

הערכת ההבנה של תלמידים בנושא זוויות

An Assessment of Students' Understanding of Angle

מאת: J.M. Keiser, A. Klee and K. Fitch

הופיע ב: Mathematics Teaching in the Middle School, Vol. 9 No. 2, Oct. 2003, pp. 116-119

תרגום: ברכה סגליס

עד כמה לדעתכם תלמידים מבינים את הרעיונות שבבסיס המושגים הקשורים לשברים, זוויות, הסתברות, או כל רעיון מורכב אחר אותו אנו מנסים ללמד? לעיתים התשובות של תלמידים במבחנים לא מצליחות להעביר מה הם באמת מבינים על המושג. אם הייתם רוצים להעריך את ההבנה של תלמידים על מושג הזווית, אילו סוגי שאלות הייתם שואלים כדי לגלות את החשיבה האמיתית שלהם?

תלמידינו סיימו זה עתה את היחידה "צורות ושרטוטים" (Shapes and Designs) מתוך הפרויקט של מתמטיקה מקושרת - *Connected Mathematics Project – CMP* (Lappan et al. 1996) אשר סיפקה מגוון רחב של חקירות בגיאומטריה דו-מימדית, כולל מושג הזווית. כדי לבצע הערכה של יחידה זו, ביקשנו מן התלמידים להשתתף בשתי פעילויות שונות. תחילה, ביקשנו מהם לכתוב הגדרה של זווית, משימה יותר קשה ממה שנראה על פניו. קשה לבטא מושג מופשט כמו זווית בעזרת מספר היגדים בלבד. שנית, החלטנו שקשיים של תלמידים אינדיבידואליים הינם לפעמים הדרך הטובה ביותר לזהות הבנות שגויות של קבוצה. הצגנו בפני התלמידים שלנו הערות ופרושים שנתנו לתלמידים אחרים כאשר למדו אותה יחידה (Keiser 2000). הם התייחסו להערות אלו, החליטו אם הם מסכימים או לא מסכימים איתן, והיסבירו מדוע.

לפני שתקראו על המחקר שלנו, בקשו מתלמידים להגיב לשתיים מתוך הסיטואציות שבאיור 1. האם הופיעו הבנות שגויות בקשר לרעיונות הקשורים לזוויות? האם תגובותיהם הפתיעו אתכם? באיזה אופן?

דיון על המשימות

השתמשנו בשני סוגי ההערכה, כתיבת הגדרה והסיטואציות שבאיור 1, כדרך לחקור את דימוי המושג של זווית אצל תלמידינו. Tall and Vinner (1981) היו הראשונים שהגדירו דימוי מושג כ"תאור מכלול המבנה הקוגניטיבי הקשור למושג, הכולל את כל התמונות המנטליות ואת כל המאפיינים והתהליכים הקשורים" (עמ' 152). תחילה, קיוונו לעודד את התלמידים לחשוב באופן ביקורתי על המושג, כדי שנוכל לזהות שאלות מעניינות והבנות שגויות אפשריות שהיו עדיין לתלמידינו אודות הזווית. לאחר מכן, יכולנו להמשיך את מחקר הפעולה שלנו על ידי עריכת דיון כיתתי המטפל בשאלות אלה.

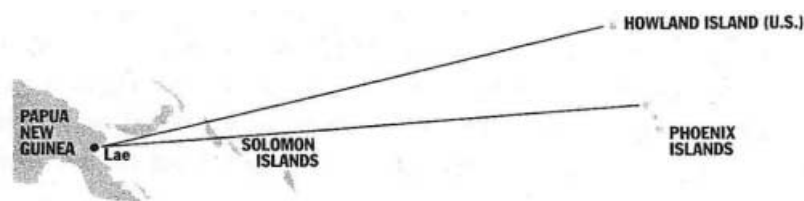
77 תלמידי כיתות ו' שהשתתפו בפרויקט שלנו, הגיעו משלוש כיתות שונות ובדיוק סיימו יום קודם את היחידה "צורות ושרטוטים". במהלך שיעור אחד, ביקשנו מהם תחילה לכתוב הגדרה לזווית, ואת תשובותיהם אספנו לפני שהצגנו להם שתיים מתוך שלוש הסיטואציות שבאיור 1. (בשל אילוצי זמן ביקשנו מהם לבצע רק שתי משימות, אם כי בקשה להגיב לכל שלוש הסיטואציות היתה יכולה להיות מעניינת גם

איור 1: מתן הסברים על המשמעות של "זווית"

הנחיות: כתבו במילים שלכם הגדרה ל- זווית. השתדלו שההגדרה תהיה שלמה ככל האפשר. ניתן להשתמש ביותר ממשפט אחד או שניים.

בסיטואציות 1-3, תלמידים אחרים מכיתה ו' דנו ברעיונות שלהם אודות זוויות. קראו את הסיטואציות בתשומת לב, והסבירו האם אתם "מסכימים" או "לא מסכימים" ומדוע. אם אינכם בטוחים, התייחסו לתגובה שמתארת בצורה הטובה ביותר את כוון החשיבה שלכם.

סיטואציה 1: אמליה ארהרט, חלוצה בתחום התעופה, אבדה כאשר מטוסה התרסק בגלל טעות בניווט, במהלך טיסה סביב העולם. הנווט שלה עשה טעות של 7.5 מעלות. האיור שלהלן מראה הן את היעד האמיתי שלה והן את המקום שבו מעריכים שהיא התרסקה.

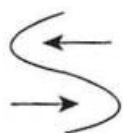


Adapted from Small Blue Planet. © Copyright 1993–1995 by Now What? Software, San Francisco. The original map was created from maps made by the Central Intelligence Agency and the Defense Mapping Agency.

המורה שאלה, "האם הסטייה שלה היתה רחוקה מאוד מבחינת הזווית שלה? ורוב הכיתה אמרה, "לא". אבל קליר התווכחה איתם, "אבל זה כמו בקנה מידה קטן. בחיים באמת זה יהיה ממש גדול. ג'ון הסכים והוסיף, "זה יהיה כמו 200 מעלות". המורה שאלה, "למה אתה מתכוון בכך?" וקליר ענתה, "זוהי מפה קטנה. אם היינו מגדילים את המפה, אם היינו מנפחים אותה בגדול, זה יהיה מרחק אחר, משום שהאיים לא יהיו כל כך מעוקים וצפופים. הם יהיו מרוחקים יותר זה מזה. ואם זה היה בחיים באמת, זה יהיה זווית ממש גדולה." האם אתם מסכימים עם קליר, או לא מסכימים איתה?

סיטואציה 2: תלמידים התבוננו סביב כיתתם כדי למצוא דוגמאות של זוויות, וסינדי אמרה, "האם תוכלו

למצוא זוויות בכל אחת מאותיות האלף-בית? חוץ מהאות 'S' משום שהיא כאילו, טוב... אולי יש בה זוויות! משום של- S יש כאילו פינות כמו כאן וכאן?" היא מציינת את האות S על הלוח ומצביעה על שני מקומות. "אז, אולי זה עובד בשביל כל האותיות?" דן אמר, "חוץ מ- O. O סינדי הסכימה, "כן, חוץ מ- O". האם אתם מסכימים עם סינדי (של- S יש זוויות), או לא מסכימים איתה?



סיטואציה 3: לתלמיד אחד בכיתה ו' היו שאלות רבות בקשר ל"זוויות" של 0 מעלות, 180 מעלות, ו- 360 מעלות. להלן חלק מן ההערות שלו.

1. "יש לי שאלה בקשר לזווית של 360 מעלות. האם זווית איננה כמו נקודה על משהו? אני סקרן גם לגבי זווית של 180 מעלות. אבל 360 מעלות, כל מה שזה, זה מעגל. אז אני לא חושב... אז אני שואל את עצמי מדוע 360 מעלות ו- 180 מעלות נחשבות לזוויות?"
2. "משום שאני רואה את הזווית כבעלת קדקוד ואז שני קווים שהולכים לכיוונים שונים. ואני יודע [שהקרניים] הולכות לכיוונים שונים [בזווית של 180 מעלות], אבל אי אפשר לדעת איפה הקדקוד ואיך הן הולכות לכיוונים שונים או שהן כאילו עושות אותו דבר".
3. "וכל מה שאני חושב זה שזווית היא בעצם שני קווים ששמים ביחד בפניה שלהם, שהם נשענים על הפינה שלהם, אבל לזאת אין פינה שאפשר להיות בה. אני לא מבין איך זווית יכולה להיות רק תנועה סיבובית ולא שני קווים." האם אתם מסכימים, או שאתם לא מסכימים?

כן!) שלוש הסיטואציות חושפות הבנות שגויות של מאפיינים מסוימים של זוויות, או מכילות דוגמאות מההתמודדות של תלמידים אחרים בנסותם להבין רעיון מסוים. בכתיבת התגובות עודדנו את התלמידים לתאר בצורה שלמה **מדוע** הם הסכימו או לא הסכימו עם ההערות.

מיון של הגדרות התלמידים

אם הייתם מבקשים מתלמידכם לכתוב הגדרה לזווית, אילו הגדרות אתם חושבים שהם היו נותנים? האם ההגדרות שלהם היו כוללות את כל הפריטים שאתם מחשיבים כזוויות? או שמא הם היו מדגישים מאפיינים מסוימים, כך שסוג מסוים של זוויות, כמו זוויות נישאות, או זוויות במידות של 0, 180, או 360 לא היו נכללות בהגדרתם? האם הם היו מתמקדים יותר על ההטיה של הקרניים, על החלק הפנימי, או על התנועה הסיבובית מקרן אחת לשנייה?

האמת היא שכל ההגדרות, מטבען, נוטות לצמצם מושגים משום שהן קובעות גבולות. חישוב, למשל, על ההגדרה הבאה לזווית: "זווית עם קדקוד A היא נקודה A ביחד עם שתי קרניים נפרדות סמוכות

\overrightarrow{AC} ו- \overrightarrow{AB} (הנקראות שוקי הזווית) היוצאות מ-A" (Greenberg 1993). הגדרה זו, הלקוחה מספר לימוד ידוע בגיאומטריה לתלמידי מכללות, אינה כוללת את הזוויות 0, 180, ו-360, ואינה מבחינה בין זווית של x מעלות לבין זווית של (x-360) מעלות. תחת זאת, היא מתמקדת בעיקר בשתי הקרניים, ואינה נותנת שום אינדיקציה לסיבוב מקרן אחת לשנייה, לחלק הפנימי של הזווית, או לדרך בה מודדים זווית. ישנן למעשה סיבות טובות מאוד להגביל את ההגדרה של זווית באופן כזה, אחת מהן היא שהרבה מן המשפטים על זוויות, אותם מוכיחים בספר הלימוד, אינם נוגעים לזוויות שמידותיהן 180 מעלות ויותר; לפיכך, קל יותר לוותר עליהן מאשר להתייחס אליהן כיוצאות דופן שוב ושוב. יחד עם זאת, כאשר תלמידים מוותרים, או מתמקדים יותר מדי על אספקט מסוים, יתכן שהם משדרים שאין להם דימוי מושג מפותח, כזה שהוא גמיש דיו כדי להיות מיושם במצבים שונים רבים.

שניים מאיתנו קראו את ההגדרות של התלמידים ומיינו אותן על פי ההדגשה שבהגדרה. לדוגמה, אם התלמיד כתב, "הזווית היא הקדקוד של מצולע", מיינו הגדרה זו כמדגישה **נקודה**, מאחר והקדקוד הוא הדגש העיקרי (ראה **טבלה 1**). הבחנו מייד ששני הדגשים היו הכי שכיחים – דגש על המדידה של הזווית עצמה, ודגש על החיתוך של קטעים. הגדרות פחות שכיחות הדגישו את המיפתח שבין הקרניים או את הקדקוד עצמו. שמונה תלמידים כתבו מה שאנו מיינו כהגדרות של "צרופים" משום שהן כללו צירוף של שניים או יותר מאפיינים הנחוצים להבנה מלאה של מושג הזווית. מאידך, אחד עשר תלמידים כתבו הגדרות שהיו, או מעורפלות מדי להבנה, או פשוט שגויות. ארבעה תלמידים אחרים כתבו הגדרות כמו "זווית היא המידה של צלע אחת של צורה", ואנו בודקים הלאה כדי לקבוע האם לתלמידים אלה היה בלבול באוצר המילים או שהם באמת האמינו שזווית מכילה רק צלע אחת. הופתענו לראות שרבים מתלמידינו הגדירו זווית **על פי** המידה שלה. תלמידים אינם נוהגים בדרך כלל לעשות שגיאה מסוג כזה עם תכונות אחרות. למשל, לא נוהגים לבלבל קטע עם מדידות של אורכו, כמו אינצ'ים, רגל, וכו'. יתכן שמצב זה קורה משום שאורך נמדד ביחידות מדידה שונות רבות, בעוד שזוויות נמדדות רק במעלות ורדיאנים, ותלמידינו עדיין לא נחשפו למדידת זווית ברדיאנים. לכן, יתכן שקשה לתלמידים להכיר בכך שזווית איננה אותו הדבר כמו המידה של אותה זווית.

בשלב זה של התפתחותם, הפעילות של ניסוח הגדרות הניתנות לשימוש היא ודאי פורמלית מדי עבור התלמידים שלנו, אבל הדיון הנובע מכך יכול לעורר תלמידים למחשבה ביקורתית על המילים שנבחרו, כמו גם על ההשלכות הנובעות מהדגשת יתר של אספקט אחד. אם הייתם מבקשים מתלמידכם לכתוב הגדרות למושג **זווית**, האם אתם חושבים שהייתם מקבלים תוצאות דומות? האם לדיון שיבוא בעקבות זאת יהיו השתמעויות חינוכיות לכם ולתלמידים?

טבלה 1: הגדרות של תלמידים

מס' התלמידים עם הדגש זה (N=78)	אחוז התלמידים	ההדגש של ההגדרה
23	29.5%	המעלות או המידה עצמה "זווית היא מס' המעלות בפינה"
20	25.6%	הקטעים שנפגשים "זווית היא המקום בו שני קטעים נחתכים כדי ליצור זווית"
6	7.7%	המיפתח "באיזו מידה שני קווים רחוקים זה מזה במקום של הקדקוד"
6	7.7%	הנקודה "זווית היא איפה ששני קדקודים נפגשים ויוצרים נקודה."
4	5.1%	מדידה של קצה "זווית היא המידה של צלע אחת של צורה"
8	10.3%	צרוף של שניים מאלה "אני חושב שזווית היא המידה במעלות בין שני קטעים הנוגעים זה בזה"
11	14.1%	היגדים שגויים או מעורפלים "זווית היא צורה שיש לה קווים ישרים ולפחות שלוש זוויות."

מבט על הבעיות שמייצגות סיטואציות

מאחר שהבעיות שהוצגו ב**איור 1** היו סיטואציות שדרשו התמודדות רבה עבור תלמידים שנמצאים באמצע לימוד היחידה "צורות ושרטוטים", היינו סקרנים לדעת האם חלק מן הבעיות יהיו פחות קשות לתלמידנו שסיימו את לימוד היחידה. כפי שניתן לראות ב**טבלה 2**, למרבית התלמידים לא היה קשה להתמודד עם סיטואציות 2 ו-3. ההתנסויות מ"צורות ושרטוטים", ביחד עם הניסיון הקודם שלהם, סייע כנראה לרבים מתלמידנו להשמיט את הקווים העקומים מדימוי המושג שלהם על זווית. תלמידנו גם לא גילו קושי לדמין זוויות של 0 מעלות, 180 מעלות, או 360 מעלות, למרות שזוויות מיוחדות אלה לא נראו כמו "פינות", וניתן לדמין אותם בצורה הטובה ביותר אם חושבים על התנועה הסיבובית של הקרניים, במקום להתמקד בקרניים עצמן. למעשה, תלמיד אחד כתב, "אני לא מסכים עם התלמיד, משום שסיבוב של 360 מעלות איננו מעגל. זו רק המידה מנקודה, כל הדרך מסביב עד שהיא פוגשת את עצמה בצד השני". (שימו לב שתלמיד זה מדבר גם הוא על נקודה, במקום על קרן, הנמצאת בתנועה. למרות שתלמיד זה מראה יכולת לדמין סיבוב של 360 מעלות, הרי שחסר לו אוצר המילים כדי לבטא כראוי את החשיבה שלו).

לעומת זאת, בסיטואציה 1 תלמידינו התקשו לראות שאם מגדילים את קנה המידה או מגדילים זווית, תוך שמירה על דמיון בין הצורות, אזי המידה של הזווית נשארת קבועה. 76 אחוז מן התלמידים שקראו את סיטואציה 1, הסכימו עם קליר שהזווית המצוירת בספר שלהם, ממנו נלקח תרשים המפה שבסיטואציה 1, היא קטנה יותר מאשר הגירסה של קנה המידה המוגדל בחיים האמיתיים. תלמיד אחד כתב, "כן [אני מסכים], המפה היא גירסה קטנה למרות שהיא נראית כמו תמונה אמיתית. אם מגדילים את זה, הזווית תהיה גדולה יותר". תלמיד אחר כתב, "אני מסכים משום שתמונה גדולה יותר היא מעלה גדולה יותר."

טבלה 2: ניתוח סיטואציות 1, 2, ו-3

מס' התלמידים שהסכימו	מס' התלמידים שלא הסכימו	אחוז התלמידים שהסכימו	אחוז התלמידים שלא הסכימו	
42	13	76%	24%	סיטואציה 1
12	24	33.33%	66.66%	סיטואציה 2
3	17	15%	85%	סיטואציה 3

הבנות שגויות אלו ניתנות להסבר במספר דרכים. אם תלמידים רואים זווית כמרחק הליניארי בין שתי קרניים, או כשטח שבין שתי קרניים, אזי הגיוני להסיק שככל שמתרחקים מקדקוד הזווית, בזמן שנמצאים בחלק הפנימי של הזווית, כך הזווית נראית גדולה יותר. גם תלמידים המאמינים שזווית קשורה לאורך הקרניים יכולים להסיק שזווית שקנה המידה שלה הוגדל תהיה בעלת מידות גדולות יותר. יתכן שלא ניתן לטפל בהבנות שגויות אלו כראוי עד שלתלמידים יש הבנה טובה יותר של דמיון. כאשר הם יחקרו צורות דומות, הם ילמדו שלמרות שאורכי כל הצלעות גדלים, הרי שמידות הזוויות נשארות קבועות. ההבנה השגויה מצביעה גם על בעיה רחבה יותר עבור תלמידים רבים – זו של חשיבה פרופורציונלית. כאשר תלמידים אחדים לומדים להשתמש בגורמים של קנה המידה כדי להגדיל או להקטין גודל של צורות, הם לעיתים קרובות מאמינים שכל התכונות גדלות או קטנות באותו האופן. למשל, אם "מכפילים" את גודלו של משולש, הטרמינולוגיה יכולה להיות מבלבלת: כאשר מכפילים את אורך הצלעות, ההיקף גדל פי שניים, השטח גדל בריבוע, אבל הזוויות נשארות קבועות!

השלכות להוראה ולמידה

אוסף הנתונים הקטן שקיבלנו מן התלמידים שלנו נתן לנו תובנה גדולה לגבי החשיבה שלהם. למדנו שאנו צריכים למצוא דרך להדגיש את ההבדל בין תכונה לבין מדידתה. למדנו שלרבים מתלמידינו חסר אוצר המילים הגיאומטריות הנדרש כדי לבטא את מה שהם מתכוונים. למדנו גם שהקביעות של מידת הזווית בשעה שמגדילים או מקטינים זווית היא רעיון שתלמידים מעטים מבינים באמת. גילינו גם שבקשה מתלמידים להגיב להערות של תלמידים אחרים, הינה דרך בלתי מאיימת לעשות הערכה על החשיבה שלהם. תלמידינו נהנו לשמוע שהערות אלו הגיעו מתלמידים ממדינה אחרת לפני כמעט שמונה שנים, ועם זאת הרעיונות שהובעו על ידי שתי קבוצות התלמידים היו מאוד דומים. שימוש בבעיות המייצגות סיטואציות ללא שם נראה כאסטרטגיה טובה לעורר דיונים. חשוב מכל, למדנו ששאילת שאלות באופן שאינו מאיים ואינו מכוון למתן ציונים, הינה אמצעי פורה לא רק עבור התלמידים, אלא גם עבור הצמיחה שלנו כאנשי מקצוע רפלקטיביים.

ביבליוגרפיה

- Greenberg, M.J. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*.
3rd ed. San Francisco: W. H. Freeman & Co., 1993.
- Keiser, Jane M. "The Role of Definition." *Mathematics Teaching in the Middle School* 5
(April 2000): 506-11.
- Lappan, Glenda, James T. Fey, William M. Fitzgerald, Susan N. Friel, and Elizabeth Difanis
Phillips. *Shapes and Design: Teacher's Guide*. Palo Alto, Calif.: Dale Seymour
Publications, 1996.
- Tall, D. O., and S. Vinner. "Concept Image and Concept Definition in Mathematics, with
Particular Reference to Limits and Continuity." *Educational Studies in Mathematics* 12
(1981): 151-69.