عرض النسب المئوية في القياس الطولي بغية تطوير فهم لعمليات الأعداد النسبية

Introducing Percents in Linear Measurement to Foster an Understanding of Rational-Number Operations

بقلم:Joan Moss

عن: Teaching Children Mathematics, Vol. 9 No. 6, February 2003. pp. 335-339

ترجمة: كميل ظاهر

كيف نقوم بتطوير طلاقة حسابية (computational fluency) في الأعداد النسبية، في الوقت الذي يكون فيه معروف أن هذا الموضوع يخلق العديد من الصعوبات المفاهيمية للتلاميذ الصغار؟ كيف يمكننا مساعدة التلاميذ على فهم العمليات الحسابية المتعلقة بالأعداد النسبية عندما يكون إدراكهم للكميات التي يشملها نظام الأعداد النسبية، غالبًا، محدودًا جدًا؟ يتحمور تدريس الأعداد النسبية التقليدي، عادة، في القواعد والتذكر. وعادة ما يعطي المعلمون التلاميذ تعليمات مثل: "لجمع الكسور، يجب أولاً العثور على المقام المشترك، ثم قم بجمع أعداد البسوط" أو "لجمع وطرح أعداد الكسور العشرية، قم بتسجيلها بشكل عامودي بحيث تكون النقطة العشرية تحت النقطة العشرية، ثم قم بإجراء العملية الحسابية."

ولكن، من الممكن أن يكون تذكر هذه القواعد، البسيطة نسبيًا، صعبًا جدًا، في الوقت الذي لا يملك فيه التلاميذ أساسًا مفاهيميًا في الأعداد النسبية. وقد أظهرت دراسة أجريت مؤخرًا، على سبيل المثال، أن 56% من التلاميذ من عينة عشوائية تتكون من عشرين تلميذًا من تلاميذ الصف السادس واجهوا صعوبة في جمع الكسور. بالإضافة إلى ذلك، كان باستطاعة 10% من نفس المجموعة فقط تفسير كيف يتم جمع الكسور، بالرغم من أنهم تعلموا، جميعًا، القواعد على مدار عدد من السنوات. (Kilpatrick, Swafford, and Findell, 2001). وعادة ما يفسر التلاميذ، بشكل خاطئ، الكسر على أنه عددان مستقلان يمكن عدّهما. وعندما يُطلب منهم إيجاد الجواب على مسألة مثل: ___ = 1/3 + 1/2 ، فإنهم يؤكدون على أن الجواب هو 2/5 – وهذا عدد أصغر من الـ 1/2 الذي هو أحد المضافين.

كذلك يخلط العديد من التلاميذ بين القواعد المتعلقة بعمليات الكسور العشرية. فقد وجد Hiebert and Wearne (1986) أنه عندما طُلب من التلاميذ إيجاد الجواب على .3 + 4 ، لم يكن بمقدور أغلبية تلاميذ الصفوف المتوسطة إعطاء الجواب الصحيح، وكانت أغلبية هؤلاء

ملاحظة:في أمريكا تكتب الكسور العشرية الأصغر من 1 بدون الصفر.(.3 تعني 0.3).

التلاميذ متأكدة أن الجواب هو 7. من الواضح أنه ما لم يصل التلاميذ إلى الفهم الضروري للكميات المنوطة بالأعداد النسبية وما تعنيه الرموز والعمليات، فإنهم قد يواجهون صعابًا جدية في حساب الأعداد النسبية.

يعرض هذا المقال القدرات الحسابية المتعلقة بالأعداد النسبية التي طورها تلاميذ الصف الرابع الذين شاركوا في برنامج بحثي حول تعلّم الأعداد النسبية (Moss and Case 1999). ويهدف هذا المشروع البحثي الجاري إلى تطوير فهم مرن ومتداخل لنظام الأعداد النسبية (أنظر أيضًا Kalchman, Moss, and Case 1999; Moss 2002; Moss 2000). ولا يتضمن المشروع تعليم التلاميذ اي قواعد أو عمليات تتعلق بالأعداد النسبية على نحو خاص؛ بدلاً من ذلك، فهو يتمحور في مساعدة التلاميذ على تطوير توجه "الإحساس بالأعداد" بالنسبة للأعداد النسبية (Sowder 1995) ليتمكنوا من التنقل بين الكسور، الكسور العشرية، النسب المئوية، والنسب بطريقة سلسة أو مرنة وأن يبتكروا إجراءات حساب لهذه الأعداد.

إن التوجه التدريسي في هذا المشروع هو فريد من نوعه. ويبدأ التلاميذ تحقيقاتهم في الأعداد النسبية من خلال التعلم عن النسبة المئوية ضمن سياق القياس الطولي. ويأتي تعلم الكسور والكسور العشرية لاحقًا، ويستند إلى تعلم التلاميذ النسبة المئوية. وبالرغم من أن هذا التوجه يغير تسلسل تدريس الأعداد النسبية التقليدي ، إلا أن له العديد من الحسنات بالنسبة للتلاميذ الصغار. فعلى سبيل المثال، يؤجل المعلمون مسألة مقارنة التلاميذ للنسب ذات المقامات المختلفة أو العمل معها، وذلك من خلال البدء في النسبة المئوية بدلاً من الكسور. ويتيح هذا للتلاميذ التركيز على تطوير إجراءاتهم الخاصة بهم بالنسبة للمقارنة والحساب، بدلاً من شق طريقهم بجهد ليصبحوا متمكنين من مجموعة من الإجراءات المعقدة التي يمكن أن تبدو لهم على أنها غريبة عنهم.

بالرغم من أن لكل نسبة مئوية هنالك كسر أو كسر عشري مساوٍ لها يمكن التوصل إليه بسهولة، فإن عملية التحويل ليست صحيحة، إذ أنه ليس من السهل الحصول على كسر عشري أو نسبة مئوية تعادل الكسور مثل الكسرين 1/7 وَ 1/9. لذلك، فالحسنة الثانية لهذا التوجه التدريسي هي أنه عند البدء بالنسبة المئوية، نحن نسمح للتلاميذ بأن يجروا التحويل الأول من بين تمثيلات الأعداد النسبية المختلفة بشكل فطري ومباشر وأن يطوروا فهمًا عامًا، على نحو أفضل، في كيفية العلاقة بين النظم الثلاث. وأخيرًا، لا يبدو أن التلاميذ يملكون معرفة غير رسمية غنية حول النسب المئوية في الحياة اليومية فحسب، بل يُظهرون حسًّا فطريًا جيدًا في العمل مع هذه الأعداد أيضًا(Lembke and Reys 1995).

يصف هذا المقال نوع الفعاليات التي قام التلاميذ بإنهائها بغية تطوير فهمهم الفكري لنظام الأعداد النسبية وقدراتهم الحسابية المتعلقة به. وقمنا، في كل مرّة تم تطبيق هذا المنهاج، بتغيير بعض الدروس لتتلائم مع مستوى فهم التلاميذ. ولكن، بقي تسلسل التدريس كما هو عليه، كذلك الأمر بالنسبة لوسائل الإيضاح والتمثيلات التي قمنا باستخدامها. وستوضح قطعة

من أحد الدروس التي أعطيت عند نهاية الدورة التعليمية المكوّنة من عشرين درسًا نوع الإستراتيجيات التي طورّها التلاميذ لحساب الأعداد النسبية.

عمل التلاميذ أثناء الدرس مع معلميهم على إستراتيجيات جمع وطرح الأعداد النسبية ذات التمثيلات المتنوعة. وقد تمت دعوة تلميذين للظهور أمام الصف ليعرضا مسائل جمع وطرح قاما بوضعهما بأنفسهما. وعمل التلاميذ على حساب هذه المسائل شفهيًا، وغالبًا بدون استخدام القلم والورق. وقام التلاميذ بتطوير طرق غير عادية للعمل على هذه الأعداد. وكان التلميذان جانيت وجون (اسمان مستعاران) أول من عرضا مسائلهما. وكتب جون على اللوح:

1/4 + .125 + 1/8 + .5 = ___

سام: حسنًا، أستطيع أن أفعل ذلك، إنها مسألة سهلة، والجواب هو 1، لأن 0.125 مع 1/8 يساوي 0.25، وبإضافة 0.25 أخرى نحصل على 0.5. ويبقى لديك نصف آخر، وهكذا يكون الجواب .1

وكانت إيريس التلميذة التالية التي تكلمت, وقد توصلت إلى النتيجة ذاتها، لكنها قامت بتحويل التمثيلات المختلفة في الجملة العددية إلى ما يعادلها من كسور عاديةبدلاً من الكسور لعشرية.

أيريس: أنا أعتقد، أيضًا، أن الجواب هو 1، لكنني فعلت ما يلي: في البداية قمت بتحويل الـ 1/2 إلى ربعين، وهكذا نبدأ الآن بـربعين. بعدها تقوم بإضافة أول 1/4 ليصبح لديك 3 أرباع. كذلك الأمر إذا قمت بجمع 0.125 و 1/8 تحصل على ربعًا آخرًا. وهكذا الـ 4 أرباع تساوي 1.

المسالة التي عرضها سايمون ولويزا هي من نوع المسائل التي نسميها سؤال "صحيح أم خطأ".

سايمون: إذًا، هذه هي مسألتنا. هل تعتقد أن هذا صحيح أم خطأ؟ (تواصل لويزا لتكتب ما يلي:

(37 1/2% - 1/8 - 0.10 = 0.15

جيسيكا: دعنا نرى. أنها مسألة صعبة بعض الشيء. الثمن عبارة عن 1/2 12 بالمائة، وإذا طرحنا 1/2 12 بالمائة من 1/2 37 بالمائة نحصل على 25 (بالمائة). الآن قم بطرح 10 بالمائة ويكون الجواب 15 بالمائة. وهكذت الجملة العددية هي صحيحية، الجواب هو 0.15.

وأخيرًا، وقف رايان وساشا أمام الصف، وكانا قد اختارا استخدام بنية السؤال "كم نحتاج للحصول على العدد واحد؟" وكانت هذه البنية مفضّلة لدى التلاميذ، لأنهم كانوا يميلون إلى وضع سلسلة طويلة ومعقدة من الأعداد. كذلك تتيح هذه البنية للتلاميذ الإجابة بطرق كثيرة ومختلفة.

ساشا: إذًا، نحن نريد أن نعرف ما الذي يجب إضافته للأعداد بغية الحصول على العدد واحد:

1/16 + 1/16 + .25 + 15% + 1/4 + 1/8 + ____ = 1

إلن: واحد من ستة عشر و 1/16 هو 1/2 12، وبعدها نضيف 1/8 لنحصل على 0.25. وبإضافة 25 أخرى نحصل على 50؛ وبعدها 1/4 لنحصل على 75. ثم نضيف الـ 15 (بالمائة) ليكون لدينا 90. إذاً مجموع كل شيء هو 90. لذلك، فإنك تحتاج إلى 10 بالمائة أو 10 نقاط ليكون لديك العدد 1.

تميل إلن إلى حذف كلمتي "بالمائة" و "كسر عشري" أثناء العمل على الحلّ. وعلى الرغم من عدم التشجيع على هذه الممارسات، التي كانت نموذجية بالنسبة للعديد من الطلاب، لم يبدو ذلك على أنه يثني التلاميذ عن فهم الكميات التي يجري الحديث عنها أو الوصول إلى الأجوبة الصحيحة.

أُخذت هذه الأمثلة من صف بحث واحد فقط، لكنها تتضمن ميزات تفكير تمّ تطويرها في صفوف أخرى تم تطبيق هذا التدخل التعليمي فيها (أنظر Kalchman, Moss and Case 2001). الميزات البارزة هي:

- سهولة انتقال التلاميذ بين تمثيلات الأعداد النسبية؛
- استخدام نقاط الإشارة بدلاً من إجراءات عادية للتحويل بين الكسور، الكسور العشرية والنسب المئوية؛
- الإحساس القوي بالكميات المنوطة بتمثيلات الأعداد النسبية.

كيف تطور هذا النوع من التفكير؟ سيوجز الجزء الثاني من هذا المقال تسلسل المنهاج ليبيّن كيف أدت فعالياتنا المبكرة مع النسب المئوية والقياس إلى الطريقة التي يعمل بها التلاميذ مع الأعداد النسبية.

النسب المئوية والكؤوس

بدأ التعليم بقيام التلاميذ، أولاً، بتقدير النسبة المئوية للماء في تشكيلة من الكؤوس تحتوي على مستويات مختلفة منه ثم حسابها.

المعلمة: لقد ملأت هذه الكأس بماء أزرق. هل تستطيع تقدير النسبة المئوية للماء في هذه الكأس؟

التلميذ: أعتقد إن الكأس تحتوي على حوالي 25 بالمائة.

المعلم: كيف يمكنك، إذًا، أن تجد كيف يمكن قياس الماء حتى خطّ الـ 25% على نحو دقيق؟

التلميذ: هذا سهل. إن ارتفاع الكأس هو 12 سم. إذا كان 50 بالمائة من الكأس ممتلئة بالماء، سيكون عندها الخط في منتصف الوعاء، وسيصل هذا إلى 6 سم. ولكن 25% من الكأس ممتلئة، لذلك يجب أن نناصف ذلك أيضًا، وهكذا يكون ذلك 3 سم.

اختار الطلاب استراتيجية المناصفة المتكررة هذه بشكل طبيعي لحل مسائل القياس المبكرة. وعندما تم توسيع تمارين القياس لتشمل كميات تمثل 75% ، طوّر التلاميذ، مرة أخرى، طرقهم الخاصة بهم للوصول إلى الحلّ. فقد قاموا بتقسيم المهمة إلى سلسلة من الخطوات. ويمثّل حلّ جِسكا لحساب 18 × 75%الخطوات التي مرّ خلالها معظم التلاميذ.

جِسكا: حسنًا، للحصول على 75 بالمائة من 18 يجب عليك، أولاً، الحصول على 50 بالمائة وهو 9؛ ثم نصف ذلك، 25 بالمائة، هو 1/2 4، وعندها تجمع العددين لتحصل على 1/2 13. إذًا، 75 بالمائة من 18 هو 1/2 13.

أصبحت نقاط الإشارة 25 بالمائة، و75 بالمائة أدوات قياسية في جميع اعمال التلاميذ اللاحقة، وكذلك الأمر بالنسبة لأسماء نفس الكميات: ربع واحد، نصف واحد، ثلاثة أرباع. وشُرح للطلاب كيفية كتابة هذه الكسور على شكل رموز: 1/4، 1/2، وَ 3/4.

نقطة إشارة جديدة

مع مواصلة التلاميذ القياس وحساب مدى امتلاء كؤوس مختلفة أو النسبة المئوية لأطوال أغراض أخرى في غرفة الصف، بدأوا يستخدمون نقطة إشارة جديدة وهي 1/2 12 بالمائة (نصف الـ 25 بالمائة). وأصبحت نقطة الإشارة هذه، المقرونة، دائمًا، بالكسر 1/8، مفيدة كأداة لحساب الكميات. وأصبح التلاميذ الآن قادرين على توسيع حساباتهم لتشمل كميات جديدة مثل:
1/2 37 (%25 + %1/2 12) وَ 1/2 62 بالمائة (%1/2 12 + %50). بنفس الطريقة التي أجروا بها سلسلة من التنصيفات والجمع لحساب كميات الـ 75 بالمائة.

الأعداد العشرية وساعات التوقيت

عند وصول التلاميذ إلى مستوى بارع من ناحية نقاط الإشارة للنسب المئوية، قمنا بإدخال كسور عشرية ذات خانتين إلى يمين النقطة العشرية وعلاقتها بالنسب المئوية. وكان التوجه الأساسي توضيح فكرة أن كسرًا عشريًا ذي رقمين إلى يمين النقطة العشرية يمثل نسبة مئوية لـ "الطريق" بين عددين صحيحين متجاورين؛ مثلاً، يقع العدد 5.25 على بعد 25 بالمائة من الطريق بين العددين 5 و 6. لقد استخدمنا ساعات توقيت رقمية تعرض الثواني وأجزاءً من مائة من الثواني؛ وتتم الإشارة إلى أجزاء الثواني بواسطة رقمين صغيرين إلى يمين الأعداد. لقد أخذنا بعين الإعتبار ماذا يمكن "للرقمينن الصغيرين" أن يعبرا عنه وعن علاقتهما بالأعداد الكبيرة الموجودة إلى يسارهما (الثواني). وبعد أن اختبر التلاميذ العمل مع ساعات التوقيت، وبعد أن لاحظوا أن الثانية الواحدة تشمل مائة من وحدات الزمن الصغيرة، أقام التلاميذ العلاقة بالنسب المئوية من خلال تعليقات مثل، " كأنها نسب مئوية من الثانية".

كانت ساعات التوقيت التي تحتوي على أجزاء من مائة من الثانية بمثابة تمثيل متماسك وذي تأثير للكسور العشرية ووسيلة ممتازة للعديد من الفعاليات للمقارنة وحساب الأعداد النسبية. وفي الفعالية الأولى، "تحدي الوقف/البدء"، حاول التلاميذ بدء ووقف الساعة عدة مرات على التوالي باسرع وقت ممكن. وقد تم تدريبهم على تسجيل الأوقات ككسور عشرية؛ مثلاً، عشرون جزء من الثانية سُجلت كـ 0.20، وتسعة أجزاء من الثانية كـ 0.09، وهكذا دواليك. وعند مقارنة التلاميذ أوقات ردود فعلهم الأكثر سرعة مع أوقات زملائهم، توفرت لهم الفرصة ليس لترتيب الكسور العشرية فحسب وإنما للعثور على طرق لحساب الفروق في الكسور العشرية، أو في مجموع النقاط التي أحرزوها أيضًا. لعبة ساعات التوقيت الأخرى التي ساعدت على فهم الكمّ هي "وقف الساعة بين الأوقات". وتضمنت هذه اللعبة أسئلة مثل: "هل يمكنك وقف الساعة بين 0.45 و 0.50؟"

وأخيرًا، لعب التلاميذ ألعابًا كان الغرض منها التنقل بين تمثيلات الأعداد النسبية وحساب المجموع والفروق. و في لعبة قمنا بتصميمها وتُدعى "حلّ الرمز" طُلب من التلاميذ وقف الساعة على كسر عشري يعادل كسور عادية ونسب مئوية مختلفة. مثلاً، إذا أُعطي الرمز السري "3/4"، طُلب من التلاميذ عندها وقف الساعة على 75 أجزاء المائة من الثانية. وبتحديات الرمز السري الأخرى، كان على التلاميذ إجراء عمليات حسابية. وقد طُلب منهم وقف الساعة في أقرب نقطة من الجواب على معادلة ما- مثلاً، 1.25 = 3/4 + 1/2 ، ثم "القيام بحساب القيمة العشرية لمدى قربك من الجواب."

لم تكن فعاليات ساعات الوقف والفعاليات العديدة الأخرى مفيدة في تعزيز الحس بالتكافؤ والتمثيلات المتنوعة فحسب بل كانت ممتعة أيضًا. وفي الأيام الأخيرة من التدخل التعليمي، قام التلاميذ بتصميم فعاليات خاصة بهم لساعات التوقيت. وشملت Moss (2000) في مقالها قائمة كاملة من المضامين التي تمت تغطيتها في كل درس والمسائل التي تم تخصيصها.

تقييم إجراء الحسابات العادية

عند قيامنا بتقييم أداء التلاميذ المتعلق بمهام الأعداد النسبية في أعقاب تدخلنا التعليمي، وجدنا أن أغلبية التلاميذ تفوقوا في الأداء على التلاميذ من نفس السن والتلاميذ الأكبر سنًا في المهام التي تتطلب فهمًا مفاهيميًا. وعلى الرغم من أننا تشجعنا من هذه النتيجة، إلا أننا كنّا قد توقعنا ذلك. وقد فاجأنا أداء التلاميذ بالنسبة لمهام الحساب من الأنواع التقليدية؛ فقد وجدنا أن أداء التلاميذ من مجموعة الإختبار كان يوازي أداء التلاميذ الذين استند تدريسهم إلى تعلم قواعد الحساب أو كان أفضل منه.

ما يلي هي توضيحات لعمل التلاميذ مع الحساب الإعتيادي. وستجد أدناه مثالين على تفكير التلاميذ في عملية طرح أُخذت من أحد الامتحانات التلخيصية التي أجريناها.

المعلم: ما هو الجواب للتمرين : 2 1/2 – 3 1/4 ؟

الطالب 1 من مجموعة الإختبار: لست متأكدًا. ينبغي أن أقوم بالتحويل، لكنني لا أعرف القيام بالتحويل. ولكن بما أنه يوجد لدي عدد صحيح، أليس من واجبنا أن نستخدم الربع والعدد الصحيح ثم طرح النصف؟ وهكذا يكون الجواب 3/4.
الطالب 2 من مجموعة الإختبار: 3 يُضاف إليها ربع تعطينا 3.25، و2 مع النصف يساوي 2 ونصف. وهكذا يمكنك إجراء الطرح: 0.75 = 2.50 – 3.25 .

بالمقابل، حاول الطالب من مجموعة المقارنة استخدام القواعد التي يتذكرها وحصل على جواب غير منطقي. وأظهر أحد أجوبة التلاميذ نوع التفكير الذي يستخدمه هؤلاء التلاميذ: "أولاً، يجب أن أجد المقام المشترك، وهو 4؛ وهكذا 2/4 2 – 1/4 3 ويكون الجواب 1 و 0/4.
المثال التالي لتفكير تلميذ حول عملية قسمة وطرح، أُخذت من مقابلة الإمتحان التلخيصي للتلاميذ ذوي التحصيلات العالية، وهي لا تمثل تفكير جميع التلاميذ أثناء إجراء امتحانات التلخيص. وقد عرضت هذا المثال بغية توضيح كيف يمكن لتوجهنا في تدريس الأعداد النسبية، مع تشديده على معنى عمليات الأعداد النسبية، حث التلاميذ على التفكير في العمليات التي تعتبر صعبة حتى بالنسبة لمعظم البالغين (Moss 2000).

المعلم : كم يساوي 2/3 من 6/8؟
الطالب: حسنًا، 6/8 تساوي في الواقع ثلاثة أرباع، وهي 75 بالمائة. حسنًا، ثلث الـ 75 بالمائة هو 25 بالمائة. لكنك تحتاج إلى ثلثين. لذلك فهي 50 بالمائة، وهذا يساوي نصفًا واحدًا.

أفكار ختامية

يتضمن تعريف الطلاقة الحسابية وفقًا لـ NCTM (Principles and Standards, 2000) ثلاثة أفكار: البراعة، الدقة، والمرونة. وتتضمن هذه الأفكار المطلب أن يكون للتلاميذ معرفة في تركيبات الأعداد الأساسية وعلاقات هامة بين الأعداد والقدرة على اختيار الاستراتيجية من بين عدد من الإستراتيجيات الملائمة. بالإضافة إلى ذلك، من أجل أن يتحلى التلاميذ بطلاقة حسابية، يجب عليهم أن يُظهروا فهمًا لمعاني العمليات والعلاقات بين هذه العمليات (Russell 2000).

حقق التلاميذ في بحثنا نوعًا من الطلاقة الحسابية وكشفوا عن أنهم قاموا بتطوير العديد من هذه المتطلبات. وكما يبين هذا المقال، يبدو أن الطريقة التي يستخدم بها التلاميذ معرفتهم بنقاط الإشارة وتكرار المناصفة تعطيهم إحساسًا قويًا بالنسبة لكبر الكميات بالأعداد النسبية والعلاقة بينها بالإضافة إلى فهم معنى العمليات. بالرغم من أن هذه الطرق تقود التلاميذ، في النهاية، إلى إيجاد الإجابات الصحيحية، فإنه من الصحيح أن الطرق التي يستخدمها التلاميذ ليست بمدى نجاعة الإجراءات الحسابية الإعتيادية. نحن نخطط، في بحثنا القادم، أن نوسع

هذا التدخل التعليمي ليشمل المزيد من الإجراءات الإعتيادية. وسيساعدنا هذا على اكتشاف ما إذا كانت أنواع فهم العمليات التي حصل عليها التلاميذ والثقة التي أظهروها عند عملهم مع الأعداد النسبية ستؤدي بهم، في النهاية، إلى إجراء عمليات حسابية إعتيادية مقرونة بفهم عندما ينتقلون للعمل مع اعداد في المجال الأكثر تجريدًا..

البيبليوغرافيا

Hiebert, James, and Diana Wearne. "Procedures over Concepts: The Acquisition of Decimal Number Knowledge." In Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics, edited by James Hiebert, pp. 199-244. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, 1986.

Kalchman, Mindy, Joan Moss, and Robbie Case. "Psychological Models for the Development of Mathematical Understanding: Rational Numbers and Functions." In Cognition and Instruction: Twenty-Five Years of Progress, pp.1-38. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum, 2001.

Kilpatrick, Jeremy, Jane Swafford, and Bradford Findell. Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics. Mathematics Learning Study Committee: Center for Education, 2001.

Lembke, Linda, and Barbara Reys. "The Development of, and Interaction Between, Intuitive and School-Taught Ideas about Percent." Journal for Research in Mathematics Education 25 (1994):237-59.

Moss, Joan. "Deepening Children's Understanding of Rational Numbers." Dissertation Abstracts, 2000.

_____. "Percents and Proportion at the Center: Altering the Teaching Sequence for Rational Number." In Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions, edited by Bonnie Litwiller, pp. 109-20. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 2002.

Moss, Joan, and Robbie Case. "Developing Children's Understanding of the Rational Numbers: A New Model of an Experimental Curriculum." Journal for Research in Mathematics Education 30 (1999): 124-48.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, Va.: NCTM, 2000.

Russel, Susan Jo. "Principles and Standards: Developing Computational Fluency with Whole Numbers." Teaching Children Mathematics 7 (November 2000): 154-58.

Sowder, Judith. "Instruction for Rational Number Sense." In Providing a Foundation for Teaching Mathematics in the Middle Grades, edited by Judith Sowder and Bonnie Schappelle, pp. 15-30. Albany: State University of New York Press, 1995.