עידוד להתמדה בפתרון בעיות במתמטיקה בביה"ס היסודי

Encouraging Perseverance in Elementary Mathematics: A Tale of Two Problems

מאת: Doug M. Clarke and Barbara A. Clarke

הופיע ב: Teaching Children Mathematics , Vol. 10 No. 4, December 2003, pp. 204-209

תרגום: ברכה סגליס

פרופ' אלן שנפלד טוען שתלמידים רבים מחזיקים באמונות הבאות על מתמטיקה:

- לבעיות במתמטיקה יש אך ורק תשובה נכונה אחת.
- ישנה רק דרך נכונה אחת לפתור בעיה מתמטית כלשהי – על פי רוב זהו הכלל שהמורה לימדה לאחרונה.
- לא ניתן לצפות מתלמידים רגילים להבין מתמטיקה; הם פשוט משננים אותה ומיישמים מה שלימדו באופן טכני.
- מתמטיקה היא פעילות יחידנית, הנעשית באופן אינדיבידואלי, בבידוד.
- תלמידים שמבינים את המתמטיקה שלמדו יהיו מסוגלים לפתור כל בעיה בחמש דקות או פחות. (Schoenfeld 1992, p. 359).

שנפלד טוען שתלמידים מגבשים את אמונותיהם על מתמטיקה פורמלית בעיקר מתוך ההתנסויות שלהם בכיתה, ושאמונות אלו "מעצבות את ההתנהגות שלהם בדרכים שיש להן השלכות רבות עוצמה (לרוב בכיוון שלילי)" (עמוד 359).

הוא מצטט את המחקר שלו (Schoenfeld 1988) שבו ערך סקר ל- 227 תלמידים בתיכון בכיתות י' – י"ב. כאשר התלמידים נשאלו, "אם אתה מבין את החומר, כמה זמן צריך לעבוד כדי לפתור בעיה מתמטית טיפוסית בשיעורי הבית?" הם נתנו תשובות שהממוצע שלהן היה 2.2 דקות. אותם תלמידים נשאלו, "מהו הזמן הסביר לעבוד על בעיה, לפני שאתה יודע שהיא לא פתירה?" וממוצע התגובות שלהם היה 11.7 דקות.

למרות שאלה היו תלמידי תיכון, אם ההתנסויות בכתה הן הגורם העיקרי לעיצוב אמונות אלה, אזי הדפוסים מתחילים קרוב לודאי להיקבע בשנים המוקדמות של ביה"ס היסודי. מרבית הקוראים יהיו מודאגים מאמונות אלה של התלמידים על תחום הדעת של המתמטיקה ועל המשמעות של עשייה מתמטית. ניתן לטעון שעל מורים בכל שכבות הגיל מוטלת האחריות, על ידי דבריהם והתנהגותם, להציג נקודת מבט שונה.

אז מה יכול מורה טיפוסי של כיתה לעשות? מספר חוקרים (Bird 1999; Folkson 1995) הדגימו כיצד שימוש בבעיות מאתגרות ומרתקות יכול להשפיע על האמונות של ילדים אודות מתמטיקה ואודות עצמם כלומדים.

אסטרטגיה אחת היא שהמורה ידגים את המאמץ הכרוך על פי רוב בפתרון בעיות אמיתיות. המורה יכול להציג בעיה שהוא עצמו עדיין לא פתר ולהראות לתלמידים את סוג התהליך הנדרש כדי להצליח בבעיה כזו. עצם העובדה שהתלמידים רואים שהמורה לא יכול לפתור בעיה מסוימת באופן מיידי, תשפיע במידה רבה על רבים מהם החושבים שמורים יכולים לפתור וכבר פתרו כל בעיה.
מאמר זה מביא את ההתנסויות של ילדים בכיתה ב׳ בשעה שהם ״נאבקו״ עם שתי בעיות בתוך סביבה תומכת אך מאתגרת, וראו את היתרונות של המאמץ: השגת פתרונות ראויים וקבלת סיפוק רב מן ההשקעה שלהם.

רקע

ההתנסויות הכיתתיות הנדונות במאמר זה נערכו כחלק מפרויקט מחקר בנושא אוריינות מספרית מוקדמת (Early Numeracy) שהתקיים בויקטוריה, אוסטרליה. 350 מורים של גן- ב׳ בשלושים וחמישה בתי ספר השתתפו במשך שלוש שנים בפרויקט של מחקר והתפתחות מקצועית, שבדק מהן הגישות האפקטיביות ביותר להוראת המתמטיקה בשלוש השנים הראשונות של בית הספר.
להלן שלושה מרכיבים עיקריים של פרויקט זה:

- מסגרת מבוססת מחקר של ״נקודות צמיחה״ בלמידה המתמטית של ילדים (בתחומי המספר, מדידות וגיאומטריה), המדגישה מסלולי למידה אופייניים ואבני דרך חשובות בחשיבה ובאסטרטגיות של הילדים.
- ראיון אינדיבידואלי, במשך ארבעים דקות, שבו השתמשו כל המורים עם כל הילדים בתחילה ובסיום של שנת הלימודים (בזמן כתיבת מאמר זה, נעשה שימוש בראיון עם יותר משלושים וששה אלף ילדים בכיתות גן – ד׳).
- התפתחות מקצועית מקיפה ברמה בית-ספרית, אזורית ומרכזית, לכל המורים, אנשי קשר ומנהלים, כשהמוקד הוא לקחת מה שנלמד מן הראיון ומקשר יומיומי עם ילדים כדי להביא לתכנון ולהוראה באפקטיביות מירבית, מבחינה קוגניטיבית ורגשית.

מידע נוסף על הפרויקט ניתן למצוא אצל Clarke (2001), Clarke et al. (2002, 2003) ואצל Sullivan et al. (2000).

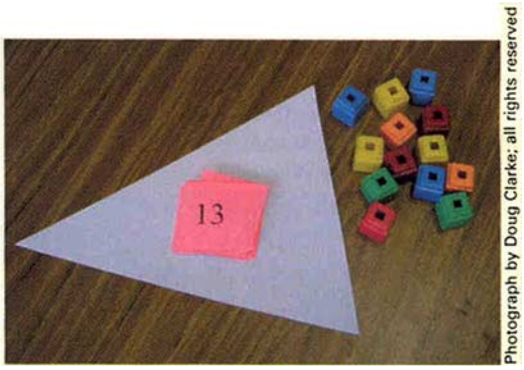
כחלק מן ההתפתחות המקצועית בפרויקט, ערך צוות המחקר 578 ביקורים לבתי ספר, בהם עבד עם מורים, ילדים, מנהלים, מדריכים במתמטיקה והורים. בכל ביקור הצוות עבד בכיתות, או תוך השתלבות בפעילויות המתמטיות הרגילות שנעשו בכיתה, או בהוראה משותפת עם מורת הכיתה הרגילה, בהם על פי רוב היתה התנסות עם משימות ובעיות מתמטיות בהן החוקרים או המורים לא השתמשו לפני כן. הדיון שלהלן עוסק בשתי בעיות כאלה.

הבעיה הראשונה

Ararat North Primary School הוא בי״ס קטן בקהילה כפרית בויקטוריה. במהלך ביקור בבית הספר, אחד מכותבי המאמר הציג בפני תלמידי כיתה ב׳ של המורה Anne Joyce פעילות שהובילה את התלמידים להציג בעיה נוספת. הפעילות עובדה מתוך חומרי הלימוד בשם Primary Initiatives in Mathematics Education מאנגליה (ראה Shuard 1992). ההתנסויות המתוארות כאן התקיימו בחלק האחרון של שנת הלימודים, כאשר מרבית תלמידי כיתה ב׳ הם בערך בגיל שמונה.

לאחר הקדמה שניתנה לכל הכיתה, המורה והחוקר נתנו לילדים משולשים מקרטון, ערימה של קוביות מתחברות, וכרטיסים קטנים עם המספרים 1 עד 20. (ראה **איור 1**). בעבודה בקבוצות של שלוש, הילדים ערבבו את הכרטיסים. לאחר מכן הם הפכו כרטיס, לקחו כמות של קוביות מתחברות המתאימה למספר, ובנו שלושה מגדלים, אחד בכל פינה של המשולש. אמרנו לילדים ליצור את שלושת המגדלים בגבהים שווים עד כמה שניתן. הילדים התבקשו לתעד בדרך כלשהי, עבור כל מספר שהופיע בכרטיסים שהפכו, האם המגדלים יכולים להיות בגובה שווה. לדוגמה, עם שתים עשרה קוביות זה עובד, אבל עם שבע זה לא עובד. כפי שניתן לראות ב**איור 2**, חלוקה של ארבע תביא ליצירת מגדלים לא זהים כאשר מניחים את הקוביה האחרונה.

איור 1: החומרים בהם השתמשו התלמידים

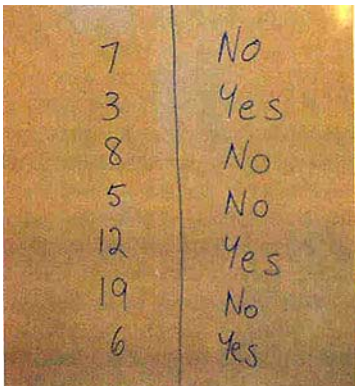


איור 2: הצבת הקובייה האחרונה

בשעה שהילדים עבדו, הסתובבנו בכיתה, כשאנו מעודדים אותם לשתף זה את זה בהבחנות שלהם. ילדים אחדים שיערו שמספר זוגי (even) של קוביות יוביל ליצירת "מגדלים שווים" (even towers), דוגמה מעניינת כיצד המשמעות היומיומית של מילה (even) יכולה להיות שונה מהמשמעות המתמטית שלה.

לאחר כשלושים דקות, קיבצנו יחד את ילדי הכיתה והקבוצות שיתפו זו את זו בגילויים שלהם. הטבלה שהוצגה על הלוח סיכמה את הממצאים שלהם (**איור 3**). הזמנו את הילדים להעלות השערות לגבי דפוסים שניתן היה לראות. רק ילד אחד הצביע על דוגמאות נגדיות לתיאוריה שמספרים זוגיים יצרו מגדלים שווים. לא היו הצעות לדפוסים אחרים.

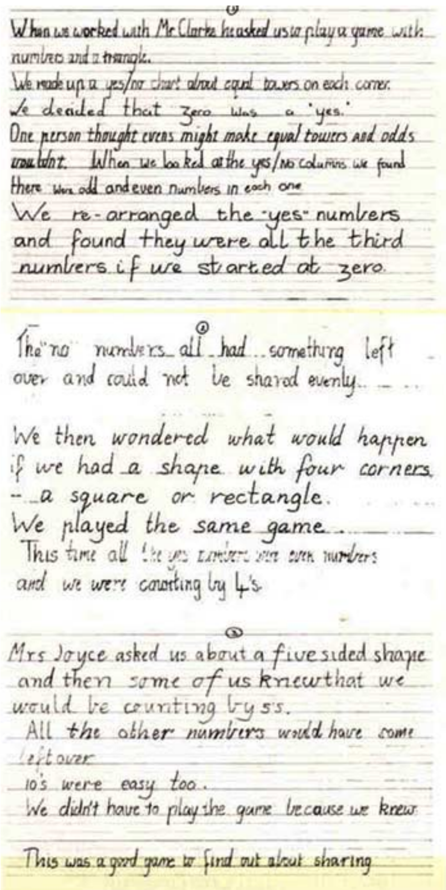
איור 3: ממצאי התלמידים



בדיונים שנערכו לאחר מכן עם המורים, ציינו בפניהם שזוהי עדות נוספת לאתגרים שמעמידים מושגים הקשורים לחשיבה כפלית בפני ילדים צעירים. עדות קודמת הופיעה בראיונות האישיים. בכוונה החלטנו לא לרשום בשלב זה את המספרים בעמודה השמאלית לפי הסדר. הפיתוי למורה בשלב זה הוא להגיע למצב של סגירת הדיון על ידי הובלת התלמידים לדפוס הרצוי. Anne Joyce עמדה בפני פיתוי זה, ועודדה את הילדים במהלך הימים הבאים, להמשיך ולחשוב על דפוסים אפשריים: "בכל פעם שאתם עוברים בימים הקרובים ליד הלוח, נסו לראות אם אתם רואים משהו מעניין, וספרו לי מה גיליתם."

לאחר שבוע, כל מורי הפרויקט נפגשו ליום של השתלמות. Anne Joyce הביאה משהו מהילדים עבור כותבי המאמר. היא הסבירה שהילדים המשיכו לחשוב על דפוסים בממצאים ושהם ניהלו רישום של מה שעשו. הרישום נעשה על ידי מספר ילדים, כל אחד רשם חלק אחר של הסיפור. היא השאירה את הסיפור אצלנו (ראה איור 4). היינו נרגשים לא רק ממה שהילדים גילו, אלא גם מהדרך שבה הם ניסו לבדוק את הבעיה המקורית עבור צורות שונות - דרך שהובילה אותם לרמה של הכללה. הם התמידו לעבוד על מה שהיה עבורם בעיה מאתגרת.

איור 4: הילדים מתעדים את הסיפור שלהם


When we worked with Mr Clarke he asked us to play a game with numbers and a triangle.
We made up a yes/no chart about equal towers on each corner.
We decided that zero was a 'yes.'
One person thought evens might make equal towers and odds wouldn't. When we looked at the yes/no columns we found there was odd and even numbers in each one.
We re-arranged the 'yes' numbers and found they were all the third numbers if we started at zero.

The 'no' numbers all had something left over and could not be shared evenly.
We then wondered what would happen if we had a shape with four corners -- a square or rectangle.
We played the same game.
This time all the yes numbers were even numbers and we were counting by 4's.

Mrs Joyce asked us about a five sided shape and then some of us knew that we would be counting by 5's.
All the other numbers would have come leftover
10's were easy too.
We didn't have to play the game because we knew
This was a good game to find out about sharing

(1)

כשעבדנו עם מר קלארק הוא ביקש מאיתנו לשחק משחק עם מספרים ועם משולש.

הכנו טבלה של "כן/ לא" על מגדלים שווים בכל פינה.

החלטנו שאפס זה "כן".

אחד מאיתנו חשב שמספרים זוגיים יכולים לעשות מגדלים שווים ומספרים אי-זוגיים לא יכולים. כשהסתכלנו על העמודות של "כן /לא" גלינו שיש מספרים זוגיים ואי-זוגיים בכל עמודה.

סידרנו מחדש את המספרים של "כן" וגילינו שכולם היו המספרים השלישיים אם מתחילים מאפס.

(2)

לכל המספרים של "לא" היה משהוא שנשאר ולא יכולנו לחלק אותו בצורה שווה.

אחרי זה שאלנו את עצמנו מה יקרה אם תהיה לנו צורה עם ארבע פינות – ריבוע או מלבן ושיחקנו באותו משחק.

הפעם כל המספרים של "כן" היו מספרים זוגיים וספרנו ברביעיות.

(3)

גב' ג'ויס שאלה אותנו על צורה עם חמש פינות ואז חלק מאיתנו ידעו שאז נספור בחמישיות.

בכל יתר המספרים ישאר משהוא.

גם עשיריות היה קל. לא היינו צריכים לשחק את המשחק, כי ידענו.

זה היה משחק טוב. למדנו בו על חלוקה שווה.

ההתנסות החיובית מן העבודה על בעיה זו, עודדה אותנו לשלוח לילדים בעיה נוספת.

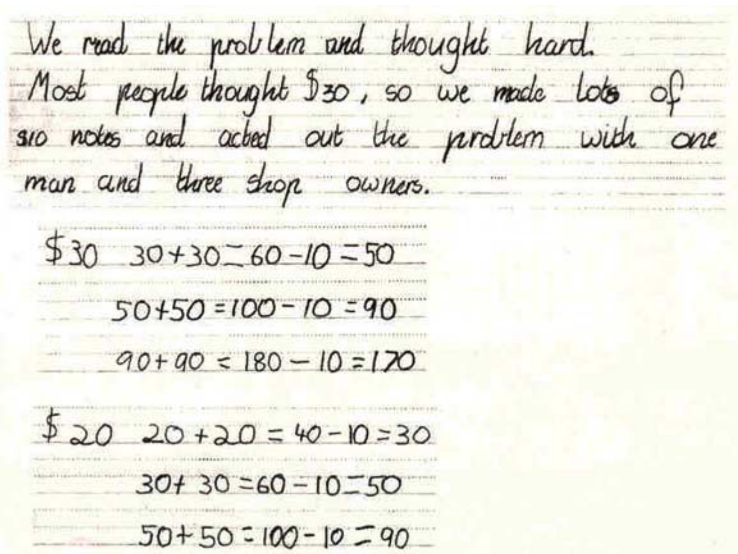
הבעיה השנייה

לפני מספר שנים, נתקלנו בבעיה הבאה (מקור לא ידוע):

איש אחד נכנס לחנות ואומר לבעל החנות, "תן לי סכום כסף השווה לסכום שיש לי ואני אקנה אצלך בסכום של $10". אחרי שזה נעשה, האיש עושה אותו הדבר בחנות שנייה ובחנות שלישית ואז לא נשאר לו יותר כסף. מה סכום הכסף שהיה לו בהתחלה?

אנו מזמינים את הקוראים לעבוד זמן מה על בעיה זו. מניסיוננו במשך שנים עם פרחי הוראה במסגרת מפגשי הוראה שעסקו באסטרטגיות של פתרון בעיות, מצאנו בעיה זו כיעילה ביותר. כמובן, הצגת בעיה זו לפרחי הוראה, שונה למדי מהצגתה לילדים בגיל שמונה. אף על פי כן, שלחנו פקס עם עותק של הבעיה אל הילדים. הסברנו שזוהי בעיה מאוד קשה, אבל אנו חושבים שהם ייהנו מן האתגר שהיא מציבה. במשך כשלושה שבועות, לא שמענו דבר מבית הספר, עד שמכתב גדול הגיע אלינו ביום שישי אחה״צ. המכתב המלווה מ- Anne Joyce הסביר שהתלמידים המשיכו לבדוק את הבעיה במהלך מספר ימים. שוב, הם ניהלו רישום של דרכי חשיבתם ושל התגליות שלהם בכל שלב. Anne Joyce שלחה לנו את העבודה של התלמידים.

איור 5: הניסיונות הראשונים של תלמידים לפתור את הבעיה


We read the problem and thought hard.
Most people thought $30, so we made lots of
$10 notes and acted out the problem with one
man and three shop owners.

$30 30+30=60-10=50
50+50=100-10=90
90+90=180-10=170

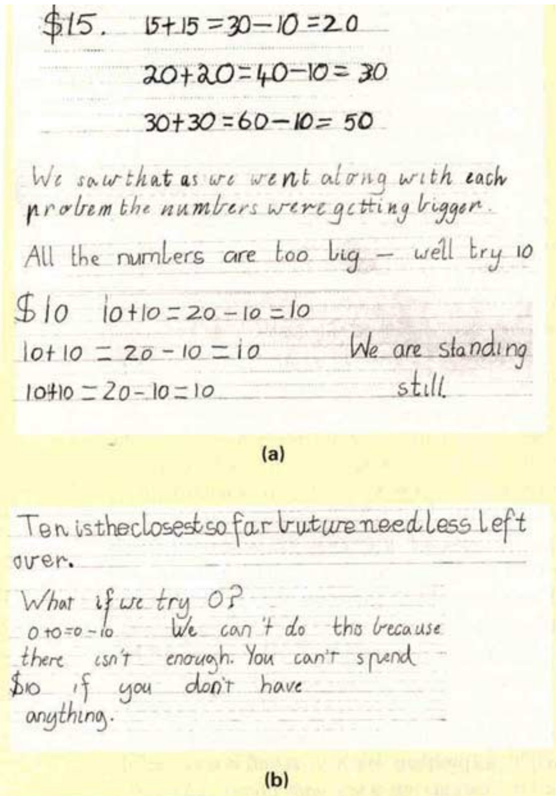
$20 20+20=40-10=30
30+30=60-10=50
50+50=100-10=90

קראנו את הבעיה וחשבנו הרבה. הרוב חשבו $30.
אז הכנו הרבה פתקים של $10 והצגנו את הבעיה
עם איש אחד ושלושה בעלי חנויות.

שמחנו לראות שלילדים היתה מוטיבציה להתחיל עם אומדן ראשוני, והיה מעניין לגלות שמרבית התלמידים חשבו שהתשובה היא $30, כנראה משום ששלוש פעמים $10 שווה $30 (ראה **איור 5**). דבר מעניין נוסף היה שהם החליטו להמחיז את הסיפור כדרך להבנת הבעיה ומה בעצם נדרש בה. מעורבות פיזית הינה לעיתים קרובות מכשיר רב עצמה בכיתה המתמטית. חשוב היה, כמובן, להעיר לילדים שהשימוש בסימן השווה בהיגדים שלהם שגוי וששני הצדדים של ה״משוואות״ שיצרו אינם שווי ערך.

הילדים המשיכו לנסות ערכים שונים, אבל בכל פעם סיימו עם סכום סופי יחסית גבוה (ראה **איור 6א**). אהבנו את ההערה, "אנחנו עומדים במקום". בשלב זה, הילדים הבינו שהם צריכים להתחיל עם מספר עוד יותר קטן (ראה **איור 6ב**).

איור 6: הילדים ערכו ניסיונות עם ערכים שונים


$15. 15+15=30-10=20
20+20=40-10=30
30+30=60-10=50
We saw that as we went along with each problem the numbers were getting bigger.
All the numbers are too big – well try 10
$10 10+10=20-10=10
10+10=20-10=10 We are standing
10+10=20-10=10 still
(a)
Ten is the closest so far but we need less left over.
What if we try 0?
0+0=0-10 We can't do this because there isn't enough. You can't spend $10 if you don't have anything.
(b)

$15. 15+15=30-10=20
20+20=40-10=30
30+30=60-10=50
ראינו שכעברנו מבעיה לבעיה המספרים נעשו גדולים יותר.
כל המספרים גדולים מדי – ננסה 10 .

$10. 10+10=20-10=10
10+10=20-10=10
אנחנו עומדים במקום 10+10=20-10=10

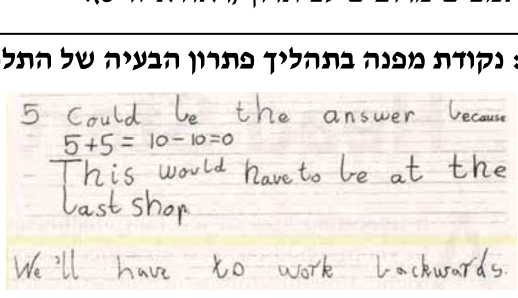
(א)

עד עכשיו, עשר זה המספר הכי קרוב, אבל אנחנו צריכים שישאר פחות.
מה אם ננסה 0?
0+0=0-10 אנחנו לא יכולים לעשות את זה משום שאין מספיק. אנחנו לא יכולים להוציא $10 אם אין לנו כלום.

(ב)

איור 7 מראה נקודה קריטית בתהליך פתרון הבעיות של הילדים. הילדים גילו מה קורה אם מתחילים עם $5 ופיתחו אסטרטגיה של הליכה לאחור. למרות שהחישובים היו מסובכים, במיוחד עבור ילדים בכיתה ב׳, הם הגיעו אחרי מאמצים מרובים לפיתרון (ראה **איור 8**).

איור 7: נקודת מפנה בתהליך פתרון הבעיה של התלמידים


5 Could be the answer because
5+5=10-10=0
This would have to be at the last shop
We'll have to work backwards

5 יכול להיות התשובה כי 5+5=10-10=0
זה יצטרך להיות בחנות האחרונה
נצטרך לעבוד מהסוף להתחלה.

איור 8: הפתרון של התלמידים

חנות 3

5 + 5 = 10 -10 = 0

חנות 2

התשובה שלנו תצטרך להיות 5.

[?] – 10 = 5

[15] – 10 = 5

נצטרך להשתמש ב- 50 סנט כדי לחצות את $15

$ 7.50 +$ 7.50 = 15

15 - 10 = 5

חנות 1

אנחנו צריכים ש- 7.50 יהיה התשובה שלנו.

$ 7.50 + $ 10 = $ 17.50

$ 17.50 - $ 10 = $ 7.50

$ 17.50 זה קרוב ל- 18 $.   1/2 מ- 18 = 9.

יש לנו 50 סנט יותר מדי. נצטרך לקחת משהוא מכל 9.00 $ כדי להשוות ל- 50 סנט.

נצטרך לקחת 25 סנט מכל אחד.

$ 9.00 – 25 סנט = $ 8.75

גילינו שהאיש התחיל עם 8.75 $.

חלק מן הקוראים יטילו אולי ספק ביכולתם של תלמידים רגילים בכיתה ב' לעשות עבודה כזו. המורה שלהם הסבירה שלאחר זמן מה, המתמטיקה היתה קשה מדי עבור חלק מן התלמידים. למרות זאת, כולם המשיכו להשתתף בדרכים שונות, בניהול הרישום, בהצגת תפקיד בעל החנות, וכדומה. תלמידים שהיו מסוגלים להתמודד עם המתמטיקה שנעשתה יותר ויותר מורכבת, המשיכו לחפש פיתרון.

בסוף החיבור שלהם כתבו הילדים את ההצהרה הבאה: "היינו צריכים לחשוב הרבה ולעבוד הרבה". היינו נרגשים מאיכות החשיבה של התלמידים ומההתמדה שלהם בבעיה כזו קשה.

תלמידי כיתה ב' כבעלי חשיבה מתמטית

בדיון מצוין אודות חשיבה מתמטית, Watson and Mason(1998) מביאים רשימה של תשעה עשר "סוגים של פעילות מנטלית, אשר ביחד, מאפיינים חשיבה מתמטית" (עמ' 7). ארבעה עשר מתוכם הופיעו בעבודה של ילדים אלה על שתי הבעיות: הדגמה (exemplifying), מיון (sorting), שינוי (changing), היפוך (reversing), הכללה (generalizing), הסבר (explaining), אימות (verifying), הפרכה (refuting), התמחות (specializing), השוואה (comparing), ארגון (organizing), העלאת השערות (conjecturing), הצדקה (justifying), ו- שכנוע (convincing).

הילדים היו עסוקים בחשיבה מתמטית מסוג מרשים, שנתן להם ולמורתם סיפוק רב. לשביעות רצון זו, כמו גם לחשיפה של הילדים למשמעות של עבודה מתמטית, תהיה השפעה חיובית גם על אספקטים רגשיים של למידתם.

מסקנה

מאמר זה התחיל בדיון על האמונות המדאיגות אודות טיבה של המתמטיקה והעשייה המתמטית אותן מפתחים תלמידים רבים במהלך לימודי המתמטיקה שלהם. מדאיגה במיוחד היא הדעה של תלמידים שאם הם לא יכולים לפתור בעיה תיכף ומיד, אזי אין אפשרות לפתור אותה.

כפי שמדגים סיפור זה, אם מורים יבחרו בעיות עשירות לעבודתם עם ילדים, ואם יעודדו התמדה, עבודה שיתופית, העלאת השערות, שיתוף בממצאים, ויתנו מספיק זמן להתגלות של אפשרויות, אזי ישנו סיכוי סביר שאמונות כאלה יופיעו פחות בהמשך שנות לימודיהם. אנו מקווים שאמונות אלו יתחלפו בהרגשת ביטחון בכך שפתרון בעיות מתמטיות קשות, הדורשות התמדה ומאמץ מתמשך, יכול לתת לתלמידים מידה רבה של סיפוק והנאה.

ביבליוגרפיה

Bird, Elliot. "What's in the Box? A Problem-Solving Lesson and a Discussion about Teaching." *Teaching Children Mathematics* 5 (May 1999):504-7.

Clark, Doug M. "Understanding, Assessing, and Developing Young Children's Mathematical Thinking: Research as a Powerful Tool for Professional Growth." In *Numeracy and Beyond: Proceedings of the 24th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia,* edited by Janette Bobis, Bob Perry, and

Michael Mitchelmore, Vol. 1, pp. 9-26. Sydney: Mathematics Education Research Group of Australasia, 2001.

Clarke, Doug, Jill Cheeseman, Ann Gervasoni, Donna Gronn, Marj Horne, Andrea McDonough, Pam Montgomery, Anne Roche, Glenn Rowley, and Peter Sullivan. *Early Numeracy Research Project Final Report.* Melbourne, Australia: Mathematics Teaching and Learning Centre, Australian Catholic University, 2002.

Clarke, Doug M., Jill Cheeseman, Andrea McDonough, and Barbara Clarke. "Assessing and Developing Measurement with Young Children." In *Learning and Teaching Measurement*, 2003 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, edited by Douglas M. Clements and George W. Bright. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 2003.

Folkson, Susan. "Who's Behind the Fence? Creating a Rich Learning Environment with a Nontraditional Problem." *Teaching Children Mathematics* 1 (February 1995):382-85.

Schoenfeld, Alan H. "Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics." In *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, edited by Douglas A. Grouws, pp. 334-70. New York: Macmillan, 1992.

______. "When Good Teaching Leads to Bad Results: The Disasters of 'Well Taught' Mathematics Classes." *Educational Psychologist* 23 (Spring 1988): 145-66.

Shuard, Hilary. "CAN: Calculator Use in Primary Grades in England and Wales." In *Calculators in Mathematics Education*, 1992 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, edited by James Fey and Christian Hirsch, pp. 33-45. Reston, Va: NCTM, 1992.

Sullivan, Peter, Jill Cheeseman, Barbara Clarke, Doug Clarke, Ann Gervasoni, Donna Gronn, Marj Horne, Andrea McDonough, and Pam Montgomery. "Using Learning Growth Points to Help Structure Numeracy Teaching." *Australian Primary Mathematics Classroom* 5 (January 2000):4-8.

Watson, Anne, and John Mason. *Questions and Prompts for Mathematical Thinking*. Derby, U.K.: Association for Teachers of Mathematics, 1998.