הוראת מיומנויות חישוב

Teaching Arithmetic

מאת: Marilyn Burns

פרק מתוך: About Teaching Mathematics, Second Edition, Part III, 2000. pp. 139-160

עיבוד ותרגום: אביבה פשחור

הקדמה

מבין כל תחומי המתמטיקה, טכניקות החישוב הפורמליות (אלגוריתמים) קיבלו את המעמד החשוב ביותר בתכניות הלימודים של בתי הספר היסודיים. תלמידים מגיל הגן ועד כיתה ח' בילו כמעט 90% משיעורי החשבון בתרגול מיומנויות חישוב בכתב.

האתגר של המאה ה- 21 קורא לשינוי מהותי בתפישה של החינוך המתמטי. המיומנויות הבסיסיות שילדים צריכים, כוללות הרבה מעבר לחישובים. עליהן לכלול לימוד שימוש במספרים כדי לנתח מצבי בעיות מסובכות, להגיע לתשובות הגיוניות, ולהעריך את היעילות של דרכים שונות לפתרון.

הטכנולוגיה תורמת לשינוי הזה. לפני עידן המחשבונים, מיומנויות בטכניקות חישוב היו מאד חשובות. השימוש בנייר ועיפרון היה הדרך היחידה לחישובים מסוימים. לכן הוראת מיומנויות אלה היתה הבחירה הנכונה. מכיוון שהיום הגישה למחשבונים היא קלה ונוחה, הקדשת רוב הזמן למיומנויות חישוב של נייר ועיפרון אינה הגיונית. יש ללמד ילדים להשתמש במחשבון, ובעיקר הם צריכים ללמוד מתי להשתמש במחשבון, מתי לחשב בע"פ, מתי להשתמש בנייר ועיפרון, ומתי השערה ואומדן מספיקים כתשובה.

כמובן שמיומנויות חישוב הם כלים חשובים שיש להם שימוש יומיומי. מי שלא מסוגל לחשב הינו נכה מבחינה מסוימת. אבל הוראת אלגוריתם כבעל עדיפות עליונה בהוראת החשבון, אינה מספקת.

חוסר ההתאמה בין האריתמטיקה של בית הספר והאריתמטיקה שבחיים

כיוון שאריתמטיקה הינה מיומנות חיים בסיסית, יהיה זה הגיוני לבחון יישומים יומיומיים של האריתמטיקה כאשר עושים החלטות מה צריך ללמד ילדים. דרך אחת להתחיל, הינה לזהות את השימושים היומיומיים של האריתמטיקה. נסו לערוך רשימה של כל המקרים בהם נעזרתם באריתמטיקה בחודש האחרון, הביאו דוגמאות מגוונות ככל האפשר. רשימה זו יכולה לעזור לכם בהחלטה מה ואיך צריך ללמד בבית הספר.

מבוגרים שעורכים רשימה כזאת, כוללים בדרך כלל, את המצבים הבאים:

איזון חשבון הצ'קים; בסופרמרקט, מחשבים כמה מוציאים או עורכים השוואות בין מחירים; כאשר מחשבים שטח של קיר, ריצפה או חלון לצורך קנית צבע, וילון או שטיח; חישוב דמי השירות במסעדה; חישוב הקילומטרז' של מכונית; חישוב זמן לאפית עוגה; חישוב זמן יציאה על מנת להגיע בזמן לעבודה, לסרט וכו'.

רשימה כזו מעידה על חשיבות האריתמטיקה בחיי היום-יום. על מנת לחדד את הדיון, יש לשאול את שתי השאלות הבאות:

מה היא שיטת החישובים התדירה ביותר - מחשבון, נייר ועיפרון, חישוב בע"פ?

מתי תשובה מדויקת חשובה? מתי תשובה משוערת מספיקה, או אפילו עדיפה?

מחקרים מראים ש- 93% מהחישובים שמבוגרים עושים בחיי היומיום אינם חישובי נייר ועיפרון (הם יחשבו בע"פ או ישתמשו במחשבון). 50% מהחישובים אינם דורשים תשובה מדויקת, ותשובה משוערת מספיקה.

לעומת זאת בכיתה, מורים מודים שהם מבלים יותר מ- 75% ואולי קרוב ל- 90% מהזמן בהוראת חישובי נייר ועיפרון ודורשים מילדים לתרגל חישובים המנותקים מכל מצבי בעיות. תרגילים אלה בדרך כלל מוצגים בספרי הלימוד או על דפי עבודה מסודרים יפה. המורים מעודדים ילדים לשער בדרך לתשובה, אבל תמיד דורשים תשובה מדויקת.

ניתן לבחון את חוסר ההתאמה בין העבודה הנדרשת מילדים בבית הספר לבין צורת החישובים בחיי היומיום בדוגמאות מפורטות:

אתם מוצאים עצמכם בסופרמרקט בלי פנקס צ'קים ורק עם 20 ש"ח. אתם צריכים לעקוב אחרי המחירים של המצרכים שאתם שמים בעגלה כדי להימנע ממצב מביך בזמן התשלום. אתם תחשבו את הסכום הרץ, ולרוב תעשו זאת בע"פ (יש היום סופרמרקטים שמציעים מחשבון צמוד לכל עגלה!) אם חבילת גבינה עולה 2.39 ש"ח, בודאי תוסיפו 2.50 ש"ח; אם במבה עולה 0.89 ש"ח תוסיפו 1.00 ש"ח. אף על פי שתנסו לדייק בחישובים, הגיוני שתעגלו מחירים על מנת להימנע מחישובים מייגעים. לא רק שזה הגיוני, זה אפילו כדאי לעגל מעט כלפי מעלה כדי לא "להיתפס" עם מעט מדי כסף בקופה.

דוגמא אחרת: מתן דמי שירות במסעדה. אכלתם במסעדה והחשבון הראה 32 ש"ח. רוב הסיכויים שתבחנו את החשבון ע"י עיגול ואומדן. נניח שהאוכל היה טוב והשרות מהיר ואדיב. כמה דמי שירות תשאירו? כיצד תחשבו זאת? לרוב הכלל מחייב השארת 15%. רוב הסיכויים שתחשבו זאת בע"פ, ורוב הסיכויים שתעשו זאת בשיטה שונה מזו שלמדתם בבית הספר. יש אנשים שמחשבים קודם 10% (3.20), אחר-כך חצי מ- 10% (1.60) ומחברים (4.80) השאלה כמה תשאירו? 4.80? 5.00? יותר? פחות?

דוגמא נוספת: חישוב דלק לפי ק"מ. יש אנשים שבאופן קבוע מחשבים את כמות הדלק שהם מכניסים למכונית ביחס לק"מ שנסעו, על מנת לבדוק את רמת הביצוע של המכונית. נניח שתכולת הדלק במיכל היא 21.7 ליטר. מונה הק"מ מראה 253 ק"מ מאז המילוי האחרון. כיצד תחשבו ק"מ לליטר? אתם יודעים שצריך לחלק. אם יש לכם מחשבון זמין, אולי תשתמשו בו. לעומת זאת, אם תחשבו בע"פ, רוב הסיכויים שתעגלו את המספרים למספרים יותר "ידידותיים": 21.7 תעגלו ל- 22, 253 ל- 250 ותקבלו קצת יותר מ- 11 ק"מ לליטר. אומדן זה יספיק לצורך ההחלטה שהמכונית אינה זקוקה לתשומת לב מידית. אבל נניח שהגעתם לתשובה של 8 ק"מ לליטר. מה תעשו? רוב הסיכויים שקודם תבדקו את החישובים שלכם, כיון שאתם יודעים מה היא תשובה הגיונית לבעיה, ואחר כך תחליטו אם המכונית זקוקה לטיפול מיידי.

השוו בין הדוגמאות הנ"ל, הלקוחות מחיי היום יום, לעבודה שילדים בדרך כלל מתבקשים לעשות בבית הספר. רוב התרגול שילדים עושים מנותק ממצבי בעיות: הם אינם צריכים לבחור את הפעולה המתאימה ואינם מחליטים על מספרים הגיוניים לשימוש. הם אינם מתבקשים להחליט על דרך חישוב הגיונית, אבל מצופה מהם להשתמש באלגוריתם באמצעות נייר ועיפרון, שלימדו אותם. אע"פ שמעודדים אותם לבדוק מחדש את התשובות שלהם, רוב התלמידים אינם רוצים לעשות זאת. כיון שהתרגילים מובאים ללא תוכן

מסוים, אין להם דרך להבחין מייד בתשובה שאינה הגיונית, ובמקרים מסוימים ממש מגוחכת. אומדנים בדרך כלל אינם מקובלים כתשובות לבעיות חישוב. ספרי הלימוד לפעמים מבקשים מילדים לתת תשובה משוערת לפני החישוב המדויק כדי לעזור להם לבדוק אם החישוב המדויק הוא נכון, אבל ילדים לרוב אינם עושים זאת. מדוע שישערו אם הם צריכים לחשב במדויק? מדוע לעשות את העבודה פעמיים? כיון שהחישובים אינם ניתנים במצבי בעיות לא ניתנת לילדים ההזדמנות להחליט אם המצב דורש תשובה מדויקת או אומדן. המוטיבציה שלהם לפתור את הבעיות מאד שונה מהמוטיבציה של האדם בסופרמרקט, במסעדה או בתחנת דלק.

מהן מיומנויות חישוב בסיסיות?

במצבים הקוראים לפעולות חישוב בחיי היומיום אנו נדרשים לעשות את הדברים הבאים:

1. לבחור בפעולה או בפעולות החישוב המתאימות למצב;
2. לבחור במספרים המתאימים;
3. לבצע את פעולות החישוב בעזרת מחשבון, בכתב, או בע"פ;
4. לבדוק אם התוצאה הגיונית ולהחליט מה לעשות הלאה.

בבית הספר לעומת זאת, הילדים בדרך כלל מתבקשים לעשות רק את הצעד השלישי ובדרך כלל יש להם רק אפשרות אחת, חישוב בכתב על פי טכניקות שנלמדו בכיתה. הדגש על ההיבט הצר הזה אינו מפתח אצל הילדים אפילו מוכנות מינימלית לפתרון בעיות מציאותיות.

מדוע חישובי נייר ועיפרון הפכו להיות המוקד של הוראת החשבון בבית הספר היסודי? זאת קל להבין. היכולת לבצע פעולות חשבון הינה מיומנות חיים הכרחית. הוראת טכניקות חישוב הושרשה בבתי הספר הרבה לפני עידן המחשבונים והמחשבים, בתקופה שלא היתה דרך אחרת יעילה להגיע לתוצאות של חישובים במספרים גדולים. כיון שהיום מחשבונים ומחשבים הם בהישג יד בכל מקום, אין זה הגיוני להמשיך ולבקש מילדים לבזבז שש שנים מהחיים שלהם בלימוד חישובי נייר ועיפרון כמו שאין זה הגיוני לבקש מהם ללמוד לרכב על סוס למקרה שהמכונית המשפחתית תתקלקל.

עם או בלי טכנולוגיה, הוראת חישובי נייר ועיפרון בצורה מבודדת מכל תוכן, מעולם לא הבטיחה שילדים אכן ידעו להשתמש במיומנויות אלה במצבים שהם צריכים לישמם. מורים נתקלים שוב ושוב בילדים המסוגלים לבצע פעולות חשבון אפילו במספרים גדולים, אך אינם מסוגלים לפתור בעיות מילוליות פשוטות ביותר, ושואלים: "האם אני צריך לחבר או לחסר?" תרגול מיומנויות חישוב בצורה

מבודדת לא מוביל ילדים להבחנה בטעות בבעיית חילוק פשוטה, כאשר הם מתעלמים מה- 0 במחלק, למשל, ומקבלים תוצאה קטנה פי 10.

כל זה אינו בא להגיד שילדים אינם צריכים ללמוד מיומנויות חישוב. מיומנויות חישוב הן מיומנויות חיים חיוניות. ביצוע פעולות חישוב בע״פ דורש שליפה של העובדות הבסיסיות והיכולת לעגל לשם אומדן. שימוש מוצלח במחשבון והיכולת לבדוק את התוצאה דורש הבנה של תהליכי חישוב והיכולת לזהות תוצאות הגיוניות. גם היכולת להשתמש בנייר ועיפרון לצורך פעולות חישוב מסוימות חשובה. אך אין מקום היום בבית הספר להתמקד על תכנית שכולה מבוססת על מיומנויות חישוב המבודדות ממצבי בעיות ולהכריז שמלמדים את הילדים חשבון. ההגדרה עצמה של הוראת חשבון צריכה להשתנות. אי אפשר למדוד את הישגי הילדים בחשבון על סמך היכולת שלהם לפתור תרגילי חשבון מבודדים. הישגים צריכים להימדד על פי היכולת של הילדים להחליט באיזו פעולה או פעולות עליהם לנקוט במצב נתון, באיזה מספרים להשתמש, ואיזה החלטה עליהם להחליט כאשר הם קיבלו את התוצאה. אין זה הגיוני לומר שילד יודע חשבון אך אינו יכול ליישם את הידע שלו במצבי בעיות. ביצוע פעולות חשבון חייב לכלול את יכולת היישום ואת יכולת החישוב. כמו שלא נוכל לומר שאדם היודע את סולם התווים יודע לנגן על פסנתר, שאדם שיכול לכדרר כדור רגל על מגרש יודע לשחק את המשחק, שאדם היכול לנסר לוח עץ הוא נגר, לא נוכל לומר שאדם שיודע לחשב מבין חשבון. הכלים הם חשובים, אך אינם מהווים מטרה בפני עצמה, חייבים לדעת להשתמש בהם וליישם אותם.

הידיעה שנוכל להשתמש וליישם מיומנויות במצבים אמיתיים מהווה מוטיבציה ללימוד. ילדים הלומדים תווי מוסיקה, שמעו מוסיקה והם מבינים מדוע הם לומדים תווים. ילדים שמתאמנים בכדרור, ראו משחק כדור רגל והם שואפים לשחק. בבית הספר לעומת זאת, אנו מצפים מילדים לתרגל מיומנויות חישוב ללא שום הבנה מדוע הם לומדים את המיומנויות האלה ומה יהיה השימוש שלהם בעתיד. לכן אין פלא שהרבה מאד ילדים מאבדים את המוטיבציה ללמוד מתמטיקה. הם לא רואים בזה שום הגיון. במקום לגרום להם להבין שמיומנויות חישוב הם כלים יעילים שחוסכים זמן, ילדים לרוב רואים בהם עבודה מיותרת, ומטרתם היחידה היא לסיים את דף העבודה שלפניהם כדי שיוכלו לצאת לשחק.

המציאות מראה שרוב הילדים לא מצליחים ליישם את מיומנויות החישוב שרכשו אפילו בבעיות המילוליות הפשוטות ביותר. הרבה ילדים אינם מסוגלים להחליט אם זה זול יותר לקנות שני פריטים ב- 5 אג׳ או שלושה ב- 10 אג׳. הם ״הולכים לאיבוד״ כאשר נשאלים אם 1/3 כוס ועוד 1/2 כוס יהיו יותר או פחות מכוס אחת. לעומת זאת כאשר אותם ילדים מראים הישגים מצוינים בפתרון דף מלא תרגילי חשבון מסובכים, המורים אומרים עליהם שהם יודעי חשבון.

אנו חייבים לשנות את ההגדרה הפשוטה והבלתי הגיונית שקובעת שהישגים במיומנויות חישוב מעידים על ידע מתמטי. אנו חייבים להרחיב את ההגדרה לגבי מיומנויות החשבון הבסיסיות. ילדים חייבים לפתח הבנה של פעולות החשבון בתוך תוכן של פתרון בעיות. הם חייבים ללמוד לחשב בע״פ, להרגיש נוח בתוך עולם המספרים בצורה שתאפשר להם לאמוד תשובות, להבין את היחסים בין המספרים ופעולות החשבון, לבטוח בהבנה המספרית שלהם ולפתח הערכה והתפעלות מהמספרים.

תוצאות ממחקרים בכיתה

תלמידי כיתה ד׳ באחד מבתי הספר בניו-יורק, נתבקשו לחשב 21×19. זה היה מוקדם בדצמבר. המורה עדיין לא נגעה בנושא הכפל, אבל ידעה שהתלמידים התנסו כבר בכפל אנכי בכיתה ג׳. המורה חילקה את הכיתה לקבוצות עבודה קטנות וביקשה מכל קבוצה לבחור מדווח שיכתוב במדויק כל מה שהקבוצה עשתה. היא הסתובבה בין הקבוצות, שאלה שאלות והעירה הערות בכתב על דפי הדיווח שלהם. מטרת המורה היתה לבחון את הבנת הילדים ודרך החשיבה שלהם ולא רק את הידע שלהם לגבי האלגוריתם של כפל אנכי.

הנה מה שקרה בכיתה:

<u>הקבוצה האדומה:</u>

ילדים: ״קודם עשינו 9×1. אחר כך עשינו 1×1. אתר כך ירדנו שורה ושמנו 0 תחת ה-9. אחר כך הכפלנו את ה- 2 ב- 9 ואת ה- 2 ב- 1. עכשיו שיש לנו שתי תשובות (אחת למעלה ואחת למטה) חיברנו אותם וקיבלנו תשובה של 399״:

$$\begin{array}{r} \times\ 19 \\ \underline{21} \\ +\ 19 \\ \underline{380} \\ 399 \end{array}$$

המורה : ״מדוע ירדתם שורה אחת למטה? מה משמעות שתי התשובות? מדוע חיברתם אותן?״

ילדים : ״החלפנו שורות בגלל שהכלל אומר שצריך לשנות שורה והכלל אומר שצריך לשים 0 בהתחלת השורה השניה. אלה הם הכללים, בגלל שאין דרך לקבל 399 עם 380 באותה שורה של 19. כך למדנו בכיתה ג'. חיברנו אותם בגלל שכך למדנו וזה נותן תשובה הגיונית.״

המורה : ״האם אתם יכולים להסביר כל מספר בתשובה שלכם?״

ילדים : ״19 אומר ש- $1\times19=19$. 38 אומר ש-$2\times19=38$ (יש לזכור שחשוב לשים 0 בהתחלת השורה השניה). 399 אומר ש- $19+380=399$. ככה עשינו את הבעיה.״

המורה : ״מדוע יש כלל שאומר לשים 0 בתחילת השורה השניה? מה מטרת הכלל?״

ילדים : ״אף אחד בקבוצה שלנו אינו זוכר מדוע יש כלל לשים 0 בשורה השניה. כבר אמרנו לך שהכלל אומר לשים 0 בשורה השניה.״

<u>הקבוצה הכחולה:</u>

ילדים : ״ככה פתרנו את הבעיה. קודם כל עשינו 19×21 וקיבלנו 389 ומצאנו שזה לא נכון. המורה כתבה מספר תשובות על הלוח ואמרה שהן לא נכונות. התשובות היו 57, 819, 3 ו- 389. ואז, אחרי בערך 5 דקות מצאנו שהתשובה האמיתית היא 399. חיברנו 21, 19 פעמים. הוכחנו את זה על ידי זה שעשינו מלבן שגודלו 21×19. הדרך שבה כותבים את התשובה היא כזאת:

$$\begin{array}{r} \times\ 19 \\ \underline{21} \\ +\ 19 \\ \underline{380} \\ 399 \end{array}$$

זו הדרך שבה כותבים את התשובה בגלל שכל פעם שמכפילים שני מספרים דו סיפרתיים, קודם כותבים את התשובה הראשונה, ואחר כך כותבים 0 בשורה השניה לפני שמכפילים."

המורה: "כיצד קיבלתם את התשובה הראשונה? מה המובן של התשובה הראשונה?"

ילדים: "מקבלים את התשובה הראשונה על ידי שעושים 1 × 19. זה אומר שהחלק הראשון נעשה."

המורה: "מדוע כתבתם 0 בשורה השניה? מה מראה המספר בשורה השניה ?"

ילדים: "זה עושה את המספר יותר גדול. השורה הזאת צריכה להיות השורה של המספר הגדול."

המורה: "מדוע שורה זו צריכה להיות יותר גדולה?"

ילדים: "ככה מקבלים תשובה הגיונית."

המורה: "מדוע כתבתם 380? איזה מספרים כפלתם כדי לקבל 380?"

ילדים: זה מראה 38 עם 0 בסוף. מכפילים 19 × 20 ומקבלים 380".

המורה: "איפה ה- 20?"

ילדים: "ה- 20 זה ה- 21 בלי האחד בגלל שכבר הכפלנו את ה- 1."

<u>הקבוצה הסגולה:</u>

ילדים: כתבנו את זה ככה:

$$\begin{array}{r} \times\ 19 \\ \underline{21} \\ +\ 19 \\ \underline{38} \\ 57 \end{array}$$

אחר כך גילינו ששכחנו את האפס במספר השני."

המורה: "איך אתם יודעים שצריך שיהיה אפס בתשובה? ואיך גיליתם שהתשובה הראשונה לא נכונה?"

ילדים: "צריך לשים אפס במספר השני בגלל שכאשר מכפילים עם עשרות שמים אפס במקום של האחדות בגלל שלא עובדים עם האחדות. הבנו שהתשובה צריכה להיות הרבה יותר גדולה מ- 57 בגלל שאם כותבים 21 × 19 זה לא יהיה 57 זה יהיה הרבה יותר גדול.

אחר כך כתבנו 19, 21 פעמים. אחר כך מחקנו שני 19 כל פעם וכתבנו 38. אחר כך מחקנו שני 38 כל פעם וכתבנו 76. אחר כך מחקנו שני 76 כל פעם וכתבנו 152. כאשר גמרנו זה נראה כך:

$$\begin{array}{r} 152 \\ +\ 152 \\ \underline{95} \\ 399 \end{array}$$

לבסוף כתבנו את זה ככה וזה היה נכון:"

$$\begin{array}{r} \times\ 19 \\ \underline{21} \\ +\ 19 \\ \underline{380} \\ 399 \end{array}$$

המורה: כיצד החלטתם לכתוב את זה ככה?"

ילדים: חישבנו את התשובה בחיבור ואחר כך חישבנו אותה ככה."

אם ילדים אלה היו מקבלים בוחן בחישובים, יש להניח שהקבוצה האדומה היתה מצליחה. ובכל זאת גם בהסברים שלהם וגם בתשובות שלהם למורה, הילדים תמיד נשענו על הכללים שלמדו מבלי יכולת להסבירם. הקבוצות האחרות היו מסוגלות ליחס כפל לחיבור ולאמת את תשובותיהם בדרך זאת.

נראה שהקבוצה הכחולה היתה הקבוצה שהצליחה ביותר בהסברת התשובות החלקיות. כאשר נתבקשו להסביר כיצד הגיעו ל- 380, הם כתבו שזאת התוצאה של 19×20. הקבוצה הסגולה לעומת זאת יכלה להצדיק את האלגוריתם האחרון רק בגלל שהתוצאה היתה התשובה הנכונה.
מה ילדים אלה מבינים על כפל?

במהדורת מרץ 1983 של כתב העת School Science and Mathematics, דווחו החוקרים T.C. O'Brien ו – S.A.Casey, על תוצאות מחקר שערכו עם ילדי כיתות ד', ה' ו- ו'.
הילדים נתבקשו להשלים תרגילים אלה:

1. $6 \times 3 =$
2. $16 \times 3 =$
3. $60 \times 1 =$
4. $13 \times 16 =$
5. $3 \times 60 =$

אח"כ הילדים נתבקשו לכתוב בעיה מילולית ל- 6×3.
תוצאות החישובים: 82% מילדי כיתות ד', 75% מכיתות ה', ו- 97% מילדי כיתות ו' פתרו את התרגילים בהצלחה. לגבי הבעיה המילולית התוצאות היו שונות: רק 25% מילדי כיתות ד' כתבו סיפורים שהתוכן שלהם היה כפל; 15% מכיתות ה', ו- 69% מכיתות ו'. יותר ממחצית הסיפורים היו קשורים ל- $6 + 3$ ולא 6×3, אף על פי שהרבה מהסיפורים הסתיימו בתרגיל $6 \times 3 = 18$.

מה ילדים אלה מבינים על כפל?

תלמיד שמסוגל לבצע חישובים על דף לפעולה מסוימת מראה הבנה של תהליכים, הוא יודע "מה לעשות" במצב. זה לא מבטיח שהתלמיד מבין את ה"מדוע" של התהליך - מדוע זה עובד, מדוע זה הגיוני, מדוע זה שימושי למצבי בעיות. לדעת "מה לעשות ומדוע" משמעו הבנה של תהליך אריתמטי ביחס למשמעות שלו והיישומים שלו.
הקבוצה האדומה בכיתה שתיארנו, הציגה הבנה של התהליך האריתמטי של 19×21. הם ידעו מה לעשות במצב והגיעו לתשובה הנכונה. כאשר נשאלו כיצד הגיעו ל- 380 הם נתלו על הכלל שמכתיב "אפס בתחילת השורה השנייה בכפל דו סיפרתי: "$2 \times 19 = 38$. (זכור לשים אפס בשורה השניה.)"

הקבוצה הכחולה, לעומת זאת, התקשתה להסביר את משמעות המספר 380: "מכפילים 19×20 לקבל 380. ה- 20 זה ה- 21 בלי האחד כיון שכבר הכפלנו את האחד." אף על פי שההבנה שלהם לא היתה מושלמת, כמו שרואים בהסברים שלהם, ההסבר שלהם מצביע על הבנה של "מה לעשות ומדוע" מעבר לכללים שנלמדו בע"פ.

ניסיון שונה נעשה ע"י אותה מורה, עם ילדי כיתה ה', גם כן בדצמבר. המורה ביקשה מהילדים לעבוד באופן עצמאי על בעיית כפל, וכאשר הם חושבים שהגיעו לתשובה הנכונה להסביר מדוע הם חושבים שהתשובה שלהם הגיונית. משימה זו ניתנה לילדים לפני שהמורה נגעה בנושא הכפל (דו-סיפרתי בדו- סיפרתי), אבל ילדים אלה למדו על כפל בכיתות קודמות.

תשעה ילדים חישבו במדויק:

$$\begin{array}{r} \times\ 47 \\ \underline{23} \\ +\ 141 \\ \underline{940} \\ 1{,}081 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 47 \\ \underline{23} \\ +\ 141 \\ \underline{94} \\ 1{,}081 \end{array}$$

הנה ההסברים שכתבו:

- התשובה שלי הגיונית בגלל שחיברתי 141 ו- 940.
- אני חושב שהתשובה שלי הגיונית כיון שעבדתי בזהירות.
- התשובה שלי הגיונית כיון שזה הכפל והחיבור הנכון.
- התשובה שלי הגיונית בגלל שבדקתי אותה.
- אני חושב שזה הגיוני כיון שחיברתי את המספרים הנכונים וכפלתי את המספרים הנכונים.
- אני חושב שהתשובה שלי הגיונית כיון שעבדתי לאט ובדקתי את התשובה.
- אני חושב שהתשובה שלי הגיונית בגלל שאם מעגלים 47 ל- 50 ו- 23 ל- 20 אז $50 \times 20 = 1{,}000$ ו-1,000 זה קרוב ל 1,081.
- אני חושב שהתשובה שלי הגיונית בגלל ש-23 זה כמעט 20, ו-47 זה בערך 50, ו- 50×20 זה 1,000. התשובה שלי בערך 1,000

התשובות הלא נכונות היו שונות וגם ההסברים:

$$\begin{array}{r} \times\ 47 \\ \underline{23} \\ +\ 141 \\ \underline{840} \\ 981 \end{array}$$

התשובה שלי הגיונית כיון שאני יודע להכפיל בצורה כזו.

$$\begin{array}{r} \times\ 47 \\ \underline{23} \\ +\ 141 \\ \underline{94} \\ 1{,}135 \end{array}$$

אני חושב שהתשובה שלי הגיונית כי אני מבין את הבעיה.

$$\begin{array}{r} \times\ 47 \\ \underline{23} \\ +\ 134 \\ \underline{1480} \\ 1{,}614 \end{array}$$

זה הגיוני כיוון שעשיתי מה שאני צריך לעשות.

$$\begin{array}{r} \times\ 47 \\ \underline{23} \\ +\ 141 \\ \underline{8{,}140} \\ 8{,}281 \end{array}$$

אני חושב שהתשובה שלי הגיונית כיון שעשיתי את הבעיה צעד אחרי צעד וזה מה שיצא לי.

$$\begin{array}{r} \times\ 47 \\ \underline{23} \\ +\ 141 \\ \underline{940} \\ 1{,}161 \end{array}$$

התשובה שלי הגיונית בגלל שאני יודע את לוח הכפל ושמתי לב לעבודה.

$$\begin{array}{r} \times\ 47 \\ \underline{23} \\ +\ 141 \\ \underline{614} \\ 755 \end{array}$$

התשובה שלי היא בסדר בגלל שאם תיקחו את ה-4 ואת ה-2 ותכפילו אותם תקבלו 8 ואם תעגלו 755 תקבלו 800.

$$\begin{array}{r} \times\ 47 \\ \underline{23} \\ +\ 141 \\ \underline{1{,}210} \\ 1{,}351 \end{array}$$

בגלל שעשיתי את זה ארבע פעמים.

$$\begin{array}{r} \times\ 47 \\ \underline{23} \\ +\ 141 \\ \underline{00} \\ 1{,}083 \end{array}$$

התשובה שלי הגיונית כי 141 × 23 זה 1,083.

רוב הילדים, בין אם חישבו נכון או לא, התקשו להסביר מבחינת התהליכים שעשו או מבחינת משמעות הפעולה. רק שלושה ילדים ניסו להסביר את תשובותיהם עם התייחסות לכמויות המספריות.

מגבלות ההוראה על פי כללים

הוראת כללים הינה שיגרה בשעורי מתמטיקה. מלמדים ילדים לחבר קודם אחדות ואחר כך עשרות בחיבור דו ספרתי, לשים 0 בתחילת השורה השניה בכפל אנכי, להתחיל משמאל בחילוק, לכפול מונים במונים ומכנים במכנים בכפל שברים פשוטים, לחלק את המונה והמכנה באותו מספר כאשר רוצים לצמצם שברים פשוטים, לדאוג שכל הנקודות של השברים העשרוניים באותו טור בחיבור, לספור את הנקודות אחרי הנקודה העשרונית על מנת לדעת היכן לשים את הנקודה אחרי כפל של מספרים עשרוניים, וכו'. יש מצבים שהכללים של האלגוריתם הינם חסרי משמעות, ובכל זאת ילדים מתבקשים לא לסטות מהכללים. למשל, מקובל שבכיתה ב' לומדים חיבור דו סיפרתי. לרוב מתחילים עם מספרים שאינם דורשים המרה:

$$\begin{array}{r} +\ 34 \\ \underline{21} \end{array}$$

התהליך שמלמדים הוא סטנדרטי: קודם מחברים את האחדות ואחר כך את העשרות. מורה שתבחין בילדים שמתחילים בעשרות, בדרך כלל תבקש מהם לחזור ולחבר מהאחדות. מדוע, הרי במקרה זה אין זה משנה אם מחברים קודם את העשרות ואחר כך את האחדות? ההסבר: אם ילדים ילמדו בדרך הנכונה בדוגמאות פשוטות יהיה להם קל ליישם כלל זה עם מספרים שדורשים המרה. למראית עין זוהי החלטה

שתומכת בתהליך הלמידה של הילדים. אלא שלכלל זה אין שום משמעות בחיבור דו-סיפרתי שאינו כרוך בהמרה. הוא אמור להקל על הילדים "בעוד מספר שעורים". הרבה ילדים מצייתים לכלל, אבל לגביהם דף עם תרגילים כאלה פשוט נראה כמו דף עם תרגילי חיבור אנכיים חד-סיפרתיים, שכמה טורים בו נכתבו בצפיפות יתר. יש סכנה בגישה זו אפילו לגבי ילדים שלומדים כללים בקלות. המסר החבוי בגישה הוא שאין זה הכרחי להבין את ההגיון של מה שעושים בחשבון, אבל חשוב לעקוב אחרי הכללים. מסר זה מנוגד למטרה שילדים ילמדו מתמטיקה עם מוטיבציה להבין מושגים ומיומנויות.
יש ילדים בכיתה ב' שמגלים שהם מקבלים אותה תשובה בין אם הם מתחילים מימין ובין משמאל, אבל הם יודעים שהם צריכים להתחיל בעמודה הימנית. אם הם שואלים מדוע (כיצד תענו?) רוב הסיכויים שהתשובה תהיה : "זו-הדרך-שאנו-עושים-זאת", או "זה-יעשה-את-החיים-שלכם-קלים-אחר-כך." אין סיבה אחרת. גישה זו אינה תומכת בילדים שמנסים להבין תהליכים מתמטיים.

הוראת "מה לעשות" בשעורי מתמטיקה זוהי שיגרה. בדקו את ספרי הלימוד או היזכרו כיצד אתם למדתם מתמטיקה. האם אתם זוכרים כיצד למדתם חילוק ארוך, או כיצד למדתם על שטח המעגל, או כיצד למדתם לכפול ביטויים אלגבריים כמו $(2x - 5)\ (x + 3)$ ולא הבנתם מדוע זה עובד? היזכרו בקורסי המתמטיקה בהם השתתפתם. האם זכורה לכם חוויה של "לעבור את הקורס", אפילו בציון טוב, המלווה בהרגשה שלא הבנתם מה למדתם?

אין שום דבר גרוע בידיעת כללים וביכולת ליישם אותם. אבל, חשוב להבין שהוראת תהליכים, והוראת תהליכים עם המשמעות שלהם הם שני דברים שונים לגמרי. כאשר ילדים אינם מבינים את משמעות הכללים, יתכן שתחסר להם הגמישות להתמודד עם מצבים שיהיו שונים אפילו במעט מהמצבים המסוימים אותם למדו.

הרעיונות בספר זה מבוססים על האמונה שהוראה להבנה היא הכרחית. הילדים חייבים לראות במשימות שלהם דבר הגיוני. הגישה המלמדת ילדים כללים ותהליכים מבלי ללמד אותם להבין ולהסביר את התהליכים הינה חסרת אחריות. אסור לצפות מילדים לשנן או להגיד בעל-פה דברים שאינם מבינים.
כאשר ילדים מחסרים לדוגמה:

$$\begin{array}{r} 31 \\ -\underline{16} \end{array}$$

הרבה יגיעו לתשובה כמו 25. הם "למדו" לחסר. הס למדו את הכלל שיש לחסר את המספר הקטן מהמספר הגדול במצבים מסוימים, ואחר כך הם מיישמים אותו במצבים לא מתאימים.

הנה בעיה שהופיעה באחד המבחנים הארציים בארה"ב לילדים בגילאי 13 ו- 17 :

(The 1982 National Assessment of Educational Progress [NAEP])

שערו את התשובה ל 3.04×5.3 :

א. 1.6
ב. 16
ג. 160
ד. 1600
ה. אני לא יודע

פריט זה בחן את היכולת לשער שקצת יותר מ-3 כפול קצת יותר מ-5 זה בערך 16. זוהי התשובה ההגיונית היחידה. הנה התוצאות:

		גיל 13	גיל 17
א.	1.6	28%	21%
ב	16	21%	39%
ג.	160	18%	17%
ד.	1600	23%	11%
ה.	לא יודע	9%	12%

עם זאת, בפריטים שבהם ילדים נתבקשו לבצע חישובים עם שברים עשרוניים, 80%-90% מהילדים בשני הגילאים ענו בהצלחה. העובדה שכל כך הרבה תלמידי תיכון מראים פער בין היכולת לעקוב אחרי הכללים לבין השימוש בהגיון אינה מעודדת.

הוראת "איך לעשות" לעומת הוראת "מה לעשות ומדוע"

מדוע הוראת התהליכים המתמטיים במנותק מהוראת היישומים של תהליכים כל כך שגורה בבתי הספר? יש סיבות רבות שתומכות בהוראת תהליכים בצורה כזו. יש להבין סיבות אלה לפני שמצפים לשינוי משמעותי בדרכי ההוראה:

1. ***ללמד "איך לעשות" זה לרוב קל יותר, מאשר ללמד "מה לעשות ומדוע".*** קחו לדוגמה את הדרך שבה מלמדים חילוק שברים פשוטים. השיטה המקובלת היא להפוך את השבר שבצד ימין של התרגיל ואז לכפול את המספרים שלמעלה זה בזה ואת המספרים שלמטה זה בזה. קל יותר ללמוד (וללמד) כלל זה מאשר להסביר את העיקרון שחילוק הוא המצב ההפוך לכפל, או שחילוק במספר מסוים כמוהו כהכפלתו במספר ההופכי שלו, שבמקרה של חילוק בשבר פירושו כפל בשבר ההופכי.

2. ***ספרי הלימוד מדגישים הוראת תהליכים***. המטרה העיקרית של ספרי הלימוד היא ללמד ילדים לכתוב את התשובות הנכונות, במקום לחשוב ולהבין. זה אולי נשמע קשה. אחרי הכל, אין שום מחבר או הוצאה לאור שיצהירו שאין זה חשוב להם אם ילדים חושבים או לא חושבים לפני שהם עונים נכון. המדריכים למורה מעודדים את המורים ללמד להבנה ולעיתים אף מוסיפים הצעות כיצד לעשות זאת. בפועל, המורים מפרשים כהבנה את העובדה שהילד הצליח לפתור את כל התרגילים בדף. כתיבת תשובות נכונות הינה המטרה העיקרית של ללמד "איך לעשות"; חשיבה, הבנה, והבחנה ביחסים ובחוקיות הינה המטרה העיקרית של ללמד "מה לעשות ומדוע".

3. ***לחץ המבחנים קובע מה נלמד בכיתה***. מורים מרגישים אחריות כלפי רמת הביצוע של התלמידים. לרוב מבחנים אלה בוחנים את יכולת הילדים לבצע פרוצדורות מתמטיות. העובדה שילדים ממשיכים להיכשל במיומנויות חישוב לא מספיקה, כנראה, לשנות עמדות ביחס להוראת המתמטיקה.

4. **קשה לבחון אם ילדים מבינים את "המדוע" של תהליכים אריתמטיים**. אי אפשר לראות מה ילד חושב רק מהעבודה שלו על נייר ועיפרון. חשבו על עבודת הקבוצה האדומה בכיתה ד'. הם פתרו את התרגיל בהצלחה, אבל יכלו להסביר מה שעשו רק על ידי הסתמכות על כללים שלמדו. הערכת עבודתם החישובית בלבד לא תספק אינפורמציה חשובה זו.

5. **לא כל המורים מבינים את ההבדל בין הוראת תהליכים והוראת ההיגיון של האריתמטיקה**. הרבה מורים, ובעיקר מורים של בתי הספר היסודיים, לא מרגישים נוח בתחום המתמטיקה. אע"פ שרובם יודעים לחשב, אין הם תמיד מבינים את ההיגיון של תהליכי החישוב כי לא למדו אותם. הרבה מחקרים מראים שמורים מלמדים בצורה בה הם למדו. מצב זה פוגם במאמץ לשפר את איכות הוראת המתמטיקה.

ישנן כמובן סיבות נוספות המכבידות על שינוי בהוראה: גודל הכיתה (בכמות ילדים ובמרחב הפיזי); חוסר באמצעי המחשה ועזרים מספים; ציבור ההורים שיש לו צפיות ודרישות שאינן עולות בקנה אחד עם הדרך השונה; ועוד.

ננסה להסביר את הגישה התומכת בהוראת תהליכים עם משמעות:

1. **כאשר מבינים "מדוע", הבנה זו עוזרת ליישום מיומנויות במצבים חדשים**. לדוגמה: הוראת ארבע פעולות החשבון בשברים עשרוניים בגישה שתומכת רק בהוראת ה"איך" מתמקדת במיקום הנקודה העשרונית בכל אחת מהפעולות: בחיבור ובחיסור, יש לשים לב שכל הנקודות בטור; בכפל, סופרים את כל המקומות אחרי הנקודה כדי לדעת איפה לשים את הנקודה בתשובה; בחילוק מזיזים את הנקודה במחלק. אם שוכחים כלל אחד, אי אפשר להיעזר בכללים האחרים. לעומת זאת, אם מקשרים בין המספרים השלמים והעשרוניים דרך הבנת המבנה העשרוני, אין צורך בשנון כללים ואין חרדה מהשכחה והשגיאות הצפויות ממנה. פיתוח היכולות וההבנה של הילדים המאפשרות להם ליישם את הלמידה שלהם במצבים חדשים ושונים, חשובים יותר מפיתוח היכולת שלהם לעקוב אחרי כללים.
לא מדובר ב-או/או, אלא ב-גם וגם. ילדים צריכים לדעת לחשב אחוזים. אך ידיעה זו בלבד לא תעזור להם לבחור את תכנית החיסכון הטובה ביותר, המשכנתא הזולה ביותר, או הדרך הטובה ביותר לממן מכונית חדשה. החלטות כאלה דורשות הבנה וכושר שיפוט מעבר להבנה של כללים אריתמטיים.

2. **למידת המשמעות של תהליכים אריתמטיים מקילה על הזיכרון**. כאשר מבינים את המשמעות אין צורך להעמיס על הזיכרון. שגיאה רגילה בחיבור שברים היא, שילדים מחברים את המונים ואחר כך את המכנים. לדוגמה: $1/2 + 1/3 = 2/5$. ילדים ששוגים כך פשוט עובדים לפי כלל, אך לרוע המזל הכלל אינו מתאים במצב זה. חסרה להם גם יכולת הבקרה: אין זה הגיוני להתחיל עם 1/2, להוסיף לו משהו, ולהגיע לתוצאה של 2/5 שהיא קטנה מ- 1/2. הרבה מלימוד מתמטיקה זה לימוד של הגיון וחוקיות, ולא לימוד כללים.

עוד דוגמא מהמבחן הארצי בארה"ב (NAEP):

שער את התשובה בקירוב ל- 7/8 + 12/13

א. 1

ב. 2

ג. 19

ד. 21

מתוך הקבוצה של בני ה-13 כל התשובות קיבלו מעמד שווה, רק 24% ענו תשובה נכונה. (מה היתה המחשבה מאחורי כל אחת מהתשובות הלא-נכונות? מדוע רבים כל כך ענו לא נכון?) תכנית הלימודים והספרים בדרך כלל מחלקים את הוראת מיומנויות החישוב ליחידות קטנות. ילדים שמתקשים לקשר בין יחידות הלימוד הקטנות, בדרך כלל מתבקשים לחזור על החומר שוב ושוב כאילו שזה יעזור. שבירת הנושאים המתמטיים לחלקים קטנים דומה להגשה מתמדת של פרורי עוגיות תוך צפייה שהילד יצרף אותם לעוגיות שלמות. הניסיון לפשט את ההוראה במטרה להקל על הילדים, לרוב מקשה עליהם ומנוגד למה שידוע היום על הדרך בה ילדים לומדים. זה טעות לחשוב שילדים לא יכולים להתמודד עם משמעות ומורכבות.

3. **ללמוד לחשוב בהגיון זוהי מטרה טובה כשלעצמה ותומכת בתהליך הלמידה.** כולנו חווינו את השמחה שנובעת מהבנת תהליך מסוים. כאשר מלמדים ילדים את ההגיון של המתמטיקה מלמדים אותם לראות קשרים בין רעיונות. ראיה זו עוזרת להם להעמיק את ההבנה ואת הידע.

המדד העיקרי לכישלון הגישה של הוראת "איך לעשות" זו ההרגשה של חוסר אונים ושנאה שהרבה אנשים מרגישים לגבי המתמטיקה, כולל אנשים משכילים מאד. קשה להעריך ולאהוב מה שלא מבינים. הציפייה מהמורים היא חד-משמעית: ללמד מתמטיקה בצורה שתעודד ילדים להבין כל מה שאתם מלמדים אותם לעשות.

ילדים יכולים להמציא דרכים לחישוב

כיצד אפשר ללמד מיומנויות חישוב בדרך שילדים ילמדו אין לעשות ומדוע? כיצד ילדים לומדים תהליכים לפתרון בעיות אריתמטיות? מה צריך להיות מקום האלגוריתמים הסטנדרטיים בבית הספר?

היתרון של האלגוריתם שהוא מספק דרך בטוחה לחישוב, ולכן מקל על חישובים שיכולים להיות קשים. חשוב שילדים יבינו שהאלגוריתמים השונים הינם תהליכים שהומצאו ע"י אנשים על מנת לבצע חישובים שנעשים שוב ושוב. חשוב שהם יבינו כיצד האלגוריתם מבוסס על המבנה וההגיון של המספרים. כמו כן חשוב שילדים יבינו שאלגוריתם מסוים אינו בהכרח טוב יותר או יעיל מאחר, ושדרכים רבות, כולל אלה שהם עצמם ממציאים, טובות באותה מידה. אין זה הכרחי שכל הילדים יחשבו באותה דרך, בדיוק כמו שאין זה חשוב שכל הילדים יכתבו באותה צורה (הן מבחינת הכתב והן מבחינת הניסוח).

דרך הוראה המדגישה לימוד אלגוריתמים עלולה לחבל בתהליך הלמידה של הילדים ובניסיונם להבין את המספרים. כאשר ילדים לומדים אלגוריתם הם מתמקדים בזכירת הרצף הנכון של הצעדים, ולא חושבים

או מנסים להבין מצבים מספריים. ידוע שילדים נוטים לטעות בחישוב כאשר הם עסוקים באלגוריתם, והם אינם מבחינים בתשובות לא הגיוניות.

המחקר שערכה Constance Kamii על ילדים צעירים תומך בממצאים אלה. במאמר בשם "Achievement Tests in Primary Mathematics: Perpetuating Lower-Order Thinking" שהופיע בכתב העת *Arithmetic Teacher* (מאי 1991), מופיע דווח של Kamii ושל Barbara Lewis על ממצאים שנתקבלו מהשוואה בין ילדי כיתות ב׳ בשני בתי ספר שונים. באחד מבתי הספר הילדים הורשו להמציא דרכי חישוב לפתרון תרגילים ובעיות מילוליות. בשני, ניתנה הוראה מסורתית של אלגוריתם ואחר כך הזדמנות ליישם מיומנויות בבעיות מילוליות. הישגי הילדים נבחנו ע״י מבחנים פורמליים וע״י ראיונות אישיים. הבנת הילדים נותחה לגבי המבנה העשורי; חיבור דו סיפרתי בטור; סיפורי בעיות; חישוב בע״פ; עיגול ואומדן. תוצאות המבחנים הפורמליים בשני בתי הספר היו דומות, כאשר הילדים מבית הספר השני השיגו תוצאות קצת יותר גבוהות.

לעומת זאת הראיונות האישיים הראו שכאשר ילדים נתבקשו להסביר את הבנתם ודרך חשיבתם, לפתור בעיות לא רגילות, ולחשב בע״פ (משימות שדורשות דרגת חשיבה גבוהה יותר), הילדים שלמדו בדרך החדשנית הצליחו הרבה יותר. כאשר נתבקשו לחשב בע״פ 43 + 98 ו-3 כפול 31, 48% מהילדים בדרך החדשנית ענו נכון על השאלה הראשונה ו- 60% על השנייה, לעומת 17% מהילדים שלמדו בשיטה המסורתית שענו נכון על כל אחת מהשאלות. כאשר נשאלו כמה מכוניות יובילו 49 ילדים לגן החיות, כאשר בכל מכונית יש מקום ל-5 ילדים, 61% מהילדים בבית הספר הראשון ענו בהצלחה, לעומת 29% מהילדים בבית הספר השני.
מחקר זה מעיד שבהוראת מיומנויות חישוב יש לאפשר לילדים להמציא דרכים משלהם לחישוב ולא רק לתרגל תהליכים שהמורה וספרי הלימוד מציגים. לא רק שכדאי להציב בפני ילדים את האתגר של המצאת דרכי חישוב, יש גם לדרוש מהם להסביר את ההגיון של הדרך שלהם. כאשר הם מתארים ומסבירים את דרכם הם מבססים את ההבנה שלהם. בנוסף גישה זו מאפשרת לילדים ללמוד זה מזה.

ילדי כיתה ג׳ בבית ספר בקליפורניה למדו על חילוק דרך פתרון בעיות. הילדים נתבקשו לפתור בעיות חילוק ולהסביר כיצד הגיעו לתשובה, לפני שלמדו על חילוק באופן פורמלי. בעיות עם שארית הוצגו בו זמנית עם בעיות ללא שארית. הילדים עבדו בזוגות או בקבוצות קטנות.
למשל, הילדים נתבקשו לחשוב כיצד לחלק 17 קוביות לארבעה ילדים, לתאר את הדרך לתשובה, ואחר כך להשתמש בקוביות על מנת לאמת את התשובה.

מספר ילדים חיברו כדי להגיע לתשובה. ילדה אחת כתבה: ״כל ילד מקבל 4 קוביות ואחת נשארת. מצאתי את זה על ידי שעשיתי 4 ועוד 4 שווה 8, ו- 8 ועוד 8 שווה 16״.

ילד אחר השתמש בידע שלו על כפל. הוא כתב: ״קודם כל הנחתי קוביה אחת בצד. אחר כך חילקתי את 16 הקוביות. כיון שאני יודע ש 16 = 4 × 4 אז 4 ילדים, כל אחד מקבל 4 קוביות״.

ילדה אחרת ציירה 17 קוביות בשורה אנכית וספרה על מנת לחלק אותם ל-4 חלקים. היא כתבה: "כל ילד יקבל 4 קוביות ותישאר קוביה אחת".

ילדה אחרת כתבה: "אני הולכת לצייר תמונות של 17 קוביות וארבעה סלים. אני שמה בכל פעם קוביה אחת בכל סל. כל סל מקבל 4 קוביות אם אני רוצה שהם יהיו שווים. כיון שיש 16 קוביות בכל הסלים, הקוביה האחרונה נשארת".

ילד כתב: "אני הולך לעשות זאת בזוגות. אני אספור 8 זוגות ותישאר לי קוביה מיותרת. כל ילד יקבל 4 קוביות.

ילדה אחרת החליטה להשתמש במחשבון. דף הדיווח שלה הראה כיצד התמודדה עם הידע המוגבל שהיה לה במספרים עשרוניים. היא כתבה: "כל אחד יקבל 4, ואחד נשים בקופסא. כיצד עשיתי זאת: במחשבון הקשתי: 17:4, זה לא עבד. אחר כך הקשתי 8.5 = 2 : 17. .5 זה חצי, שני חצאים זה שלם. אז זה יוצא 9 + 8. חצי מ-8 זה 4. ויש אחד מיותר".

מספר בעיות חילוק היו כרוכות בכסף . הילדים נתבקשו לחלק 5.00 דולר בין ארבעה ילדים. בעיה זו נפתרה נכון ע"י כל הקבוצות.
תשובה טיפוסית שניתנה על ידי אחת הקבוצות: "כל אחד מקבל 1.25 דולר. אנו חושבים כך בגלל שאם כל אחד יקבל דולר אחד, יישאר דולר. ויש ארבעה רבעים בדולר (מטבע של 25 סנט נקרא רבע). אז כל אחד יקבל 1.25 דולר".

קבוצות שסיימו קיבלו משימה לחלק 0.50 דולר בין ארבעה ילדים. בעיה זו היתה יותר קשה לילדים. המספרים היו יותר קשים והם הצטרכו להחליט מה לעשות עם השארית.
אותה הקבוצה כתבה: "אנו חושבים שכל אחד יקבל 12 סנט ויישארו 2 סנט שהם לא יוכלו לחלק אותם, אבל הם יוכלו לקנות מסטיק בשני סנט ולחלק את המסטיק. אנו חושבים כך בגלל שאנו לא יכולים לחלק את 2 הסנט שנשארו".

בכל הזדמנות, מצבים שונים בכיתה נוצלו להצגת בעיות. לדוגמה: הילדים מנו את מלאי העפרונות במגירה וגילו שבכיתה יש 163 עפרונות. הם נתבקשו לחשב כמה עפרונות יקבל כל ילד אם העפרונות יחולקו שווה בשווה בין 27 התלמידים בכיתה. קבוצה אחת ציירה 27 עיגולים, אחד לכל ילד וציירו סימנים כדי לחלק 163 עפרונות. הם כתבו: "כל ילד יקבל 6 ויהיה אחד מיותר. מצאנו זאת על ידי כך שציירנו 27 עגולים. ילדה אחת שמה סימנים בעיגולים ואנו ספרנו. הוכחנו זאת על ידי זה שחיברנו 27, 6 פעמים ועוד אחד".
קבוצה אחרת: "אנו חושבים שכל ילד יקבל 6 עפרונות ויהיה אחד מיותר. אנו חושבים כך בגלל שעשינו עיגול לכל ילד ונתנו לכל אחד 5 עפרונות. חיברנו את זה. זה יצא 135 אז חיסרנו 135 מ-163 ונשארו 28. יש 27 ילדים בכיתה אז כל ילד יקבל עוד עיפרון ויישאר אחד".
אחרי שילדים פתרו בעיות מסוג זה הם הציגו את הדרך והתוצאות שלהם לכיתה. אחרי-כן המורה הראתה לילדים את הדרך הסטנדרטית לכתיבת תרגילי חילוק: מקום המחולק והמחלק; משמעות המנה והשארית.

בהמשך הילדים כתבו את מצבי החילוק במחברותיהם, בדרך הסטנדרטית.

דוגמה אחרת מכיתות ז' – ח' שלמדו אחוזים. המורה לא לימדה את הדרך הסטנדרטית לפתרון בעיות האחוזים, אלא שמה דגש לאורך כל הדרך על הבנת הילדים.

הנה בעיה לדוגמה:

בבית הספר 500 ילדים. אוטובוס של בית ספר מסיע 75 ילדים. האם יש מקום באוטובוס אחד לכל הילדים "השמאליים" בבית הספר? (הסטטיסטיקה מראה שבערך 12% מהאנשים הם "שמאליים").

הילדים השוו את הסטטיסטיקה הארצית לסטטיסטיקה בכיתתם ואחר כך עבדו בזוגות לפתור את הבעיה.

קבוצה א': "יהיו 60 שמאליים באוטובוס. מתוך 100, 12% = 12 אנשים. כיון ש-500 זה 5 פעמים 100 אתה מכפיל 12 ב-5 = 60".

קבוצה ב': "כן, יש מספיק מקומות באוטובוס עבור כל השמאליים בגלל ש 10% מ-500 זה 50 אנשים, 2% מ- 500 זה 10 אנשים, אז 50 ועוד 10 זה 60 אנשים, ובכל אוטובוס יש מקום ל- 75".

קבוצה ג': "כדי לקבל את התשובה הכפלנו 500 ילדים ב- 12% וקיבלנו 60 אנשים ואוטובוס מכיל 75 אנשים אז יהיה מספיק מקום".

קבוצה ד': "אנו חושבים שכן כיון ש- 75 זה 15% מ- 500. ורק 12% הם שמאליים".

לא כל השיטות היו נכונות:

קבוצה אחת למשל חילקה 500 ב- 12 וכתבה: "אחרי שעשינו את הבעיה קיבלנו 41.67 ועיגלנו את זה ל- 42 ילדים. אחר כך החסרנו מ- 75, 42 וקיבלנו 33. אחרי שקיבלנו 33 מקומות ידענו שכל השמאליים יוכלו לעלות לאוטובוס".

קבוצה אחרת גם השתמשה בחילוק אבל חילקה 12 ב- 500 . הם כתבו: " 12 : 500 = 0.024 אז מתוך 500 ילדים, 24 הם שמאליים, אז האוטובוס יכול להכיל את כל השמאליים".

דוגמה זו מראה שתשובות נכונות (כן, יהיה מספיק מקום באוטובוס) אינן בהכרח מעידות על הבנה, ויכולות לכסות על חוסר הבנה, וזוהי סיבה טובה לבקש מילדים להסביר את תשובותיהם.

המורה לא התרגשה מהטעויות. שאלה זו ניתנה בתחילת היחידה והמורה ציפתה לבלבול מסוג זה. זה טבעי שילדים יביעו חלקי רעיונות. בלבול הוא חלק טבעי מתהליך התפתחות ההבנה.

המעבר מהוראת אלגוריתמים להוראה המאפשרת לילדים להמציא דרכי חישוב דורש שינוי משמעותי עבור מורים רבים. הוא דורש שמורים יעריכו ויאמינו ביכולת הילדים להמציא ולהבין מצבים מספריים, ולא רק ביכולת שלהם לעקוב אחרי הוראות. זה מצריך התחייבות מלאה להפוך חשיבה והבנה לאבני הפינה של הוראת המתמטיקה. כמו כן מתבקש שמורים יהיו סקרנים להתחקות אחרי חשיבת הילדים ורעיונותיהם, ייהנו מדרך חשיבתם ויעודדו את כושר ההמצאה שלהם.

שאלות שמורים שואלים

האם צריך בכלל ללמד אלגוריתמים סטנדרטיים?

בדיוק כמו שילדים מציגים את הרעיונות שלהם בקשר לחישובים, המורים יכולים להציג את האלגוריתמים הסטנדרטיים לחישובים ולהסביר מדוע התהליכים האלה הם הגיוניים. זוהי דרך נוספת, לא בהכרח יותר טובה. מורים גם יכולים להפנות ילדים בכיתות הגבוהות לספרים המתארים אלגוריתמים ולבקש מהם ללמוד אותם ולהסביר את ההגיון שלהם.

חשוב שהאלגוריתם הסטנדרטי יוצג לא כדרך הטובה ביותר, או הדרך "האמיתית". הוא גם לא צריך לחייב את כל הילדים. המטרה צריכה להיות שילדים ימצאו דרך טובה לחישובים ושדרך זו תהיה משמעותית והגיונית עבורם.

ההסבר של המורים לאלגוריתם הסטנדרטי לא תמיד מובן לכל הילדים כשם שלא כל הילדים בכיתה מבינים את הרעיונות של ילדים אחרים. קשה לעקוב אחרי ההגיון ודרך החשיבה של אחרים. עודדו את הילדים לחפש את המשמעות בהסברים של חבריהם, המשיכו לבקש מילדים להסביר את הרעיונות שלהם, והישארו נאמנים לעקרון שילדים צריכים לעשות רק מה שהם מבינים ולהתעקש עד שיגיעו למצב זה.

מה בקשר ללמידת העובדות הבסיסיות?

הגישה שמעודדת הוראת אלגוריתמים דרך פתרון בעיות אינה שוללת את הגישה שילדים צריכים ללמוד עובדות בסיסיות. היכולת לחשב בכל שיטה, בע"פ, בכתב, בעזרת מחשבון, והיכולת לשער, כולם מבוססים על כך שילדים יודעים עובדות בסיסיות בחיבור ובכפל. באופן אידיאלי ילדים ילמדו את העובדות בעקבות התנסות חוזרת ונשנית במצבי בעיות. אבל, תרגול נוסף יהיה אולי נחוץ כדי שילדים יזכרו יותר את העובדות הבסיסיות.

מה בקשר לבחינות-זמן כדי לעזור לילדים ללמוד את העובדות הבסיסיות?

מורים שמשתמשים בבחינות זמן מאמינים שהבחינות עוזרות לילדים לזכור את העובדות הבסיסיות. זה לא הגיוני. רק ילדים שמתפקדים היטב תחת לחץ זמן מצליחים. ילדים שמתקשים בזכירת העובדות הבסיסיות, או אלה שעובדים לאט, יכולים לפתח פחדים ויחס שלילי ללימוד המתמטיקה.

כמו כן בחינות זמן אינן בוחנות את ההבנה של הילדים. מורים שמאמינים בבחינות זמן ממשיכים ליצור תכנית המבוססת על תרגול ושינון. הסכנה היא שהוראה המבוססת על זיכרון אינה מקדישה מספיק זמן הנחוץ להבנה. העובדה שילדים זוכרים עובדות אינה מבטיחה שהם יוכלו ליישם ידע זה במצבי בעיות. מלבד זאת - הילדים מסיקים שזכירת עובדות היא ערובה לפיתוח עצמה מתמטית במקום ללמוד לחשוב ולהשתמש בהגיון כדי למצוא את התשובות.

הדרכים שהילדים ממציאים הינן לרוב מסובכות ולא יעילות. האם אין זה יותר הגיוני ללמד אותם את הדרך הסטנדרטית לחישוב?

המטרה של החינוך המתמטי אינה צריכה להיות יעילות אלא פיתוח היכולות המספריות של הילדים והביטחון שלהם. אם יעילות היא המטרה, אז יש ללמד חישובים רק עם מחשבון, כי זה הכי יעיל. הוראת מתמטיקה צריכה ללמד ילדים לחשוב בהגיון, ולהבין את עולם המספרים.

איזה סוג של תרגול ושינון אריתמטי הוא נכון?

ילדים יפיקו תועלת ממגוון הזדמנויות ליישם את ההבנה שלהם על מספרים. בגישה שמדגישה הבנה, ילדים צריכים לקבל משימות שדורשות מהם לנתח מצבים, להחליט על דרכי פעולה, לבחור במספרים המתאימים, לבצע את הפעולות המתאימות, ולהעריך את התוצאות. תרגול של תרגילים המבודדים ממצבי בעיות אינו מכיל את כל האלמנטים האלה.

האתגר בהוראה הוא לעזור לילדים לצבור ביטחון עצמי ויכולת לעשות מתמטיקה. כפי שנאמר בסטנדרטים של ה- NCTM (Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, 1989, 17), עשיית מתמטיקה פרושה שהילדים "יחקרו, יצדיקו, ייצגו, יפתרו, ישוו, ידונו, ישתמשו, יבחנו, יתארו, יפתחו וינבאו". המלצה זו מזמינה חשיבה מחודשת על הוראת מיומנויות החישוב.

מיומנויות חישוב בחיי היום יום

רוב הבעיות שמבוגרים נתקלים בהם בחיי היומיום דורשות יותר מסתם מיומנויות חישוב. לעיתים רחוקות ניתקל במצב אמיתי בו כל המידע, לו אנו זקוקים לפתרון בעיה, מוגש לנו "בחבילה קטנה וארוזה למופת". לרוב עלינו לאסוף את הנתונים ממקורות שונים. לעיתים רחוקות קיימת רק שיטה אחת או אסטרטגיה אחת לפתרון בעיות בחיים. לרוב קיימות לפנינו מספר אלטרנטיבות, ואין רק פתרון אחד נכון או טוב. בחיים אין ספר תשובות.

בפתרון בעיות מהחיים אנו נדרשים להשתמש בידע, בניסיון קודם, ובאינטואיציה. אנו צריכים לנתח את המצב, לשער השערות, להחליט החלטות, לבדוק ולהעריך את דרכי הפעולה שלנו שלב אחרי שלב, להיות גמישים ומסוגלים לשנות כיוון, שהרי תמיד יצוצו משתנים אותם לא צפינו מראש.

ילדים יפיקו תועלת אם יציבו בפניהם בעיות מסוג הבעיות שאנו נתקלים בהם בחיי היומיום.
למשל: מה היא העלות לגידול כלב בגודל בינוני עד הגיעו לגיל 11?
בעיה זו דורשת מספר שלבים לפתרון:

1. החלטה על המידע הדרוש ומקורות המידע. מה הן ההוצאות הצפויות? הבלתי צפויות? כיצד נשיג מידע על עלות המזון, הוצאות וטרינריות, תעודות רישוי וכו'?
2. עשיית החישובים המתאימים.
3. שימוש בשיקול דעת כדי לפרש את התוצאות.

בעיה מסוג זה מאד מתאימה לקבוצה קטנה של ילדים. עבודה משותפת נותנת לילדים הזדמנות להשתמש בידע של ילדים אחרים, להרחיב את הידע שלהם, ולקבל תמיכה שהם זקוקים לה כאשר הם פותרים בעיות מסובכות. אחרי שהם עבדו על השלב הראשון, הקבוצות יכולות להשוות את ההחלטות שהם עשו לגבי המידע הדרוש, ולהחליט אם באמת כללו את כל הנקודות החשובות. באותה צורה הם יכולים אחר כך להשוות את המידע שאספו ואת הממצאים הסופיים.

אין תשובה נכונה או לא נכונה לבעיה מסוג זה. אבל, משפחה שצריכה להחליט אם היא רוצה להוסיף כלב למשפחה תפיק תועלת מקבלת מידע על העלות האפשרית. דיוק מוחלט אינו אפשרי, או נחוץ. מי

יכול לצפות נזקים שהכלב יכול להביא לרהיטי הסלון? מי יכול לצפות את מספר הפעמים שהכלב יאוכסן באכסניה לכלבים ומה בקשר להוצאות רפואיות בלתי צפויות? יש ערך לכך שתלמידים יתמודדו עם בעיות שאין להם פתרונות חד משמעיים וחשוב לבקש מהם להגן על העמדה שלהם.
בעיות מסוג זה יכולות לעלות ממצבי יומיום בכיתה. מה תהיה העלות של מסיבה כיתתית? כמה מכוניות דרושות לטיול הכיתתי? איזו דרך הוגנת אפשרית לארגן את לוח הזמנים של השימוש בחדר המחשבים בבית הספר?
דוגמאות אחרות: מה הם דמי כיס הוגנים לילד בגיל הכיתה? כיצד נוכל לחשב כמה כפתורים על כל הבגדים שלנו או כמה כיסים יש לנו ביחד? כיצד נוכל למצוא כמה כלבים בשכונה?

על מנת שילדים יתפקדו בחברה המשתנה והמתוחכמת של היום, הם צריכים ללמוד לפתור מגוון רחב של סוגי בעיות. הכנת ילדים לפתרון בעיות דורשת הרחבה של הבעיות המילוליות הטיפוסיות הניתנות בכיתה.
האתגר העומד בפנינו הוא להציב בפני הילדים בעיות המעוררות את המוטיבציה שלהם ואת הסקרנות הטבעית שלהם והמאפשרות להם ללמוד וליישם מיומנויות, במצבים הדומים לצורה בה אנו משתמשים במיומנויות חישוב בחיי היומיום.

לסיכום: כיצד אפשר לפתח הבנה חשבונית?

הוראה נכונה בחשבון צריכה להיות מאורגנת כך ש:

1. תציג מושגי חשבון בהקשרים אמיתיים.
2. תפתח תובנה מספרית והבנה של הקשרים בין הפעולות.
3. תשלב מיומנויות חשבון עם יתר תחומי המתמטיקה (הנדסה, מדידות וכו').
4. תישען על הדרך בה ילדים חושבים ועל השפה שלהם לתיאור דרך חשיבתם.
5. תתבסס על אומדן וחישוב בראש.
6. תעודד ילדים להמציא דרכים משלהם לחישוב.