גישה של מודליזציה לקידום פתרון בעיות בכיתות הביניים

A Modeling Approach for Enhancing Problem Solving in the Middle Grades

מאת: Beverly J. Ferrucci, Ban-har Yeap, and Jack A. Carter

הופיע ב: Mathematics Teaching in the Middle School, Vol. 8 No. 9, May 2003, pp. 470-475

תרגום: ברכה סגליס

מודליזציה הינה כלי גמיש, מרתק ובעל עוצמה שיכול לקדם את כישורי פתרון הבעיות של תלמידים בכיתות הביניים. במאמר זה, אנו מתארים את הניסיונות הראשונים של מורה אחת לפתח אצל תלמידיה מומחיות במודליזציה לגבי מגוון של בעיות מילוליות באריתמטיקה. גישה זו של מודליזציה נובעת, בחלקה, מהתצפיות שלנו בבתי הספר ובתוכניות הלימודים של סינגפור במהלך שנת 2001. נפתח בתיאור קצר של הבסיס למודליזציה המבוסס על המחקר העכשווי ומסמכי הסטנדרטים.

בעיות מילוליות באריתמטיקה מהוות מזה זמן רב מרכיב חשוב בתוכנית הלימודים של כיתות הביניים. עם זאת, מחקרים מראים שהדרכים המסורתיות להצגת ולהוראת בעיות מילוליות מביאות לעיתים קרובות את התלמידים לכך שהם מחפשים מילות מפתח או ביטויים הרומזים על פעולה או אלגוריתם, במקום להסתמך על ידע מתמטי קודם שנרכש ובאמצעותו לפתור את הבעיות (Greer, 1997). מחקר שנערך לאחרונה על ידי Verschaffel, De Corte, and Vierstraete (1999) מציין ש"ניסיון רב עם בעיות מילוליות מסורתיות מעורר אצל תלמידים נטייה חזקה לגשת לבעיות מילוליות באופן שטחי, חסר מחשבה ושיגרתי כשהם באים לזהות את הפעולה האריתמטית הנכונה הנדרשת כדי לפתור את הבעיה המילולית" (עמ' 265).

העקרונות והסטנדרטים של ה- NCTM למתמטיקה של בית הספר (NCTM's Principles and Standards for School Mathematics, 2000) מציינים שיש לאפשר לתלמידים בכיתות הנמוכות להשתמש במודלים "לערוך ניבויים, להסיק מסקנות, או להבין טוב יותר מצבים כמותיים" (עמ' 39). מסמך זה מציע גם שלתלמידי כיתות היסוד הגבוהות תהיה נגישות לרפרטואר של ייצוגים מתמטיים שונים והבנה כיצד להשתמש בייצוגים אלו באופן פורה וכיצד לעבור מאחד לשני.

גישת המודליזציה בבתי הספר בסינגפור

בסינגפור, משרד החינוך ביסס את גישת המודליזציה כמסגרת הבסיסית לפתרון בעיות, אותה מלמדים כמעט לכל תלמיד במדינה (Singapore Ministry of Education 1990). במהותה, גישה זו משתמשת ביצוג ציורי של הכמויות שבבעיה והיחסים שבין כמויות אלו. גישת המודליזציה נועדה לעזור לתלמידים לעשות לעצמם ויזואליזציה של יחסים מתמטיים מופשטים ושל מבני הבעיות הנלווים אליהם (Fong 1994; Yeap and Kaur 2001).

כיום, גישת המודליזציה חדרה לתוכנית הלימודים במתמטיקה של סינגפור. גישה זו עשויה להיות אחד הגורמים שתרמו להצלחה של מדינה זו במבחני השוואה בינלאומיים במתמטיקה. תלמידים לומדים להשתמש בגישה זו באמצעות חשיפה קבועה אליה בספרי הלימוד שלהם והתבוננות בשימוש בתרשימים למודליזציה במגוון רחב של דוגמאות בכיתה. לאחר שצפינו בגישת המודליזציה בסינגפור, שיתפנו בידע עליה קבוצה של מורים אמריקאיים לחטיבות הביניים במהלך קורס להתפתחות מקצועית שנערך לא מכבר. כמה מהתנסויות ההוראה הראשוניות של אחת מן המורות בקבוצה זו, גב' י', מתוארות בקטעים הבאים.

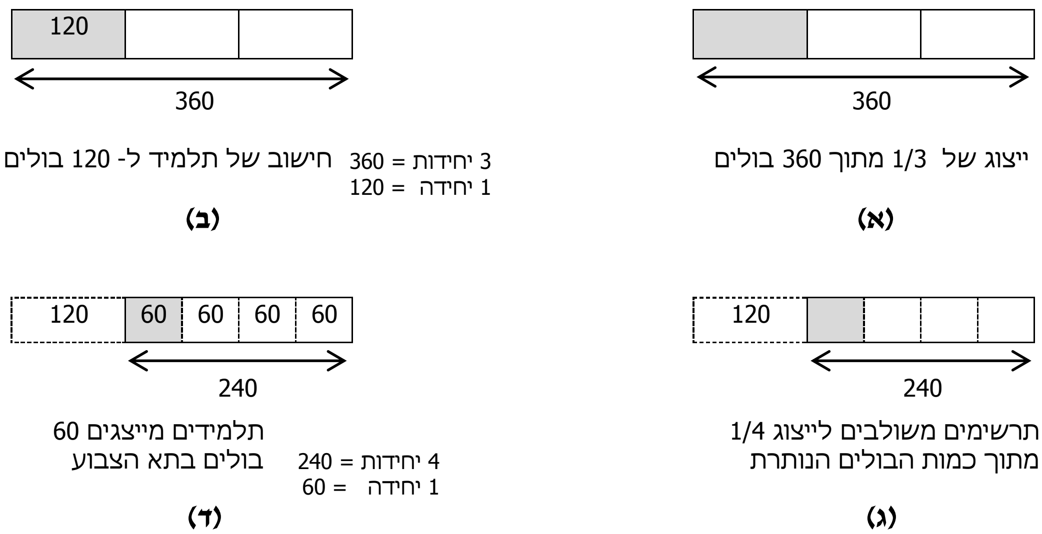
מספר דוגמאות להמחיש את גישת המודליזציה

בעיות מילוליות באריתמטיקה הן אמצעי שכיח להמחשת העוצמה של המודליזציה. גב' י' השתמשה בבעיות מילוליות מייצגות העוסקות בשברים, יחס ומעט מושגים ראשוניים באלגברה, מתוך ספרי הלימוד במתמטיקה של סינגפור, כדי להציג את הגישה לתלמידיה. למרות שבדרך כלל היא נהגה להציג בעיות כאלה ביחד עם אמצעי המחשה שונים, כמו רצועות שברים, בדידים, או קוביות מתחברות, החליטה גב' י' להציג לתלמידיה גישת מודליזציה זו כאמצעי היוריסטי (heuristic) נוסף ללמוד ולהשתמש בו. הדוגמה הראשונה שהיא בחרה היתה בעיה רב-שלבית שכללה כפל בשברים.

לג'ים היו 360 בולים. הוא מכר 1/3 מהם ביום שני ו- 1/4 ממה שנותר ביום שלישי. כמה בולים מכר ביום שלישי?

גב' י' התחילה את ההדגמה של גישת המודליזציה בכך ששאלה את תלמידיה כיצד ניתן לייצג את 360 הבולים באמצעות מלבן וכיצד ניתן לייצג 1/3 מן הבולים באותו מלבן. מאחר ותלמידים אלה עבדו בעבר על דרכים רבות לייצג שברים בעזרת צורות גיאומטריות, כמו ציור של עיגול וחלוקתו לשלושה חלקים, הרי ששלב זה היה קל לביצוע. התוצאה היא הייצוג המופיע ב**איור 1א**.
לאחר מכן שאלה גב' י' את התלמידים כמה בולים היו בשטח הצבוע. מרבית התלמידים ענו שהמספר הכולל של הבולים הוא 360, לאחר מכן חישבו ש- 1/3 מהכמות היא 120 בולים. אחד התלמידים ניגש למטול ו רשם את המספר 120 במקום המתאים בתרשים (ראה **איור 1ב**).
אחר כך שאלה גב' י' מהן הדרכים למציאת מספר הבולים שבשטחים הלא צבועים. גם שאלה זו היתה קלה יחסית עבור הכיתה. תלמידים רבים ציינו שניתן לחסר 120 מתוך 360 כדי לקבל את הכמות הנותרת של 240 בולים. לאחר מכן הקריאה גב' י' את החלק השני של הבעיה ושאלה את תלמידיה כיצד יוכלו לייצג 1/4 מן הבולים הנותרים. לאחר דיון, החליטו התלמידים לצייר תרשים נוסף המחולק לארבעה חלקים , כשכל אחד מהם מייצג 1/4 מן הבולים הנותרים. למרות שאסטרטגיה זו היתה צעד ראשון נכון, הרי שתלמידים מעטים בלבד יכלו לקשר בין שני החלקים של הבעיה המקורית. בניסיון לעזור בהכוונת הלמידה של תלמידיה, גב' י' עודדה אותם לצרף את שני התרשימים יחד. כתוצאה מכך הם ציירו את המלבן המופיע ב**איור 1ג**.
לבסוף, בתגובה לשאלת המורה מה צריך לעשות כעת, הציעו מספר תלמידים לחלק ל- 4 , והכמות הנותרת (240) חולקה ל- 4 כדי לקבל את התוצאה הסופית של 60. אחרי שאחד התלמידים רשם 60 בכל אחד מהתאים הנותרים, כפי שמראה **איור 1ד**, התלמידים ביטאו את התשובה במונחים של תוכן הבעיה. כלומר, ג'ים מכר ביום שלישי 60 בולים.

איור 1: הדגמה של גישת המודליזציה



גישת המודליזציה ואלגברה מוקדמת

גישת המודליזציה ניתנת ליישום גם במצבי פתרון בעיות העוסקים בחשיבה אלגברית. אחד היתרונות להצגה מוקדמת של גישת המודליזציה הוא שהתלמידים מפתחים את היכולת להשתמש בייצוגים כדי לפתור בעיות הכרוכות בחשיבה אלגברית, עוד לפני שהם לומדים אלגברה. ייצוגים מצוירים המופיעים במודלים עוזרים לתלמידים להבין טוב יותר הן סמלים והן מניפולציות של משוואות אלגבריות, משום שהם כבר רכשו ניסיון בשימוש בציורים, כמו מלבנים, ובחלקים של ציורים אלה לייצוג כמויות בגישה של מודליזציה (Kho 1987).

דוגמה נוספת בה השתמשה גב׳ י׳ בכיתתה היתה בעיה של גילאים. היא אמרה שהיא בחרה דוגמה זו משום שהיא זכרה את הקשיים שהיו לה כתלמידה כשניסתה לפתור בעיות כאלו בעזרת אלגברה. יתר על כן, היא דווחה שבעיה זו ריתקה אותה משום שהיא האמינה שהיא תוכל לעזור לתלמידיה, שלא למדו עדיין אלגברה בצורה פורמלית, להשתמש בגישת המודליזציה כדי לפתור את הבעיה. בעיית הגיל ניתנה בניסוח הבא:

מיקי גדולה ב- 5 שנים מג'ואן. סכום הגלאים שלהן הוא 101. מיצאו את הגיל של ג'ואן.

בכיתה, גב׳ י׳ התחילה בשאלה לתלמידים כיצד הם יכולים לייצג את הגילאים של מיקי ושל ג׳ואן בעזרת מלבנים. אחרי שמספר תלמידים הציעו לצייר שני מלבנים שונים, גב׳ י׳ ביקשה מתלמיד לצייר את שני המלבנים על השקף שעל המטול (ראה **איור 2א**). המלבן הראשון ייצג את הגיל של מיקי והיה ארוך ב- 5 יחידות יותר מהמלבן השני, שייצג את הגיל של ג׳ואן.

התלמידים השתמשו באסטרטגיות שונות כדי להשלים את הבעיה. תלמידים אחדים העירו שמכיון שמיקי גדולה מג׳ואן ב- 5 שנים וסכום הגילאים שלהן הוא 101, אז ניתן להפחית את הפרש הגילאים

שלהם, 5, מ- 101 כדי לקבל 96. התלמידים ראו כעת מלבנים בעלי גודל שווה והסיקו שהם צריכים רק לחלק את התוצאה ב- 2 כדי להגיע לפיתרון. תלמידים אלו רשמו –

101 - 5 = 96

96 : 2 = 48

ג'ואן בת 48

תלמידים אחרים גם ציינו שסכום הגילאים הוא 101, אבל הם הוסיפו 5 למלבן שמייצג את הגיל של ג'ואן כדי לקבל את התוצאות ש**איור 2ב**.

בצעד הבא, הם הוסיפו 5 ל- 101 כדי לקבל 106, ראו שיש להם שני מלבנים בגודל שווה, ואז חילקו ב- 2. מכיוון שבבעיה מצוין שמיקי היתה גדולה ב- 5 שנים, תלמידים אלו חיסרו 5 מן הגיל שלה, כדי לקבל את הגיל של ג'ואן. הם כתבו –

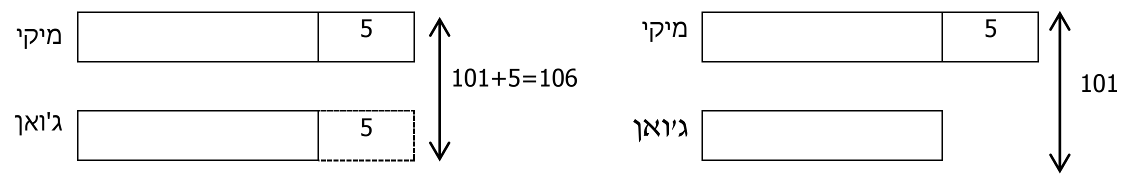
5 + 101 = 106

106 : 2 = 53

מיקי בת 53 שנים

ג'ואן בת 48=5-53 שנים.

איור 2: תלמידים מייצגים את בעיית הגילאים



מיקי גדולה ב- 5 שנים מג'ואן
(א)

הגישה האדיטיבית של תלמידים לפתרון בעיית הגילאים
(ב)

כסיכום לבעיה זו, גב' יי ערכה השוואה בין שתי הגישות של המודליזציה לבין הגישה האלגברית המסורתית. כלומר, היא ציינה שתלמידים יכולים להתחיל בייצוג שני הגילאים בעזרת משתנה יחיד, לאחר מכן לעשות מניפולציה על הביטויים האלגבריים כדי למצוא את המשתנה, כך :

הגיל של ג'ואן = x

הגיל של מיקי = x + 5

סכום הגילאים = x+(x+5) = 2x + 5

2x + 5 = 101

2x + 5 - 5 = 101 – 5

2x = 96

x = 48

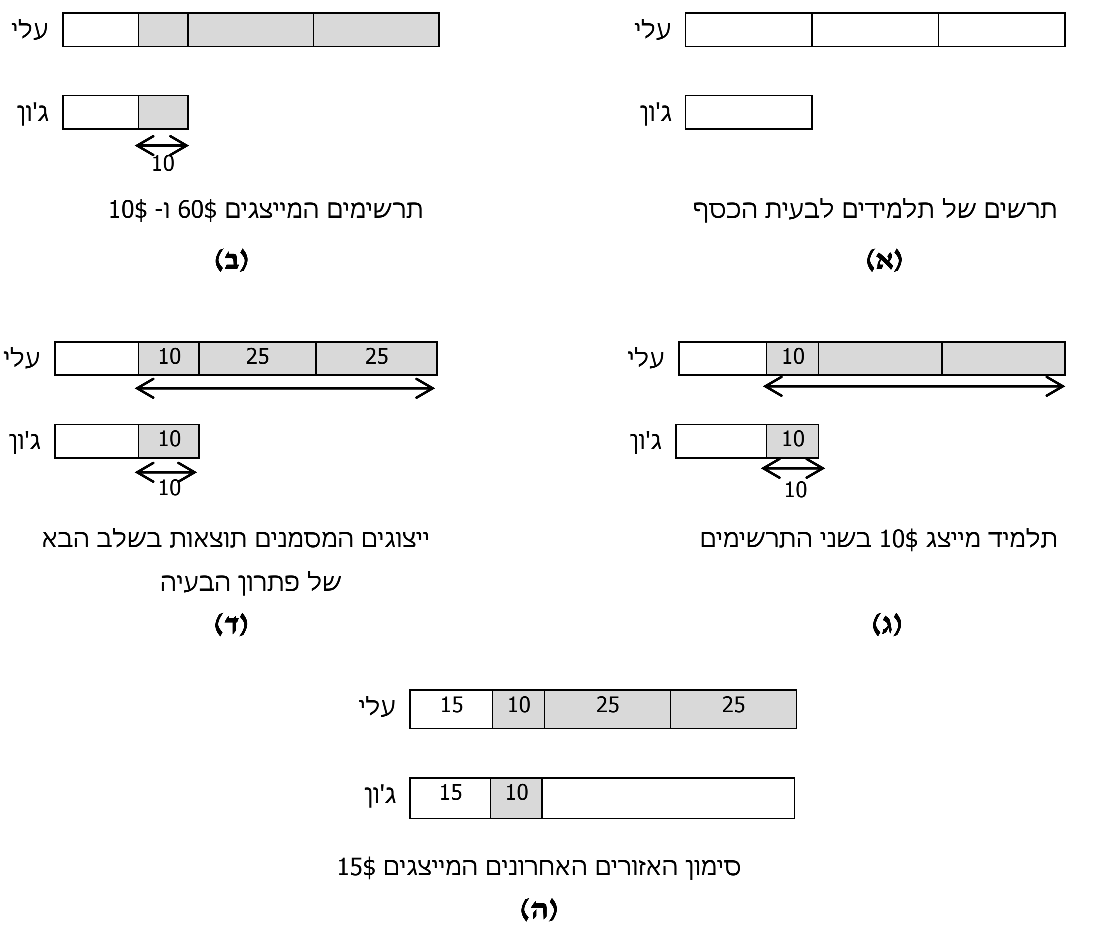
הגיל של ג'ואן = 48 שנים

הבעיה המילולית הבאה היוותה אתגר לתלמידי כיתות הביניים. דוגמה זו ממחישה מצב מסוג אחר שאף הוא עודד את ההתפתחות של חשיבה אלגברית. הבעייה ניתנה בניסוח הבא:

לעלי היה פי 3 כסף מאשר לג'ון. אחרי שעלי הוציא $60 וג'ון הוציא $10, היתה לשניהם כמות שווה של כסף. כמה כסף היה לעלי בהתחלה?

כפי שנהגה לעשות עם מרבית בעיות אלה, גב' י' שאלה תחילה את הכיתה כיצד הם יכולים להתחיל לפתור את הבעיה על ידי ציור של מלבנים. לאחר שדנו על הבעיה בקבוצות, היתה הסכמה כללית שצריך לצייר שני מלבנים, כשאחד מהם מחולק לשלישים כדי לייצג את העובדה שלעלי היה פי 3 כסף מאשר לג'ון. בנקודה זו, תלמידים רבים ציינו שתרשימים אלו היו מובנים להם משום שהם יכלו לראות בקלות שהסכום של עלי גדול פי שלוש מהסכום של ג'ון. התרשים של התלמידים מופיע ב**איור 3א**.
אחרי שציירו תרשים זה, גב' י' ביקשה מן התלמידים לצבוע את האזורים המלבניים המציינים את כמות הכסף שעלי וג'ון הוציאו. התלמידים חזרו לדון בקבוצות שלהם, ולבסוף הסכימו שהם צריכים לצבוע חלק מן התרשים של עלי כדי להראות $60, וחלק קטן יותר מן התרשים של ג'ון כדי להראות $10. מאחר שגב' י' ידעה מראש שמיקום האזורים הצבועים חשוב לצורך פתרון הבעיה, היא הדריכה את התלמידים לסמן את האזורים הצבועים בצד הימני של התרשים. אחד התלמידים צייר את האזורים הצבועים על המטול (ראה **איור 3ב**).
כדי לקדם את ההבנה שלהם, גב' י' ביקשה כעת מן התלמידים לייצג בשני המלבנים את ה- $10 שג'ון הוציא. **איור 3ג** מראה כיצד תלמיד אחר כתב $10 במלבנים של התרשים.
נראה שהצגה זו עזרה לתלמידים לראות את הפיתרון לשאלת המורה, כיצד ניתן לקבוע את הכמויות באזורים הצבועים של עלי. תלמידים רבים השיבו שהם יכולים לחסר 10 מ- 60 כדי לקבל את כמות הכסף הנותרת שעלי הוציא. כאשר התלמידים החסירו 10 מ- 60 וחילקו את מה שנותר ל-2, הם יכלו להציג את התוצאה של 25 בכל אחד משני המלבנים, שביחד הראו שני שליש מהסכום המקורי של עלי. חישובים אלו הסתיימו בייצוג המופיע ב**איור 3ד**.
מנקודת מבט זו, מרבית התלמידים היו מסוגלים לראות ששלושת החלקים של עלי שווים $25 כל אחד. חיסורים נוספים מאפשרים לגלות את הערכים המתאימים לאזורים האחרונים שלא זוהו עדיין, כלומר $25-$10 =$15 , כפי שניתן לראות ב**איור 3ה**. התלמידים הוסיפו את הערכים באזורים המלבניים כדי להגיע למסקנה שלעלי היו בהתחלה $75.

איור 3: תלמידים משתמשים בייצוגים כדי לפתור בעיה קשה יותר



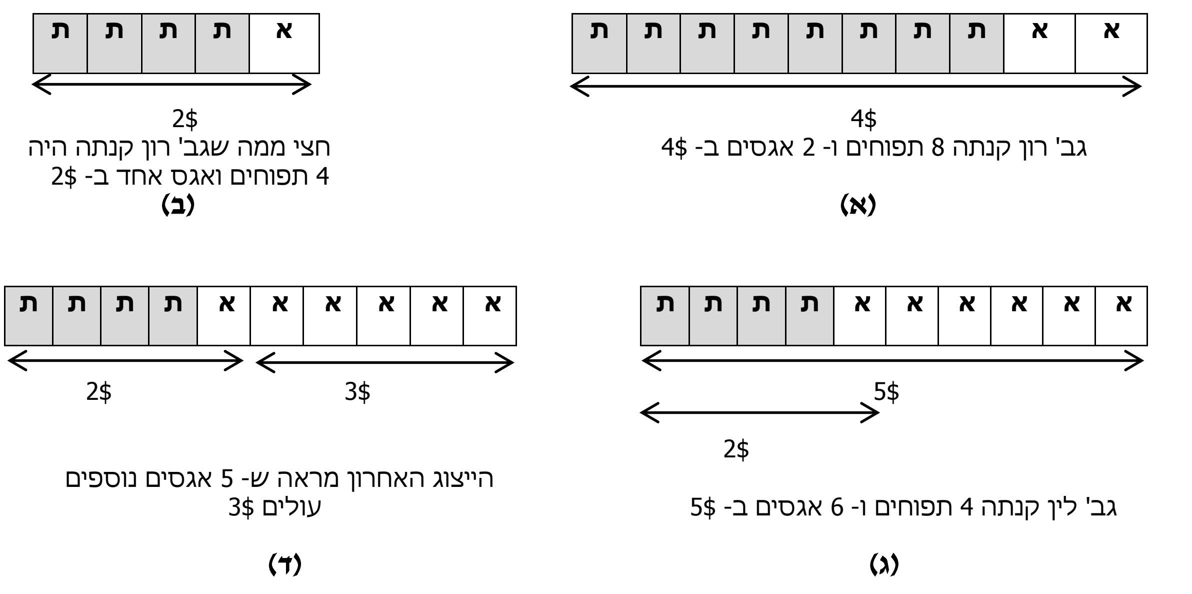
בדוגמה האחרונה מכיתתה של גב' י', גישת המודליזציה שימשה כהקדמה לטכניקות אלגבריות הפורמלית הכרוכות בפתרון משוואות ליניאריות עם שני נעלמים. גב' י' אהבה בעיה זו במיוחד משום שהיא הדגישה את החשיבות של הבאת התלמידים לעשיית קישורים בין חשיבה לוגית לבין מודלים ויזואליים. הבעיה עוסקת בשתי קניות שנעשות בסופרמרקט, כלהלן:

גב' רון קנתה 8 תפוחים ו- 2 אגסים ושלמה $4. גב' לין קנתה 4 תפוחים ו- 6 אגסים ושלמה $5. מיצאו את המחיר של תפוח אחד.

תלמידים אחדים התחילו בכך שניסו לנחש מספרים באופן שרירותי. עם זאת, באמצעות עבודה שיתופית בקבוצות, הם למדו להכיר בערך של חיפוש אחר דרך מתמטית יותר כדי לפתור את הבעיה. לאחר מספר דקות של דיון על הבעיה בקבוצות, תוך היזכרות בדרך שבה השתמשו במלבנים כדי לפתור בעיות קודמות, תלמידים אחדים התחילו את המודלים שלהם בציור מלבן בעל 10 חלקים, כדי להראות את הכמויות והמחיר של הקניה של גב' רון. כדי להפוך את התרשימים למובנים יותר, עודדה המורה את התלמידים להשתמש בצבעים שונים לייצוג סוגי הפירות השונים או להשתמש בסמלים, כמו **ת** לתפוח ו- **א** לאגס. התלמידים ייצגו את החלק הראשון של הבעיה כפי שרואים ב**איור 4**.

לאחר מכן גב' י' הנחתה את תלמידיה לחזור לבעיה המקורית ולחפש קשר בין הכמויות. לאותם תלמידים שנזקקו לעזרה בנקודה זו, המורה הציעה שהם יחשבו כיצד הם יכולים לייצג או לעשות מודל של המחיר של 4 תפוחים ואגס אחד. גב' י' המשיכה להפנות את תשומת הלב של התלמידים לנתון בבעיה המציין שגב' רון קנתה 8 תפוחים ו- 2 אגסים. היא המשיכה לבקש מתלמידיה להתבונן ביחסים שבין הקניה המקורית, 8 תפוחים ו- 2 אגסים, והמודל החדש של 4 תפוחים ואגס אחד. במהרה, כמעט כל התלמידים הבינו שהם יכולים לחלק את הכמויות לחצאים ולצייר מלבן חדש עם חצי מהכמויות (ראה **איור 4ב**).

איור 4: מודליזציה של משוואות סימולטניות



לאחר צעד זה, גב' י' שאלה את התלמידים כיצד הם יכולים לייצג את הקניה של גב' לין. בנקודה זו,התלמידים הרגישו נוח יותר לעבוד עם המודלים. תלמידים רבים זכרו מבעיית הבולים הקודמת שניתן לצרף מלבנים. מסיבה זו הם החליטו להעתיק את הייצוג של החצי מן הקניה של של גב' רון ולהוסיף לזה עוד 5 אגסים. מכיון שתלמידים אלו ידעו כבר את המחיר של 4 תפוחים ואגס אחד, הם כללו את המחיר של 2$ מן המודל הקודם כחלק מהמודל החדש, כפי שניתן לראות ב**איור 4ג**. **איור 4ד** מראה כיצד התלמידים סיימו את הבעיה, על ידי חיסור 2$ מ- 5$ כדי לקבל תוצאה של 3$ כמחיר של 5 האגסים הנוספים.

בצעד האחרון נדרש חילוק של 3$ ל- 5 אגסים וקבלת התוצאה של 0.60$ עבור כל אגס. ככלל התלמידים ציינו ש- 2$ פחות 0.60$ (המחיר של אגס אחד) שווה 1.40$, אותם ניתן לחלק ב- 4 כדי לקבל 0.35$, שזהו המחיר של תפוח אחד.

מחקר על גישת המודליזציה ממשיך להיערך באסיה, ולעיתים קרובות כולל בעיות מילוליות הדומות לאלו שבמאמר זה. האפקטיביות של גישת המודליזציה קיבלה לאחרונה אישור מסידרה של חקר מקרים שבהם יותר מ- 80% של תלמידי כיתות ה' בסינגפור היו מסוגלים לפתור בעיות בשני נעלמים (Yeap and Kaur 2001).

מסקנות

השימוש של המורים בסינגפור בגישת המודליזציה כדי ללמד מיומנויות ומושגים מתמטיים בסביבה של פתרון בעיות, עשוי להמשיך ולקדם את לימודי המתמטיקה של תלמידיהם. ממצא אנקדוטי ממורי החטיבה העליונה בסינגפור הראה שתלמידים נוטים לחזור לגישת המודליזציה כדי לפתור בעיות בכיתות הגבוהות (Fong 1994). יתר על כן, ברגע שתלמידים מכירים את גישת המודלזציה, הם לעיתים קרובות משמיטים את התרשימים המפורטים מן הפתרונות שלהם. ביודעם זאת, אפילו מורים מן הכיתות הגבוהות התחילו לשלב שיטות של מודליזציה בהוראה שלהם. משעה שתלמידים מגלים שליטה בגישת המודלזציה, קל להם יותר לעשות את המעבר לשיטות אלגוריתמיות כדי לפתור בעיות מתקדמות, והם נוטים יותר להצליח בהן.

ביבליוגרפיה

Curriculum Planning and Development Division (CPDD), *Primary Mathematics 5A*. 3rd ed. Singapore: Federal Publications, 1999a.

______. *Primary Mathematics 6A*. 3rd ed. Singapore: Federal Publications, 1999b.

Fong, Ho Kheong. "Bridging the Gap between Secondary and Primary Mathematics." *Teaching and Learning* 14 (2) (1994):73-84.

Greer, Brian. "Modeling Reality in Mathematics Classrooms: The Case of Word Problems." *Learning and Instruction* 7 (4) (1997):293-307.

Kho, Tek-Hong. 'Mathematical Models for Solving Arithmetic Problems." In *Proceedings of the Fourth Southeast Asian Conference on Mathematics Education*, pp. 345-51. Singapore: Institute of Education, 1987.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: NCTM, 2000.

Singapore Ministry of Education. *Mathematics Syllabus: Primary*. Singapore: Curriculum Development Institute of Singapore, 1990.

____. PSLE *Mathematics Questions 1994-1998*. Singapore: Hillview Publications, 1999.

Verschaffel, Lieven. Erik De Corte and Heidi Vierstraete. "Upper Elementary School Pupils' Difficulties in Modeling and Solving Nonstandard Additive Word Problems Involving Ordinal Numbers. *Journal for Research in Mathematics Education* 30 (3) (1999):265-86.

Yeap, Ban-Har. *Problem Solving heuristics for PSLE Mathematics*. Singapore: Bookland Publishers, 2001.

Yeap, Ban-Har and Berinderjeet Kaur. "Mathematics Problems Children in Singapore Solve." Paper presented at the First SEAMEO Educational Congress, Bangkok, Thailand, March 2001.