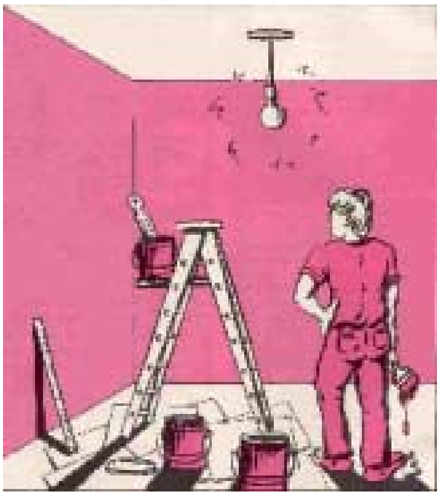
מודלים של שטח בכיתות ג' – ט'

AREA MODELS – Spanning the Mathematics of grades 3-9

מאת: James E. Schultz

הופיע ב: Arithmetic Teacher, Vol. 39, No. 2, October 1991, pp.42-46

תרגום: ברכה סגליס



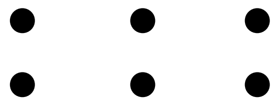
מחנכים דוגלים בשימוש במודלים שונים להוראת הפעולות הבסיסיות של האריתמטיקה, כולל מודלים של קבוצות (על ידי שימוש בעצמים מוחשיים או בייצוגים של עצמים), מודלים של אורך (על ידי שימוש בבדידים או בציר המספרים), ומודלים של שטח (על ידי שימוש באריחים או בתמונות). כאשר ברצוננו להחליט כיצד להדגים ללומדים מושג מתמטי כלשהו, אנו צריכים להתייחס למספר שאלות:

- עד כמה המודל מתאים למאפייני הלמידה של התלמיד?
- עד כמה המודל רלבנטי להתנסויות של התלמיד?
- עד כמה המודל מדגים בצורה אפקטיבית את הרעיון המתמטי הנדרש?
- עד כמה המודל רלבנטי להתנסויות בחיי היומיום העתידיות של התלמיד?
- עד כמה המודל מאפשר הכללה למתמטיקה שהתלמיד ילמד בעתיד?

מודלים של שטח מתאימים במיוחד לאור שתי השאלות האחרונות. ללא ספק שטח הוא תחום רלבנטי להתנסויות עתידיות בחיי היומיום, ביישומים הכוללים בעיות העוסקות בתוצרים כמו: שטיחים, בדים, צביעה, טפטים, מדשאות וגינון. מאמר זה דן במודלים של שטח הניתנים לשימוש בכיתות ג' עד ט', ומראה כיצד המודל מכליל ממצבים בדידים (discrete) העוסקים באריתמטיקה של מספרים שלמים למצבים רציפים (continuous) העוסקים במספרים עשרוניים, שברים, אחוזים, הסתברות, אלגברה ומתמטיקה מתקדמת יותר.

ישנם מודלים אחדים המתאימים להדגמת כפל של מספרים שלמים. מורה בכיתה ג' תשתמש, קרוב לודאי, במודל הקבוצות כדי לעזור לתלמידים לדמיין בעיה כמו 3×2 , ראה **איור 1 א'**. למרות שמודל זה מצוין להצגת הכפל לראשונה, **וצריך** להשתמש בו, הרי שמודל השטח צריך גם להיות מוצג (**איור 1 ב'**). היתרון של הוספת מודל השטח הוא בכך שהוא עוזר לתלמידים להבין מן ההתחלה שכפל יכול להופיע במצבים רציפים, כמו במספר המטרים המרובעים שבגינה של שני מטר על שלושה מטר, בדיוק כמו שהוא יכול להופיע במצבים בדידים, כמו במספר האנשים בשתי שורות של שלושה אנשים. למרות שמודלים של קבוצות מצוינים לאריתמטיקה של מספרים שלמים, הרי שלא ניתן להכליל אותם לאריתמטיקה של שברים ומספרים עשרוניים, ולהסתברות, אלגברה ונושאים מתמטיים ברמה גבוהה, באותה מידה שניתן לעשות זאת עם מודלים של שטח.

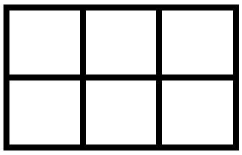
איור 1



(א)

מודל קבוצות ל 3×2

(כיתה ג)



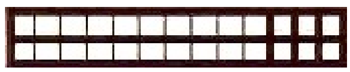
(ב)

מודל שטח ל 3×2

(כיתה ג)

למעבר חלק ממודל הקבוצות הקל יותר, ניתן לפרש תחילה את מודל השטח כמקרה מיוחד של מודל הקבוצות, כאשר חברי הקבוצות הם "אריחים". החל מכיתה ד' לערך, תלמידים עוברים לכפל של מספרים דו-ספרתיים, שעבורם מודלים של שטח מתחילים להיות לעזר רב. למשל, בבעיה 13×2 התלמיד יכול בקלות לראות שהמכפלה כוללת 2 עשרות ו- 6 יחידות (ראה **איור 2 א'**). באופן דומה, בבעיה 13×12 התלמיד יכול לראות 1 מאה, 5 עשרות ו- 6 יחידות (ראה **איור 2 ב'**). בעיות אחרות, כמו 17×2 או 17×12, יכולות להמחיש ארגון מחדש (regrouping) של המספר. ניתן להכין נייר משובץ שבו יש 100 משבצות קטנות בתוך משבצת אחת גדולה כדי לעבוד עם מודלים של שטח במספרים שלמים.

איור 2

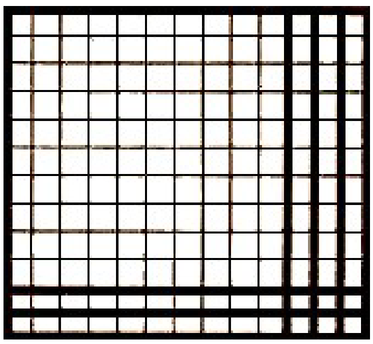


(א)

מודל שטח עבור 13×2,

המראה 2 עשרות ו- 6 יחידות

(כיתה ד)



(ב)

מודל שטח עבור 13×12,

המראה 1 מאה, 5 עשרות, ו- 6

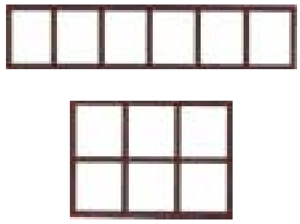
יחידות (כיתה ד)

ניתן להציג את הרעיון של מספרים ראשוניים, אולי בכיתה ה', תוך שימוש באריחים כמודל של שטח. לדוגמה, תלמידים יכולים לגלות שניתן להרכיב משישה אריחים מלבנים בצורות שונות. משבעה אריחים ניתן ליצור רק מלבן אחד. ראה **איור 3**.

בכיתה ה' לערך, תלמידים יכולים להשתמש במודלים של שטח כדי לייצג בעיות אריתמטיות עם מספרים עשרוניים. בסיכום של הנאמר במחקרים אודות הוראה ולמידה של מספרים עשרוניים, כותב Hiebert (1987),

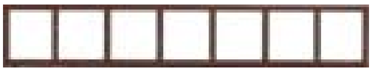
״יש להקדיש זמן רב יותר לפיתוח המשמעות של מספרים עשרוניים... **כאשר הם מוצגים לראשונה**. ניתן להשתמש באמצעי המחשה כמו בדידי בסיס עשר, או פיסות נייר ריבועיות המחלקות לעשיריות ולמאיות, כמייצגים את הסמלים המתמטיים.״ גישה זו מודגמת ב**איור 4 א׳** , שבו ריבוע גדול מייצג יחידה (1) (בניגוד לייצוגים של המספרים השלמים, שבהם כל ריבוע קטן ייצג יחידה), ״מקל ארוך״ מייצג עשירית, וריבוע קטן מייצג מאית. השוו את **איורים 4 ב׳** ו- **4 ג׳ לאיורים 2 א׳** ו- **2 ב׳** כדי לראות כיצד מודלים של שטח יכולים לעזור להראות אריתמטיקה של מספרים עשרוניים כהרחבה של אריתמטיקה של מספרים שלמים. ניתן לראות ללא קושי את היחידות, העשיריות והמאיות בתשובות לבעיות הכפל.

איור 3



(א)

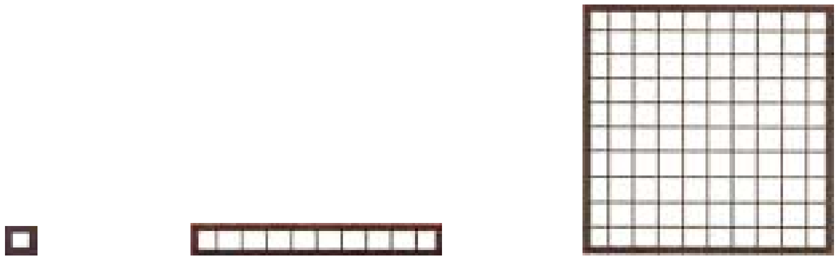
שני מלבנים הנוצרים משישה אריחים,
מציינים מספר פריק
(כיתה ה)



(ב)

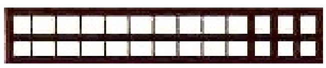
מלבן יחיד במינו הנוצר משבעה אריחים,
מציין מספר ראשוני
(כיתה ה)

איור 4



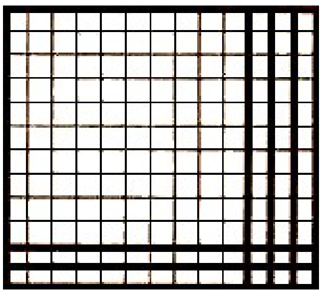
יחידה עשירית מאית

(א)



(ב)

מודל שטח עבור 1.3 × 0.2,
המציין שתי עשיריות ושש מאיות
(כיתה ה)



(ג)

מודל שטח עבור 1.3 × 1.2,
המציין אחד, חמש עשיריות ושש מאיות
(כיתה ה)

מודלים של שטח מתאימים במיוחד לשברים. Payne (1984) מצטט מחקר המראה ש"ילדים בכיתות א' עד ג' יכולים להגיע להבנת המשמעות והסמלים של שברים כאשר רעיונות אלו מקושרים לאזורים." הוא מראה כיצד ניתן להשתמש ברצועות נייר, שהם התאמה של מודל השטח, כמודלים מוחשיים לשברים. Kieren (1975) מציע שמתוך ארבעת המשמעויות של המספרים הרציונאליים (מודלים של מדידות או שטחים, מנה, יחס ואופרטור) "למדידות ולאופרטור יש הסיכויים הטובים ביותר לכניסה מוקדמת אל המספרים הרציונליים".

ניתן להשתמש בתחילה במודלים של שטח כדי להדגים שברים ומאוחר יותר כדי להראות שברים שקולים. שימו לב ב**איור 5** שהשטח הצבוע מייצג ארבע ששיות אם לא מתעלמים מהקו המאוזן שבאמצע ושני שליש אם כן מתעלמים מקו זה.

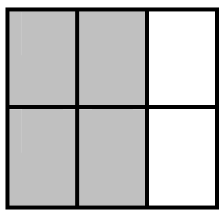
באיור 6 מודל השטח ממחיש כיצד ניתן לחבר $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$ על ידי שימוש בשברים השקולים $\frac{4}{6}+\frac{3}{6}$.

באיור 7, מלבן במידות של $\frac{2}{5}$ על $\frac{3}{4}$ ממחיש את הבעיה $\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}$, בדיוק כמו שמלבן במידות 3 על 4 ממחיש את 4 × 3. השטח מורכב מ 3 × 2 חלקים מתוך 4 × 5 חלקים, וזה מרמז בצורה חזקה ש $\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}$ צריך להיות $\frac{(2\times3)}{(5\times4)}$, ובכך מציע את ההגדרה של כפל שברים. דוגמאות אלו מראות את היתרונות שבשימוש במודלים מלבניים של שטח (במקום בעיגולים) כמודל המרכזי להצגת שברים, נקודה שנומקה על ידי Streefland (1984 , 10). כמובן שתלמידים יכולים להפיק תועלת מראיית מגוון של מודלים, כולל עיגולים, כדי להכין אותם למצבים בחיי היומיום.

איור 5

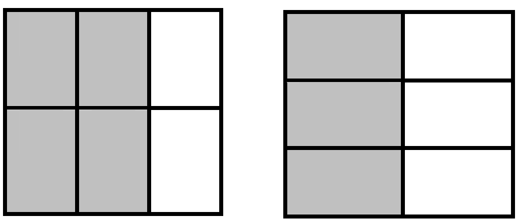
מודל שטח עבור 2/3 = 4/6

(כיתה ה)



איור 6

מודל שטח המראה כיצד 2/3 + 1/2 (כאשר מתעלמים מהקווים המאוזנים) שווה ל 3/6 + 4/6 (כאשר מסתכלים על הקווים המאוזנים) (כיתה ה)

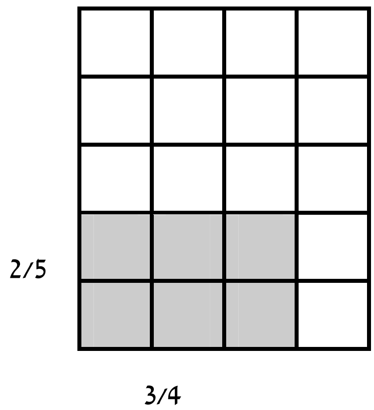


בכיתה ו' ניתן להשתמש ברצועות של אחוזים,שהם וריאציה של מודלים של שטח, כדי להמחיש את מושג האחוז. רצועות של אחוזים יכולות להפוך את הרעיון של 50 אחוז או 120 אחוז למופשט פחות (ראה **איור 8**).

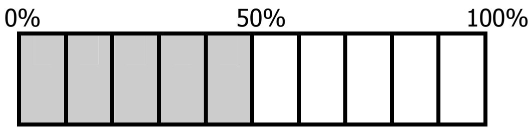
איור 7

מודל שטח עבור 3/4 × 2/5

(כיתה ה)



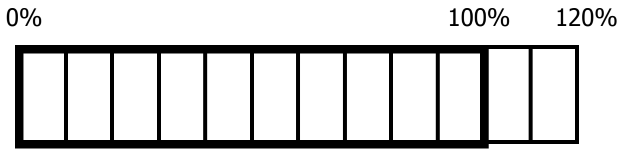
איור 8



(א)

מודל שטח עבור 50 אחוז

(כיתה ו)



(ב)

מודל שטח עבור 120 אחוז, כשהחלק המודגש מציין 100 אחוז.

(כיתה ו)

ניתן להשתמש ברצועות של אחוזים גם כעזרה לפתרון בעיות אחוזים כמו הסוג הבא:

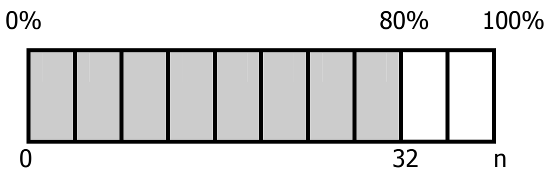
32 הם 80 אחוז מאיזה מספר?

אם מניחים ש- 100 אחוז של הרצועה הוא n ו- 80 אחוז של הרצועה הם 32, תלמידים יכולים בקלות לראות את הבעיה בצורה גיאומטרית. על ידי מילוי המספרים החסרים לאורך החלק העליון והחלק התחתון של הרצועה, התלמידים יכולים לראות שכל 10 אחוז מתאים ל- 4, כך ש- 100 אחוז מתאים ל- 40 (ראה **איור 9**).

איור 9

מודל שטח עבור הבעיה: 32 הם 80 אחוז מאיזה מספר?

(כיתה ז)



מודלים של שטח יכולים לעזור, לעיתים קרובות, לפתור בעיות הסתברות קשות יותר. דוגמה הלקוחה מתוך פרויקט מתמטיקה לכתות הביניים (Phillips et al. 1986, 97-128) דנה בהסתברות של שחקן כדורסל שמבצע זריקות חופשיות במצב של "בונוס": נניח שלשחקן יש 60 אחוז סיכויים לבצע זריקה חופשית, ואם הוא מצליח יש לו 60 אחוז סיכויים לבצע זריקה חופשית עם בונוס. מצאו את ההסתברות שהשחקן יבצע אפס, אחת, או שתי זריקות חופשיות. הסתברויות אלו מוצגות בהתאמה באזורים הלא צבועים, הצבועים בגוון בהיר והצבועים בגוון כהה של **איור 10**. מודלים של שטח עוזרים לראות שההסתברויות בהתאמה הן:

P (אפס זריקות חופשיות) = 1 – 0.60 = 0.40

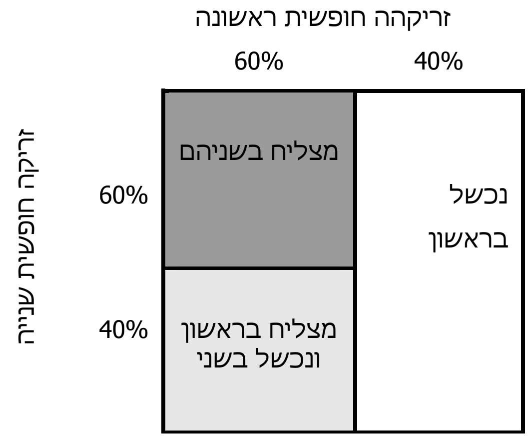
P (זריקה חופשית אחת) = 0.60 × 0.40 = 0.24

P (שתי זריקות חופשיות) = 0.60 × 0.60 = 0.36

כך שההסתברות לא לעשות אף זריקה חופשית היא הגדולה ביותר, בעוד שההסתברות לעשות זריקה חופשית אחת היא הנמוכה ביותר – שזו הפתעה לתלמידים רבים. דוגמאות נוספות לשימוש במודלים של שטח להסתברות ניתן למצוא בביבליוגרפיה.

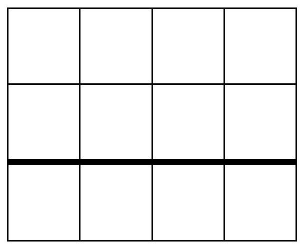
איור 10

הסתברויות לזריקה חופשית עם בונוס (כיתה ח)



באלגברה, מודלים של שטח להמחשת תכונת הפילוג יכולים להוביל מבעיות כמו $3 \times 4 = 2 \times 4 + 1 \times 4$ ש**באיור 11** אל בעיות כמו $(a + b)\ c = ac + bc$ וכמו $a\ (\ b + c\ ) = ab + ac$, ולהראות ש $(x + y)^2$ אינו שווה ל- $x^2 + y^2$, כמו שתלמידים רבים חושבים (ראה **איור 12**).

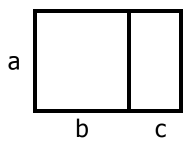
איור 11



3 של 4 = 2 של 4 + 1 של 4

(כיתה ג)

איור 12

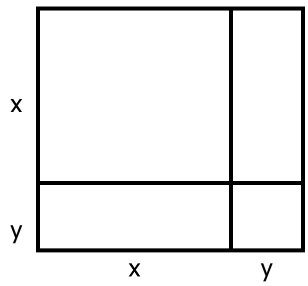


(א)

מודל שטח עבור

a(b+c)=ab+ac

(כיתה ח' או ט')



(ב)

מודל שטח עבור

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$

(כיתה ח' או ט')

לפיכך יכולים מורים בכיתות הנמוכות להשתמש במודלים של שטח כהצגה מקדימה של מתמטיקה ברמה גבוהה יותר עבור תלמידיהם, בעוד שמורים בכיתות הגבוהות יכולים להשתמש במודלים של שטח כדי לבנות על התנסויות קודמות של תלמידיהם. הסיפור אינו מסתיים כאן. ניתן להשתמש במודלים של שטח במתמטיקה מתקדמת יותר, כולל חשבון אינטגרלי.

ביבליוגרפיה

Armstrong, Richard D. "An Area Model for Solving Probability Problems." In *Teaching Statistics and Probability*, 1981 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, edited by Albert P. Shulte and James R. Smart, 135-42. Reston, Va.: The Council, 1981.

Brown, Christopher N. "Fractions on Grid Paper." *Arithmetic Teacher* 26 (January 1979): 8-10.

Dahlke, Richard, and Robert Fakler. "Geometrical Probability." In *Teaching Statistics and Probability*, 1981 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, edited by Albert P. Shulte and James R. Smart, 143-53. Reston, Va.: The Council, 1981.

Driscoll, Mark. "What Research Says." *Arithmetic Teacher* 31 (February 1984):34-35, 46.

Hiebert, James. "Research Report: Decimal Fractions." *Arithmetic Teacher* 34 (March 1987): 22-23.

Kieren, Thomas E. "On the Mathematics, Cognitive, and Instructional Foundations of Rational Numbers." In *Number and Measurement Papers from a Research Workshop*, edited by Richard A. Lesh. Columbus, Ohio: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education, 1975.

Lappan, Glenda, Elizabeth Phillips, M.J. Winter, and William M. Fitzgerald. "Activities: Area Models for Probability." *Mathematics Teacher* 80 (March 1987):217-23.

Payne, Joseph N. "Curricular Issues: Teaching Rational Numbers." *Arithmetic Teacher* 31 (February 1984):14-17.

Phillips, Elizabeth, Glenda Lappan, Mary Jean Winter, and William Fitzgerald. *Middle Grades Mathematics Project: Probability*. Menlo Park, Calif.: Addison-Wesley Publishing Co., 1986.

Reys, Robert E., Marilyn N. Suydan, and Mary M. Lindquist. *Helping Children Learn Mathematics*, Englewood Cliff, N.J.: Prentice-Hall, 1984:167-76, 192.

Richardson, Kathy. *Mathematics Model Curriculum Guide K-8*. Sacramento, Calif.: California State Department of Education, 1987: 20.

Schultz, James E. *Mathematics for Elementary School Teachers*. Columbus, Ohio: Charles E. Merrill Publishing Co., 1982:151-74.

Streefland, Leon. *How to Teach Fractions so as to be Successful*. Utrecht, The Netherlands: Vakgroep Onderzoek Wiskundeonderwijs en Onderwijscomptercentrum, 1984.

Suydan, Marilyn N. "Research Report: Manipulative Materials." *Arithmetic Teacher* 31 (January 1984):27.