פיתוח חשיבה גיאומטרית על ידי פעילויות המתחילות במשחק

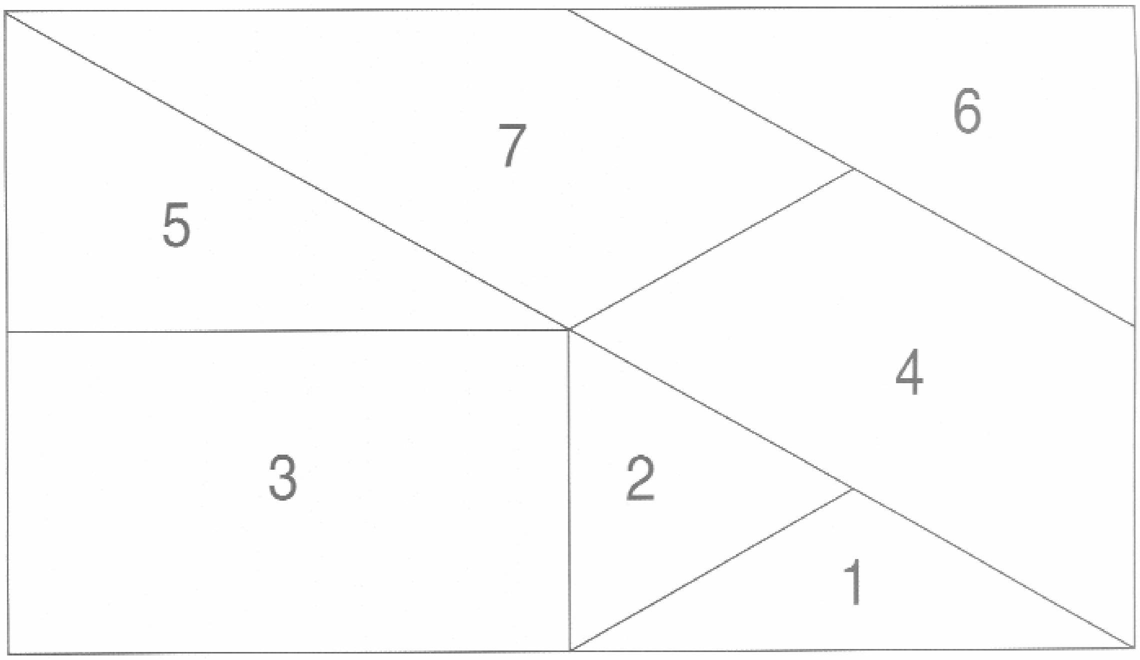
Developing Geometric Thinking through Activities That Begin with Play

נכתב ע"י: Pierre M.Van Hiele

הופיע ב: Teaching Children Mathematics,Vol. 5, No. 6, February 1999, pp. 310-316

תרגום: מיכל סוקניק

עבור ילדים, גיאומטריה מתחילה במשחק. הוראה עשירה ומאתגרת בגיאומטריה יכולה להתבצע על ידי פעילויות משחקיות עם פסיפסים, כגון צורות הנדסיות, עם חידות כגון טנגרם, או עם פסיפס מיוחד בעל שבעה חלקים, המופיע בציור 1.



ציור 1: חידת הפסיפס בעל שבעה חלקים – בנו לכם סט כזה לשימוש במהלך קריאת המאמר

מורים ישאלו, כיצד ילדים משתמשים בפסיפסים, ואיזו גיאומטריה הם לומדים? לפני התייחסות לשאלות אלה, ולחקירת הפוטנציאל של חידת הפסיפס להוראת גיאומטריה, אציין כמה תפיסות שגויות לגבי הוראת המתמטיקה, ואציג כמה מרעיונותי לגבי רמות חשיבה בגיאומטריה.

1

אי הבנות בהוראת מתמטיקה

היוותה מקור לאי הבנות רבות. גיאומטריה של – גיאומטריה ואריתמטיקה –הוראת מתמטיקה של בית הספר בית הספר העל יסודי התבססה במשך זמן רב על גיאומטריה אקסיומטית פורמלית, שאותה יצר אוקלידס לפני למעלה מ- 2000 שנה. בנייתו הלוגית את הגיאומטריה, עם האקסיומות, ההגדרות, המשפטים וההוכחות שלה, היתה, בזמנו, הישג מדעי ראוי להערצה. הגיאומטריה של בית הספר, המוצגת בצורה אקסיומטית דומה, מניחה שתלמידים חושבים ברמה פורמלית-דדוקטיבית. אולם בדרך כלל אין זה המצב, וחסרות להם הבנות מוקדמות הכרחיות לגבי גיאומטריה. מחסור זה יוצר פער בין רמת החשיבה שלהם לבין זו הנדרשת לצורך הגיאומטריה שמצופה מהם ללמוד.

אי-הבנה דומה נצפית בהוראת החשבון בבית הספר היסודי. כפי שנעשה בגיאומטריה על ידי אוקלידס, מתמטיקאים פיתחו מבנים אקסיומטיים באריתמטיקה, אשר מאוחר יותר השפיעו על האריתמטיקה הנלמדת בבתי ספר. בשנות ה- 50 פיאז׳ה ואני נקטנו עמדה כנגד אי הבנה זאת, אולם הדבר לא הועיל, משום שבדיוק אז תורת הקבוצות נוסדה כבסיס למספר, ואריתמטיקה של בית הספר המבוססת על קבוצות, יושמה בעולם כולו במסגרת מה שנהגו לכנות ״המתמטיקה החדשה״. במשך שנים אחדות שלטה תפיסה שגויה זו במתמטיקה של בית הספר, וסיומה הגיע רק לאחר שדווחו תוצאות שליליות. נקודת השקפתו של פיאז׳ה, בה אני תומך מכל הלב, היתה ש״מוטב לא לתת חינוך כלל, מאשר לתת אותו בזמן הלא נכון״. אנו חייבים לתת הוראה המתאימה לרמת החשיבה של הילדים.

רמות של חשיבה גיאומטרית

באיזו רמה צריך להתחיל ללמד? התשובה לשאלה זו תלויה, כמובן, ברמת החשיבה של התלמידים. כדי להסביר למה כוונתי במושג ״רמות חשיבה״ , אשתף אתכם תחילה בשיחה שהתקיימה בין שתי בנותיי, שהיו אז בנות שמונה ותשע, בנוגע לחשיבה. שאלתם היתה: אם את ערה, האם את עסוקה בחשיבה? ״לא״, אמרה האחת. ״אני יכולה ללכת ביער ולראות את העצים ואת כל שאר הדברים היפים, אבל אני לא חושבת שאני רואה את העצים. אני רואה שרכים, ואני רואה אותם מבלי לחשוב״. השנייה אמרה: ״אם כך, אז את כן חשבת, או שידעת שהיית ביער ושראית עצים, אבל את רק לא השתמשת במילים״.

התייחסתי ברצינות לחילוקי דעות אלה, ושאלתי לדעתו של הנס פרודנטל, מתמטיקאי ומחנך הולנדי ידוע. מסקנתו היתה ברורה: חשיבה ללא מילים אינה חשיבה. בספר Structure and Insight (ואן הילה, 1986), ביטאתי את נקודת ההשקפה הזו, ופסיכולוגים בארצות הברית לא אהבו אותה. הם צדקו: אם חשיבה לא –מילולית אינה שייכת לחשיבה האמיתית, אזי אפילו אם אנו ערים, איננו חושבים רוב הזמן.

חשיבה לא-מילולית הינה בעלת חשיבות מיוחדת. לכל חשיבה רציונלית יש שורשים בחשיבה לא-מילולית והחלטות רבות מתקבלות רק באמצעות סוג זה של חשיבה. אנו צופים בדברים מסוימים, מבלי שתהיינה לנו מילים עבורם. אנו מזהים את הפרצופים של אנשים מוכרים, מבלי שנהיה מסוגלים להשתמש במילים כדי לתאר את פרצופיהם. ברמות החשיבה הגיאומטרית שלי, הרמה ה״נמוכה״ ביותר היא **הרמה הוויזואלית**, המתחילה בחשיבה לא-מילולית. ברמת החשיבה הוויזואלית, שופטים צורות על פי המראה שלהן. אנו אומרים: ״זהו ריבוע. אני יודע שזה ריבוע, כי אני רואה זאת״. ילדים עשויים לומר: ״זהו מלבן כי הוא נראה כמו קופסה״.

ברמה הבאה, **הרמה התיאורית**, צורות הן הנושאות (bearers) של תכונותיהן. צורה איננה עוד נשפטת משום ש"היא נראית כזו", אלא משום שיש לה תכונות מסוימות. לדוגמה: למשולש שווה צלעות יש תכונות כמו: שלוש צלעות, כל הצלעות שוות, שלוש זוויות שוות וסימטריה של שיקוף ושל סיבוב. בשלב זה, השפה חשובה לתיאור צורות. אולם ברמה התיאורית, התכונות עדיין אינן מסודרות באופן לוגי, לפיכך משולש בעל צלעות שוות אינו בהכרח בעל זוויות שוות.

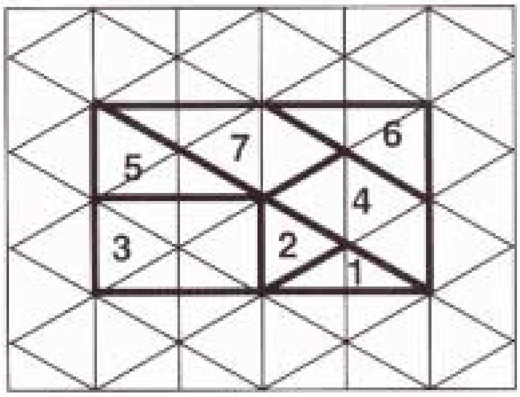
ברמה הבאה, **רמת הדדוקציה הבלתי-פורמלית**, התכונות מסודרות באופן לוגי. הן נובעות אחת מהשנייה. תכונה אחת קודמת לתכונה אחרת או נובעת ממנה. התלמידים משתמשים בתכונות שאותן הם כבר מכירים על מנת לנסח הגדרות, למשל, עבור ריבועים, מלבנים ומשולשים שווי צלעות, ומשתמשים בהן כדי להצדיק יחסים, כמו הסבר מדוע כל הריבועים הם מלבנים או מדוע סכום מדידות הזווית של הזוויות של כל משולש חייב להיות 180. אולם בשלב זה, המשמעות המהותית של הדדוקציה – כלומר תפקיד האקסיומות, הגדרות, משפטים ומשפטים הפוכים - אינה מובנת. הניסיון שלי כמורה לגיאומטריה משכנע אותי שלעיתים קרובות מדי, התלמידים עדיין לא הגיעו לרמה זו של דדוקציה בלתי-פורמלית. כתוצאה מכך, הם אינם מצליחים בלימוד סוג הגיאומטריה שיצר אוקלידס, הכרוך בדדוקציה פורמלית. [ראה Fuys, Gedds, and Tischler (1988), ו- van Hiele (1997) לאינפורמציה נוספת לגבי הרמות].

כיצד תלמידים מפתחים חשיבה כזו? אני מאמין שההתפתחות תלויה יותר בהוראה מאשר בגיל או בבשלות הביולוגית, ושסוגים של התנסויות של הוראה יכולים לקדם התפתחות או לעכבה. כפי שאדון בסוף מאמר זה, הוראה המכוונת לקדם התפתחות מרמה אחת לבאה אחריה, צריכה לכלול רצפים של פעילויות, החל בשלב חקירתי, תוך בנייה הדרגתית של מושגים ושפה מתאימה, וכלה בפעילויות סיכום המסייעות לתלמידים לשלב מה שלמדו עם מה שהם כבר יודעים. הפעילויות הבאות מדגימות סוג כזה של רצף, עבור פיתוח חשיבה ברמה הוויזואלית ותמיכה במעבר לרמה התיאורית.

תחילת הגיאומטריה וחידת הפסיפס

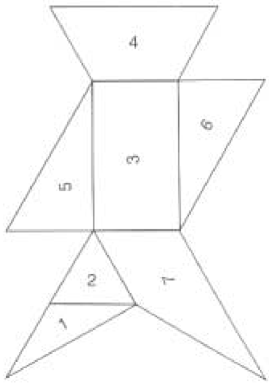
הצטרפו אלי עתה, לשימוש בפסיפס בעל שבעת החלקים (ראו ציור 1) בחקירות משעשעות העוסקות בצורות מסוימות ותכונותיהן, סימטרייה, מקבילות ושטח. לפני שתמשיכו לקרוא, אנא הכינו את אוסף החלקים שלכם לשימוש בפעילויות, שיכולות להיות מותאמות לילדים, תלוי בהתנסויות הגיאומטריות הקודמות שלהם. ניתן לצלם את ציור 1 על קרטון על מנת ליצור מארזים עמידים עבורכם ועבור תלמידיכם. את החלקים יש למספר על צידם העליון, לצורך ההוראות והדיונים בפעילויות.

דמיינו לעצמכם שהמלבן הגדול בציור 1 נשבר לשבע חתיכות: משולש שווה-שוקיים (חלק 1), משולש שווה-צלעות (חלק 2), שני משולשים ישרי-זווית (חלקים 5 ו-6) ושלושה מרובעים הכוללים מלבן (חלק 3), טרפז (חלק 7) וטרפז שווה-שוקיים (חלק 4). ציור 2 מראה כיצד המלבן הגדול וחלקיו מתאימים לרשת של משולשים שווי-צלעות.

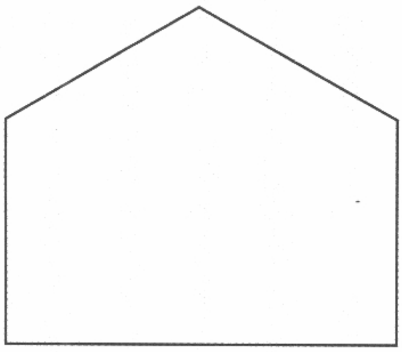


ציור 2: רשת של משולשים שווי-צלעות

נתחיל בשאלה מה ניתן לעשות עם חלקים אלה? ילדים עונים לשאלה פתוחה זו על ידי שימוש בדמיונם ומשחק בחלקים, כדי ליצור כרצונם – לעיתים אובייקטים מחיי היומיום כמו בן-אדם (ראו ציור 3) או בית (ראו ציור 4); לעיתים צורות אחרות, כמו חלק 3, או דוגמאות מופשטות. יש לתת לילדים הזדמנות מספקת למשחק חופשי ולשיתוף של יצירותיהם. משחק כזה נותן למורה הזדמנות לצפות כיצד הילדים משתמשים בחלקים ולהעריך באופן בלתי פורמלי כיצד הם חושבים ומדברים על הצורות.



ציור 3: בן אדם



ציור 4: בית

במסגרת משחק חופשי יתכן שילדים יחברו שני חלקים כדי ליצור חלק אחר, לדוגמה: ישתמשו בחלקים 5 ו-6 כדי ליצור את חלק 3. אפשר לבקש מהם למצוא את כל החלקים שיכולים להיווצר משני חלקים אחרים. רק החלקים 1 ו-2 אינם יכולים. נסו פעילות זו, ואחר כך מיצאו את החלק היחיד שיכול להיווצר משלושה חלקים אחרים. ילדים יכולים להניח את החלקים ישירות מעל לחלק שאותו הם רוצים ליצור, או לבנות זאת לצד החלק, לצורך השוואה ויזואלית פשוטה. כדי לתעד את פתרונותיהם, על הילדים לצייר קו מסביב לחלק, ואחר כך לשרטט כיצד הם יצרו אותו עם החלקים האחרים, או להראות את שיטתם בטושים צבעוניים על רשת של משולשים.
פעילות זו מובילה את הילדים לשים לב לכך שחיבור שני חלקים יוצר לעיתים צורה שאינה זהה לאחד משבעת החלקים המקוריים. הם יכולים לחקור כמה צורות שונות ניתן ליצור עם שני חלקים, כשמצמידים אותם על ידי צלעות מתאימות. עם חלקים 5 ו-6 אפשר ליצור שש צורות, כשרק אחת מהן זהה לחלק מקורי. נסו אפשרויות אלה, ואחר כך נסו את אותה פעילות עם חלקים 1 ו-2.

היכרות עם צורות חדשות ניתן לעשות באמצעות חידות הדורשות שני חלקים או יותר. הצורה בציור 5 יכולה להיווצר בשתי דרכים. אחד משתמש בחלקים 2 ו-4 כשצדם העליון כלפי מעלה; השני משתמש בחלקים 2 ו-4 הפוכים כשצדם הממוספר כלפי מטה. בנו את הצורה בשתי הדרכים. האם ניתן לעשות זאת עם חלקים 1 ו-7? עם חלקים 1 ו-7 הפוכים? אלו שני חלקים אחרים יוצרים צורה זו, והאם זה גם מתאפשר אם הופכים אותם? בניית הצורה בדרכים שונות משני חלקים יכולה לעורר את הילדים לשאול: האם אנו יכולים לעשות זאת גם עם שלושה חלקים? נסו את חלקים 1, 2, ו-5 ואחר כך בנו זאת בצורה שונה עם שלושה חלקים אלה. נסו גם את חלקים 1, 2, ו-5 כשהם הפוכים.

ציור 5: ניתן לבנות צורה זו בדרכים שונות

בפתרון חידות כגון זו, הילדים עובדים באופן ויזואלי עם זוויות וצלעות מתאימות. הם גם שמים לב לכך שחלקים מסוימים מתאימים כשכל צד כלפי מעלה, אך עם חלקים אחרים אין זה כך. חלקים
2 ו-3 מתאימים כשכל צד כלפי מעלה, חלק 7 - לא, משום שהיפוך שלו משנה את האוריינטציה שלו ואת מראהו. האם חלק 1 ניתן להיפוך? האם חלקים 4, 5 או 6?

כרטיסי חידה וחידת הפסיפס

בשלב הבא אני מציג חידות מורכבות יותר. ניתן לתת הוראות בעל פה או על גבי כרטיסי משימה, כמו אלה בציור 6. קיראו אותם ונסו. הם מדגימים כיצד לחידות הנוצרות משני חלקים, יכולים להיות פתרונות המשתמשים בחלקים אחרים. חישבו איזו גיאומטריה מעורבת בהם ועל השיחות שיכולים הילדים לנהל כשהם בונים אותם. תלמידים אחדים ישתמשו באסטרטגיות על מנת לפתור חידות אלה. לדוגמה, בחלק 4 של שתי חידות הבתים, ילדים היודעים שחלק המלבן 3 יכול להיווצר מחלקים 5 ו-6 יכולים להשתמש בקשר זה כדי למצוא פתרון על ידי הנחת חלקים 1 או 2 למעלה וחלקים 5 ו-6 ברווח המלבני שלמטה.

פסיפס בית

1. בנו על דף נייר בית כמו זה שבציור, בעזרת שני חלקים.
2. סרטטו קו סביב הבית שבניתם כדי לקבל את הצורה שלו.
3. בנו אותה צורה משני חלקים אחרים.
4. בנו אותה צורה משלושה חלקים. האם תוכלו לעשות זאת בשתי דרכים?
5. האם ניתן לבנות את הצורה מארבעה חלקים?

פסיפס בית גבוה

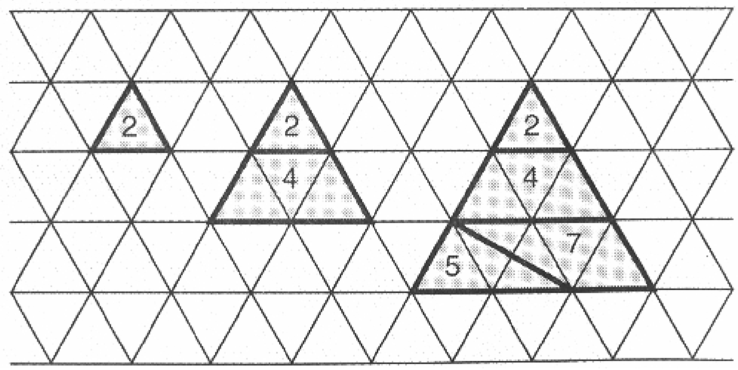
1. בנו על דף נייר בית גבוה כשחלק 2 הוא הגג ועם חלק אחד נוסף.
2. סרטטו קו סביב הבית שבניתם כדי לקבל את הצורה שלו.
3. בנו אותה צורה מחלקים 5 ו- 7.
4. האם ניתן לבנות צורה זו משלושה חלקים?

בנו פסיפס

1. השתמשו בשניים, שלושה או ארבעה חלקים ובנו צורה משלכם.
2. סרטטו קו סביב הצורה על גבי דף נייר או קרטון גדול. צבעו את הצורה.
3. האם תוכלו לבנות אותה צורה מחלקים אחרים?
4. בחרו כותרת לצורה שלכם, כתבו אותה ואת שמכם על הדף.

חשוב שהתלמידים ישתפו זה את זה בשיטותיהם, אולי על ידי שימוש במטול, כדי להראות ולספר. מורים צריכים גם לעודד שאלת שאלות. ילדים נהנים ליצור חידות שאחרים יפתרו. ניתן להציג חידות כצורות גזורות או אפשר לצייר אותן על כרטיסים ולשים ב"מרכז מתמטי". תלמידים יכולים לרשום שמות על חידות – לדוגמה, חידת הבית הגדול של דינה – דבר שיוצר בעלות על יצירותיהם.

ניתן לעשות הגדלה של חלקים, לדוגמה: חלקים 2 ו-4 יוצרים הגדלה של חלק 2. נסו הגדלה זו, ואחר כך עשו זאת עם שני חלקים אחרים, ואחר כך עם שלושה. להגדלה יש צלעות ארוכות פי 2 מאלה של חלק 2, וניתן לראות זאת בקלות על ידי בנייה על רשת המשולשים (ראו ציור 7). שימוש בחלקים 2, 4, 5, ו-7 יוצר הגדלה עם צלעות באורך פי שלוש מאלה של חלק 2. מיצאו ארבעה חלקים אחרים שעושים זאת. אתגר: צרו הגדלה עם כל שבעת החלקים. בהשוואת הצלעות והזוויות של משולשים אלה, עם אלה של חלק 2, אנו רואים שהצלעות גדלות באופן הדרגתי, בעוד שהזוויות נשארות זהות.

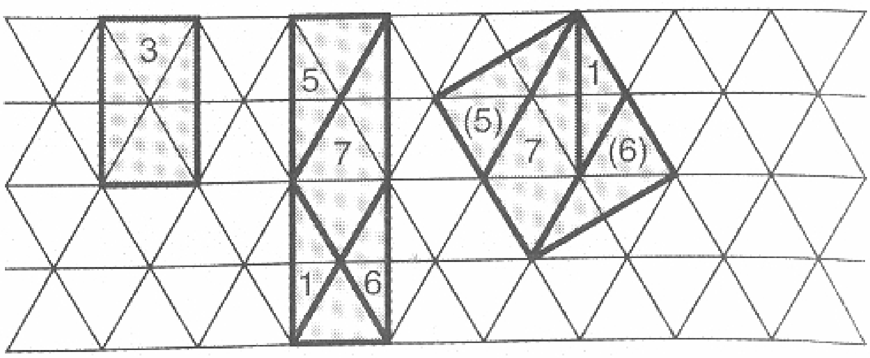


ציור 7: הגדלות של חלק 2

חקירת צורות גיאומטריות וזוויות

ילדים מבחינים מהר מאד שלצלעות של חלק 2 יש אותו אורך, וכך גם לגבי כל הגדלה. כך שבנקודה זו אנו יכולים לתת שם לצורות אלה – משולש שווה צלעות – ולשאול תלמידים מדוע השם מתאים, כלומר יש לו צלעות שוות. עם התחלה כזו אנו יכולים להעריך את היתרונות של גישה זו להוראת גיאומטריה. ראשית, ילדים עוסקים בפעילויות הנחשבות בעיניהם למשחק, ולפיכך נהנים מהן. יש להם חידות לפתור והם לומדים דברים ללא כוונה ללמוד. בשעת הכושר, מורים יכולים להציג את שמות החלקים. לאחר זמן מה, ילדים ישתמשו בשמות בעצמם וילמדו שהשם נשאר אותו הדבר ללא חשיבות לאופן שבו מונח החלק. הם גם מתחילים לשים לב לתכונות של הצורות. לדוגמה: לחלק 2 יש צלעות שוות, הפינות שלו שוות – הזוויות שוות, והוא נראה זהה כאשר הופכים אותו – מראה על סימטרייה שיקופית – או מסובבים אותו – מראה על סימטרייה סיבובית. ילדים יכולים ללמוד על חלקים אחרים באופן דומה.

לאחר מכן, נותנים לחלק 3 את השם **מלבן**. אומרים לילדים שכל שלוש הצורות בציור 8 הן גם מלבנים, ומבקשים שיבנו אותן. תנו לילדים לבנות את המלבן ה"גבוה" עם חלקים 1, 5, 6, ו-7, ואת המלבן ה"עקום" עם חלקים 1 ו-7 והצדדים ההפוכים של חלקים 5 ו-6.



ציור 8: מלבנים

האם אפשר ליצור מלבנים אחרים? כמובן, המלבן הגדול ביותר הוא המלבן הגדול בציור 1. זהו אתגר לתלמידים לבנות אותו מחדש מבלי לראות את הציור המלא. ילדים יכולים לסדר את החלקים בדרכים שונות, והם נהנים למצוא דרכים חדשות. על ידי יצירת מלבנים שונים, הילדים יגלו - לאחר זמן מה – שכל המלבנים אינם הגדלות אחד של השני, כפי שהיה עם המשולשים שווי הצלעות. בנוסף לכך, בניגוד למשולשים שווי צלעות, המלבן הוא צורה נפוצה בחיי היומיום, ויש לבקש מהילדים למצוא ולשתף אחרים בדוגמאות לצורה זו מסביבת הבית ובית הספר שלהם. לאחר שהילדים יבדקו מלבנים, הם יוכלו לחקור את החלקים 5 ו-6, היוצרים את חלק 3. צורות אלה הן משולשים ישרי זווית, או "משולשים מלבניים" כפי שאנו קוראים להם בהולנד. אפשר לבקש מהילדים ליצור משולשים ישרי זווית אחרים, לדוגמה: נסו את החלקים 1, 2, 5, 6, או 3, 5, 6 – ובדקו האם הם כולם הגדלות של חלק 5.

ילדים יכולים גם לשחק משחקים המפנים את תשומת ליבם לצורות ולחלקיהן. הם יכולים לשחק משחק "משש ומצא את הצורה", שבו הם מחזיקים חלק מבלי לראות אותו ומנסים למצוא את החלק המתאים לו. השאלה "כיצד ידעת?" מעודדת תקשורת תיאורית לגבי החלקים, כגון, "יש לו ארבע צלעות ופינה מחודדת" עבור חלק 7.

התאמת החלקים לצורות המופיעות בחידות מסייעת לילדים להיות מודעים לתכונות של הצלעות והזוויות של החלקים. לחלקים אחדים יש פינות ריבועיות, לאחרים יש פינות "מחודדות". לחלק יש שתי צלעות שוות, בעוד שאצל אחרים כל הצלעות שוות או אין כלל צלעות שוות. כעת ניתן להציג את השפה של צלעות וזוויות, אך כמובן ללא הגדרה פורמלית. תלמידים יכולים להשוות בין החלקים בצורת משולש ולהראות במה הם דומים – לדוגמה: שלוש צלעות, שלוש זוויות – ושונים – לדוגמה: כל הצלעות שוות, שתי צלעות שוות, אין צלעות שוות, שלוש זוויות שוות. לחלק 1 יש שתי זוויות שוות. לאיזה עוד חלק יש תכונה זו? הנחת זוויות אחת על גבי השנייה כדי לבדוק האם הן שוות, מסייעת לילדים להבין שגודל הזווית אינו תלוי באורכי הצלעות היוצרות אותה.

הזוויות של חלקי הפסיפס באות בחמישה גדלים. בקשה מהילדים להשוות זוויות של חלקים עם פינה ריבועית או זווית ישרה, מובילה לעיסוק בלתי פורמלי בזוויות חדות – הקטנות מזווית ישרה – ובזוויות קהות – הגדולות מזווית ישרה. בהסתמך על השפה שאותה ממציאים הילדים עבור סוגי זוויות אלה, המורים יכולים בהדרגה להציג מונחים קונבנציונליים. ילדים יכולים למצוא יחסים בין זוויות של חלקים – לדוגמה: כיצד הזווית הקטנה ביותר מתייחסת לזוויות האחרות- הן שוות שתיים, שלוש, ארבע וחמש פעמים הזווית הקטנה ביותר. פעילויות אלה מתבצעות ללא התייחסות למדידת זוויות, ובונות בסיס לעיסוק מאוחר יותר בזוויות, מדידתן במעלות, ויחסים בין זוויות.

פעילות מעניינת לילדים היודעים מדידת זווית, היא למצוא את גודל הזוויות בכל אחד משבעת החלקים ללא שימוש במד זווית. ישנן הרבה דרכים אפשריות, ועל הילדים להשוות בין שיטותיהם. התבוננו בחלקים בציור 1, ומיצאו את גודל הזוויות בכל חלק. חישבו על היחסים בין הזוויות בהם השתמשתם והאם תוכלו למצוא גדלים אלה בדרכים אחרות, על ידי שימוש ביחסי זוויות אחרים.

ילדים המשתמשים ברשת המשולשים כדי לתעד את פתרונותיהם לחידות, נעשים מודעים לזוויות שוות ברשת וכן לקווים מקבילים. אפשר לבקש מהם לחפש קווים כמו פסי רכבת ולצבוע אותם בטושים בצבעים שונים, תוך יצירת דוגמאות המראות שלושה סטים של קווים מקבילים. מקבילות של קווים היא תכונה הדרושה לתיאור חלקים 4 ו-7 - טרפזים שלהם זוג אחד של צלעות מקבילות, ומתאימה גם לצלעות הנגדיות של חלק 3 - מלבן.

פעילויות נוספות עם חידת הפסיפס

הנחת החלקים על מנת למלא את הצורות בחידות, מספקת גם התנסויות עם שטח. על ידי השוואה ישירה, תלמידים יכולים להראות שחלקים מסוימים תופסים יותר שטח מאשר אחרים – לחלק 7 שטח גדול יותר מאשר לחלק 2 – או לגלות יחסים, כגון: חלק 5 הוא חצי מחלק 3. עבודה עם צורות על רשת המשולשים מגלה יחסים אחרים, כגון, לחלק 4 יש פי שלוש השטח של חלק 2, או מהו השטח של חלק 2 בהשוואה לשטח של ההגדלות שלו (ראה ציור 7). חקירה דומה לגבי שטח יכולה גם להתבצע עם חלק 4 והגדלותיו. סוגי התנסויות כאלה עם שטח, יוצרים בסיס לעבודה מאוחרת יותר עם יחידות שטח ריבועיות ולגילוי דרכים למציאת שטח של צורות שונות. לדוגמה: מדוע השטח של משולש ישר זווית הוא מחצית מהשטח של מלבן וכיצד הגדלה של צורה, לדוגמה: על ידי הכפלת אורכי צלעותיה, משפיעה על שטחה.

על מנת להמשיך ולפתח את החשיבה התיאורית של הילדים לגבי החלקים, הם יכולים לשחק משחקי "רמז" לגבי החלקים או הצורות שהם יוצרים איתם. רמזים עבור חלק 4 יכולים להיות "ארבע צלעות, ארבע זוויות, שתי צלעות שוות, שתי זוויות חדות שוות, ושתי צלעות מקבילות". בכל פעם מגלים רמז אחד בלבד, עד שהצורה מזוהה. לאחר כל רמז הילדים אומרים אלו חלקים מתאימים או לא מתאימים, ומסבירים מדוע. הם יכולים גם לשחק "נחש את החלק", משחק שבו הם שואלים את המורה שאלות של כן ולא לגבי הצורה הנסתרת. המורה יכולה לרשום את השאלות על הלוח ולבקש מהילדים לדון בשאלה האם כולן דרושות כדי לזהות את הצורה. ילדים אולי יצביעו על כך שמתכונות מסוימות אפשר להסיק על אחרות, כמו שהמשמעות של "שלוש צלעות" היא שלצורה יש "שלוש זוויות". משחקים מסוגים כאלה מאפשרים תרגול של התכונות שהילדים למדו עד עתה ומחזקים את השימוש של הילדים בשפה תיאורית ככלי להנמקה ולחשיבה לגבי הצורות ותכונותיהן. הם גם מספקים למורה חלון לרמות החשיבה המתפתחות של הילדים, במקרה זה בין הרמה התיאורית והרמה הבאה, שבה התכונות מסודרות באופן לוגי.

לאחר משחק עם פסיפס מיוחד זה בפעילויות אלה, אנו חשים שישנה אפשרות לשאול שאלות רבות נוספות ולחקור נושאים נוספים. יתרה מזאת: ניתן להשתמש ברשתות אחרות ובפסיפסים המבוססים על צורות אחרות, כגון אחד המבוסס על ריבועים, המוביל באופן טבעי לשטח ולשילוב גיאומטריה המקשרת בין צורה ומספר.

רפלקציות על הפעילויות ומבט קדימה

פעילויות עם פסיפסים ופעילויות אחרות המשתמשות בקיפול נייר, בציור, ובצורות פלא הנדסיות, יכולות להעשיר את המאגר של מבנים ויזואליים של הילדים. הן גם מפתחות ידע על צורות ותכונותיהן. על מנת לקדם את המעבר מרמה אחת לבאה אחריה, צריכה ההוראה לכלול רצף פעילויות בעל חמישה שלבים.

ההוראה צריכה להתחיל ב**שלב חקירה**, שבו החומרים מובילים את הילדים לחקור ולגלות מבנים מסוימים.
בשלב השני, **אוריינטציה ישירה**, המטלות מוצגות כך שהמבנים האופייניים מופיעים בפני הילדים בהדרגה, לדוגמה: על ידי חידות המגלות סימטרייה של חלקים או על ידי משחקים כמו "משש ומצא את הצורה". בשלב השלישי, **הסבר**, המורה מציגה טרמינולוגיה ומעודדת את הילדים להשתמש בה בשיחותיהם ובעבודתם הכתובה לגבי גיאומטריה. בשלב רביעי, **אוריינטציה חופשית**, המורה מציגה מטלות שיכולות להתבצע בדרכים שונות ומאפשרות לילדים להיות מיומנים יותר במה שהם כבר יודעים, לדוגמה: על ידי חקירות של יצירת צורות שונות מחלקים שונים או על ידי משחקי הרמזים. בשלב החמישי והאחרון, **אינטגרציה**, ניתנות לילדים הזדמנויות לקבץ יחד את מה שהם למדו, אולי על ידי יצירת פעילויות של רמזים משלהם.
במהלך שלבים אלה יש למורה תפקידים שונים: תכנון מטלות, הפניית תשומת לב הילדים לתכונות גיאומטריות של צורות, הצגת טרמינולוגיה, קיום דיונים עם הילדים תוך שימוש במונחים אלה ועידוד הסברים ושיטות של פתרון בעיות המשתמשים בחשיבה התיאורית של הילדים לגבי הצורות. מעבר על פני חמשת שלבים אלה עם חומרים כמו חידת הפסיפס, מאפשר לילדים לבנות רקע עשיר בחשיבה וויזואלית ותיאורית, הכולל צורות שונות ותכונותיהן.

זכרו: גיאומטריה מתחילה במשחק. החזיקו חומרים כמו הפסיפס בעל שבעת החלקים, כך שיהיו זמינים. שחקו איתם בעצמכם. עשו רפלקציה לגבי אלו נושאים בגיאומטריה הם כוללים ובאיזה סדר לתת פעילויות המפתחות את רמות החשיבה של הילדים לגבי הנושאים. אחר כך העסיקו את תלמידיכם בפעילויות ובמשחקים המציעים חונכות בחשיבה גיאומטרית. ילדים שאצלם תטפחו בצורה זהירה את החשיבה הגיאומטרית, יהיו מסוגלים טוב יותר ללמוד בהצלחה את סוג המתמטיקה שיצר אוקלידס.

ביבליוגרפיה

Fuys, David, Dorothy Gedds, and Rosamond Tischler. The van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education*. Monograph Series, no. 3. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 1988.
van Hiele, Pierre M. Structure and Insight. Orlando, Fla.: Academic Press, 1986.
van Hiele Pierre M. Structuur (Structure). Zutphen, Netherlands: Thieme, 1997.

על המחבר:

פייר מ. ואן הילה, תושב ותיק של מדינת הולנד, מורה לשעבר בשיטת מונטסורי ומחבר סדרת תוכניות לימודים המציגות מרחב של פעילויות בגיאומטריה, הינו בעל שם עולמי בזכות עבודתו על רמות החשיבה כפי שהן מתבטאות בגיאומטריה, נושא הנדון במאמר זה.

בעת ביקור שערך ואן הילה ב- 1987 בברוקלין קולג', הוא פגש לראשונה את פאזל הפסיפס המוזכר במאמר, ומאז הוא מוקסם מפסיפס זה וממגוון הדרכים שבהם ניתן להשתמש בו להוראת גיאומטריה. למרות שואן הילה הרצה פעמים רבות על הפעילויות הקשורות בפסיפס זה, מאמר זה

הינו היחיד שבו הוא מפרט את הדרכים שבהן ניתן להשתמש בפאזל הפסיפס להוראת מושגים גיאומטריים.