות מיוחדת. השם של 0.642 מבחינת ערך המקום הוא שש מאות ארבעים ושתים **אלפיות**. השווה צורה זו עם 642 שבה אנו פשוט אומרים שש מאות

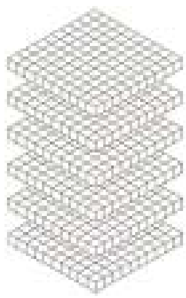
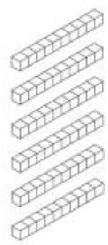
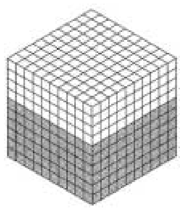
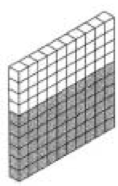
ארבעים ושתים, לא 642 **יחידות**. מקור זה לבלבול מתערבב גם עם השימוש בסיומת **יות** (עשיר**יות**, מא**יות**, אלפ**יות**) במספרים עשרוניים, והשימוש בסיומת **ות** (עשר**ות**, מא**ות**) במספרים שלמים. הספרות הנוספות במספרים השלמים בעלי שם דומה הינו מקור נוסף לבלבול. בעוד ש- 0.642 נקרא 642 **אלפיות**, הרי ש- 642000 נקרא 642 **אלפים**, שמשמעותו 642 אלפים של **יחידות**.

איור 1: אחד כנקודת המוקד של המערכת העשרונית

1	2	3	4 .	5	6	7
אלפים						אלפיות
	מאות				מאיות	
		עשרות		עשיריות		
			יחידות			

במספר המכיל נקודה עשרונית, מקום היחידות, לא הנקודה העשרונית, הוא נקודת המוקד של המספר, כפי שניתן לראות ב**איור 1**. הנקודה העשרונית מזהה היכן נמצא מקומן של היחידות, או היחידות; זהו המקום הראשון משמאל לנקודה העשרונית. הנקודה העשרונית, אומרת לנו גם שמצד ימין יחידה אחת מתחלקת לעשיריות, מאיות, אלפיות וכן הלאה. כך שלמעשה, 0.642 זה 642 אלפיות של 1. במילים אחרות, 0.6 הוא שש-עשיריות של 1, בעוד ש- 6 הוא 6 יחידות ו- 60 הוא 6 עשרות, או 60 יחידות. אבל כמו ש- 0.6 הוא שש-עשיריות של 1, 6 הוא שש-עשיריות של 10, 60 הוא שש-עשיריות של 100 וכן הלאה. יחסים אלו נראים יותר בברור בייצוגים של בדידי-בסיס-עשר המופיעים ב**איור 2**.
באופן דומה, אם מתחילים מהמספרים הקטנים יותר, 0.006 זה שש-עשיריות של 0.01, בעוד ש- 0.06 זה שש-עשיריות של 0.1.

איור 2: שמות מספר וייצוגים חלופיים כאשר המקל מייצג יחידה אחת

מספר	**60**	**6**	**0.6**
שם מספר לפי בסיס-עשר	שש עשרות	שש יחידות	שש עשיריות
ייצוג של בדידי בסיס-עשר			
ייצוג חלופי של בדידי בסיס-עשר			
שם חלופי לפי בסיס-עשר	שש-עשיריות של 100	שש-עשיריות של 10	שש-עשיריות של 1

כשזזים בכיוון השני, 6000 זה 60 מאות, 600 זה 60 עשרות, 60 זה 60 יחידות, 6 זה 60 עשיריות, 0.6 זה 60 מאיות, 0.06 זה 60 אלפיות וכן הלאה. למרות שמוסכמה זו נראית בהתחלה מבלבלת, הבלבול פוחת ככל שמתרגלים זאת. נושאים אלו נדונים בצורה מלאה יותר ב- Sowder (1995).

תלמידים שמנסים למצוא את ההיגיון שבמתמטיקה צריכים להיות מאוד מבולבלים כשאומרים להם "הוסיפו אפסים כדי שלמספרים יהיה אותו אורך" בשעה שהם מתבקשים להשוות מספרים כמו 0.45 ו- 0.6. אסטרטגיה זו אינה מפתחת שום תובנה על גודל המספר למספרים עשרוניים. במקום להוסיף אפסים, מתאים יותר לצפות מן התלמידים לזהות ששם אחר ל- 6 עשיריות הוא 60 מאיות, וזה יותר מ- 45 מאיות, או שב- 45 מאיות יש רק 4 עשיריות, ומה שנשאר זה פחות מעוד עשירית, ולכן זה חייב להיות פחות מ- 6 עשיריות. תלמידים אכן חושבים באופן כזה בבואם להשוות מספרים עשרוניים, אם ניתנו להם מספיק הזדמנויות לחקור ולחשוב על ערך המקום, תוך שימוש באמצעי המחשה כייצוגים של המספרים. Heibert (1992) דן במחקרים המראים שאם לתלמידים אין הבנה עמוקה של ערך המקום כאשר הם לומדים לחבר ולחסר מספרים עשרוניים, הם עושים שגיאות רבות שמאוד קשה לשרש, משום שהם לא רוצים ללמוד מחדש איך לפעול במספרים עשרוניים בדרך משמעותית.

יחידת הוראה על מספרים עשרוניים

היחידה המסוכמת כאן פותחת עבור מחקר (Markovits and Sowder 1994) וכתוצאה ממנה תלמידים בצעו טוב יותר משימות עשרוניות שהופיעו אחרי זה בספר הלימוד שלהם. יחידה זו שימשה גם מורים שביקשו ממני להציע להם דרך ללמד מספרים עשרוניים בצורה משמעותית. מורים אלו אמרו לי, לאחר מכן, שהם חושבים שלתלמידים שסיימו יחידת הוראה זו, היתה תפיסה טובה יותר של מספרים עשרוניים, לעומת תלמידים שלהם בשנים הקודמות.

השיעורים הראשונים מתמקדים על ביסוס ההיכרות עם חומרי ההמחשה של בסיס-עשר, הניתנים להזמנה ממרבית הקטלוגים לעזרי למידה מתמטיים. החומרים כוללים קוביות קטנות בנפח של סנטימטר מעוקב, מקלות ארוכים המסומנים כך שיראו כאילו הדביקו בשורה עשר קוביות בודדות, משטחים המסומנים כך שיראו כאילו הדביקו ביחד עשרה מקלות למשטח של עשר-על-עשר, וקוביות גדולות המסומנות כך שיראו כאילו הדביקו ביחד עשרה משטחים ליצירת קוביה של עשר-על-עשר-על-עשר. שימו לב, שאנו לא מכנים את הקוביה הקטנה ביותר בשם יחידה, כפי שנהוג בדרך כלל, משום שבהוראה זו אנו משנים את שמה של היחידה כך שבדידים אחרים יכולים לייצג אחד, כלומר, יחידה אחת.

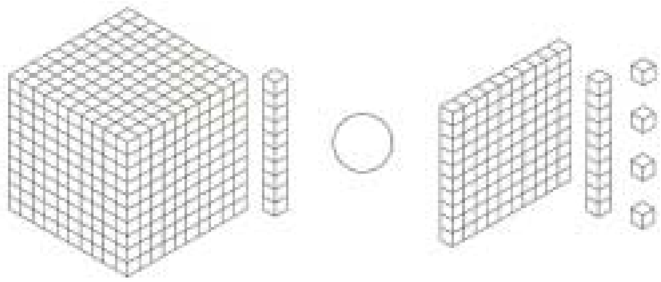
תלמידים צריכים לשחק עם הבדידים וללמוד על היחסים ביניהם כדי לענות על שאלות מן הסוג הבא :

- כמה מקלות יש במשטח?
- כמה קוביות קטנות יש ב- 3 מקלות?
- היכן לדעתכם יהיו יותר מקלות, ב-3 משטחים או בקוביה אחת גדולה?
- יש לי 6 מקלות ו- 3 קוביות קטנות. כמה עלי להוסיף כדי לקבל משטח?
- מה גדול יותר, כלומר , יש בו יותר עץ, 1 קוביה גדולה או 10 משטחים? ארבע משטחים או 48 מקלות?

בשיעור הבא אנו מתחילים להשתמש בבדידים לייצג מספרים. הקוביות הקטנות משמשות לייצוג המספר 1. התלמידים אז נשאלים אילו מספרים מיוצגים על ידי קבוצות שונות של בדידים : שתי

קוביות גדולות, שלושה משטחים, ושתי קוביות קטנות; משטח אחד ושני מקלות; וכן הלאה. הם גם צריכים לייצג מספרים בעזרת הבדידים. לדוגמה, הם מראים את המספר 404 עם הבדידים. בשלב מאוחר יותר אפשר להשתמש בציורים דו-ממדיים במקום הבדידים, וציורים אלו יכולים לשמש במשימות עם בעיות כמו זו ב**איור 3**.

איור 3: החלפת הבדידים בציור דו-מימדי



שימו סימן < , > , או = בעיגול כדי להראות את ההשוואה בין שתי הקבוצות

אפשרות אחרת היא לבקש מן התלמידים להראות עם הבדידים מי גדול יותר: 99 או 111, איזה מן המספרים 204 ו- 258 קרוב יותר ל- 235, וכן הלאה. תלמידים צריכים להישאל שאלות המראות את המגבלות של ייצוג מספרים באמצעות בדידים כאשר הקוביה הקטנה מייצגת 1:

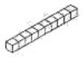
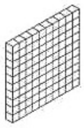
- האם תוכלו לייצג 46,321 באמצעות הבדידים שיש לכם? מדוע כן, מדוע לא?
- האם תוכלו לייצג 8 1/2 באמצעות הבדידים שיש לכם? מדוע כן, מדוע לא?

השעורים הבאים צריכים להתמקד על שינוי היחידה. תחילה, תנו למקל אחד לייצג את השלם, או יחידה אחת. אפשר לבקש אז מהתלמידים לייצג את המספר 76 (הם יעשו זאת באמצעות שבעה משטחים ושש מקלות). אחרי שאלות רבות כאלה, ניתן שוב לשאול אותם: "האם תוכלו לייצג 8 1/2 באמצעות הבדידים שיש לכם? מדוע כן, מדוע לא?" (כן, עם שמונה מקלות וחמש קוביות קטנות). כדאי אז לשאול מספר שאלות – כשנשארים במערכת המספרים השלמים – כאשר המשטח מייצג יחידה אחת.

יהיה זה טבעי להתחיל אז הוראה של מספרים עשרוניים. אם המשטח מייצג שלם אחד, אז מה מייצג מקל? ברור שזה פחות מ- 1. איזה חלק של 1 זה מייצג? מאחר שבמשטח יש עשרה מקלות, הרי שמקל אחד מייצג 0.1 . בעקבות זאת יש לשאול שאלות יחידות:

- איך תוכלו לייצג את 0.3? 4.3? (ראו **איור 4**).
- כמה עשיריות יש בארבעה שלמים?
- מה צריך להוסיף ל- 0.9 כדי לקבל שלם אחד?
- 4.5 זה ____ יחידות ו- ____ עשיריות, או ____ עשיריות.
- איזה מהמספרים הבאים שקול למשטח אחד וארבעה מקלות: 14? 1.4? 140? 14 מקלות? 41 מקלות? 41?

איור 4: ייצוג מספרים בעזרת בדידי בסיס-עשר

מלאו את התאים הריקים בספרה הקרובה או בתמונה של בדידי בסיס-עשר			
			
4.3	0.3		1

באופן דומה, ילדים יכולים להגיע להבנה שבדיד קטן מייצג בהקשר זה מאית, ושאלות רבות הדומות לשאלות הקודמות יכולות להישאל. מורים יכולים גם להציג בעיות כמו זו :

ב- 6.40 יש ____ עשרות , ____ יחידות, ____ עשיריות ו- ____ מאיות.

ב- 6.4 יש ____ עשרות , ____ יחידות, ____ עשיריות ו- ____ מאיות.

ב- 6.04 יש ____ עשרות , ____ יחידות, ____ עשיריות ו- ____ מאיות.

האם מספרים כלשהם מתוך אלה זהים? מדוע?

בכל אחד מהשעורים שתוארו כאן נדרש תרגול רב. השאלות שהוצגו הן רק מדגם קטן. נסו להשתמש בקובייה הגדולה לייצוג היחידה ועברו על כל התרגילים שוב, כשהפעם אתם מציגים את האלפית. בקשו מן התלמידים לתאר כיצד ניתן לחתוך את הבדידים כדי לייצג אחד חלקי עשרת אלפים ואחד חלקי מאה אלף. כאשר התלמידים מרגישים בטחון רב עם הבדידים , עם שינוי היחידה, ועם בעיות שיש בהן מספרים עשרוניים, זה הזמן לעבור לייצוג אחר. יום או יומיים של עיסוק בכסף – דולרים וסנטים – ישרת את המטרה. לבסוף, יש למקד שיעור אחד או שניים ישירות על מספרים עשרוניים ללא שימוש בייצוג מוחשי (למרות שתלמידים רבים יענו כמובן במונחים של "בדידים" או "עץ"). ניתן לשאול שאלות כאלה :

- האם 0.1 קרוב יותר ל- 0 או ל- 1?
- האם 1.72 קרוב יותר ל- 1 או ל- 2?
- אני מספר. אני גדול יותר מ- 0.5 וקטן יותר מ- 0.6 . מי אני?
- האם יש מספרים עשרוניים בין 0.3 ו- 0.4? כמה אתם חושבים שיש?
- האם יש מספרים עשרוניים בין 0.35 ו- 0.36? כמה?
- האם יש מספרים עשרוניים בין 0.357 ו- 0.358? כמה?

ציירו סלים ורשמו עליהם שמות "מספרים קטנים מ- 0.5", "מספרים גדולים מ- 0.5 אבל קטנים מ- 1", "מספרים בין 1 ל- 3", ו- "מספרים גדולים מ- 3". לאחר מכן תנו לתלמידים את המספרים הבאים ובקשו מהם להציב כל מספר בסל המתאים : 0 , 0.03 , 1.01 , 5.03 , 2.63 , 0.49 , 0.93 , 0.60 , 1.19 , וכן הלאה. בעיה מסוג כזה יכולה להיות קשה יותר אם השמות של הסלים הם : "מספרים בין 0.4 ל- 0.5", "מספרים בין 0.7 ל- 0.8", ו- "כל יתר המספרים".

אם רוצים, אפשר לקטוע את רצף השיעורים הזה לפני שמציגים את המספרים העשרוניים, ולהציג חיבור וחיסור במספרים שלמים תוך שימוש בבדידים. אבל כאשר מציגים חיבור וחיסור של מספרים עשרוניים, יש להעביר קודם מספר שיעורים עם הבדידים.
שתי השאלות שהופיעו בתחילת המאמר הן פשוטות עבור תלמידים שקיבלו את ההוראה הזאת. התלמידים רואים את חלק המספר שמימין לנקודה העשרונית כהרחבה טבעית של שיטת ערך המקום, והם מטפלים במספר כולו ככמות אחת. תלמידים כאלה מפתחים גם תחושה טובה לגודל של מספרים עשרוניים ויכולים להשוות אותם זה לזה. לא עלה על דעתו של אף תלמיד שקיבל הוראה זו לעגל 0.52 ל-0 או ל- 1 כשנתבקש לאמוד את התוצאה - 0.52 היה פשוט "בערך חצי".
כאשר תלמידים מבינים מה שהם עושים,הם נוטים ליהנות מן העשייה המתמטית. הזמן הנדרש לבנות יסודות מוצקים משתלם. זמן זה יפוצה בקלות בשעורים הבאים, ויש סבירות גבוהה יותר שהתלמידים יצליחו.

רעיונות למחקר פעולה

1. עבור כל אחד מזוגות המספרים העשרוניים, בקשו מן התלמידים להגיד מי יותר קטן. לאחר מכן נתחו את התוצאות שלהם כדי לראות מי מהם פועל באופן שגוי לפי כלל 1 או לפי כלל 2, הכללים אשר זוהו במחקר של Sackur-Grisvard, and Leonard (1985).

זוג המספרים	שימוש בכלל 1	שימוש בכלל 2	תשובה נכונה
3.17 או 3.4	3.4	3.17	3.17
14.285 או 14.19	14.19	14.285	14.19
6.43 או 6.721	6.43	6.721	6.43
11.01 או 11.002	11.01	11.002	11.002
9.642 או 9.99	9.99	9.642	9.642
15.134 או 15.12	15.12	15.134	15.12
156.1 או 156.012	156.1	156.012	156.012

אם אתם מוצאים עדויות לשגיאות עקביות על פי כלל 1 או כלל 2, השתמשו בכמה מן הרעיונות להוראה שבמאמר זה, ואז העריכו מחדש את תלמידיכם כדי לקבוע האם ההבנה שלהם על ערך המקום השתפרה. בנוסף לשגיאות מסוג כלל 1 וכלל 2 חפשו עוד שגיאות עקביות שתלמידים עושים. מהן ההבנות השגויות שבבסיס שגיאות אלו?

2. העריכו את ההבנה של תלמידיכם על ערך המקום על ידי שאילת שאלות כמו אלה:

א. החברה לייצור ממתקים שמה 10 עוגיות פקאן בכל קופסה שהיא מוכרת. הטבח סיים כעת להכין 262 עוגיות. כמה קופסאות אפשר למלא בעוגיות הטריות?

ב. בבנק יש $2148, המיועדים לחלוקת פרסים ביריד המדע העירוני. אם כל פרס הוא $100, כמה פרסים ניתן לחלק?

תלמידים עם הבנה טובה של ערך המקום לא יצטרכו לעשות חילוק. מספר תלמידים עשויים לפתור בעיות אלו על ידי חילוק. אחדים אולי לא יפתרו אותם בכלל. בכל מקרה נסו מספרים כמו 260 או $2100 כדי לראות אם מספרים קלים יותר מאפשרים להם להשתמש בידע המוגבל יותר שלהם על ערך המקום. אם אתם מוצאים תלמידים אחדים העושים מספר גדול של שגיאות, השתמשו בכמה מן הרעיונות להוראה שבמאמר זה. לאחר מכן העריכו אותם מחדש תוך שימוש בשאלות דומות כדי לקבוע האם הידע שלהם על ערך המקום השתפר.

ביבליוגרפיה

Hiebert, James. "Mathematical, Cognitive, and Instructional Analyses of Decimal Fractions." In *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching*, edited by Gaea Leinhardt, Ralph Putnam, and Rosemary A. Hattrup, pp. 283-322. Hillside, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, 1992.

Markovits, Zvia, and Judith T. Sowder. "Developing Number Sense: An Intervention Study in Grade 7." *Journal for research in Mathematics Education* 25 (January 1994): 4-29.

Sackur-Grisvard, Catherine, and Francois Leonard. "Intermediate Cognitive Organizations in the Process of Learning a Mathematical Concept: The Order of Positive Decimal Numbers." *Cognition and Instruction* 2 (1985): 157-74.

Sowder, Judith T. "Instructing for Rational Number Sense." In *Providing a Foundation for Teaching Mathematics in the Middle Grades*, edited by Judith T. Sowder and Bonnie P. Schappelle, pp. 15-29, Albany, N.Y.: SUNY Press, 1995.

Threadgill-Sowder, J. "Computational Estimation Procedures of School Children." *Journal of Educational Research* 77 (July-August 1984): 332-36.