כיצד ילדים חושבים על חילוק שברים

How Children Think about Division with Fractions

מאת: Mary Ann Warrington

הופיע ב: Mathematics Teaching in the Middle School, Vol. 2 No.6, May1997, pp. 390-394
תרגום: ברכה סגליס

הערה: על סמך מאמר זה הוכנו מספר פעילויות להכשרת מורים, המופיעות בחוברת: שברים- מחקרים ופעילויות, מאת פסיה צמיר ועמיתים, הוצאת רמות – אוני' תל-אביב, 2003.

כאשר מרשים לילדים ליצור ולהמציא, מוחותיהם הפורים מאפשרים להם לפתור בעיות במגוון של דרכים מקוריות והגיוניות. כאשר מוחותיהם אינם כבולים בכללים ובמוסכמות, ילדים חופשיים להמציא פרוצדורות המשקפות את תהליכי החשיבה הטבעיים שלהם.

הרבה מן המחקרים והתיעוד העוסק בהמצאות של ילדים מתמקד בגישות שלהם לחיבור, חיסור, כפל וחילוק במספרים שלמים. מחקר והתנסות בתחומים אלה הראה שילדים יכולים לפתח פרוצדורות מורכבות ומשמעותיות לחישובים ולפתרון בעיות, ללא למידה מפורשת של שימוש באלגוריתמים סטנדרטיים. הדיווח על פרוצדורות מומצאות היה לא רק בארה״ב (Kamii 1989; Madell 1985), אלא גם בברזיל (Carraher, Carraher and Schliemann 1985), הולנד (Heege 1978; Treffers 1987), ודרום אפריקה (Olivier, Murray and Human 1991). בארה״ב, מורים מובילים אחדים, כמו Burns (1994) ו- Leinward (1994), נטשו את ההוראה של אלגוריתמים לילדים צעירים, וחוקרים אחדים, כולל Kamii (1994), הראו אפילו שהעיסוק בזה גורם נזק. על אף עדויות משכנעות אודות פרוצדורות של ילדים בשברים (Mack 1990; Streefland 1993), מרבית המורים עדיין מאמינים שכדי לטפל במתמטיקה המורכבת יותר של כיתות הביניים והלאה, ילדים צריכים ללמוד פרוצדורות ואלגוריתמים ספציפיים.

כמורה בכיתות ה׳-ו׳, אני מרגישה מחויבות עמוקה לרפורמה בחינוך המתמטי ומאמינה מאוד בערך של בניית ידע עצמי על ידי הילדים. למרות זאת, כאשר התחלתי ללמד בכיתות הביניים לפני ארבע שנים, התלבטתי, כמו מורים רבים, האם תלמידים יכולים להמשיך להתקדם במתמטיקה ללא הוראה של פרוצדורות, פעולות ואלגוריתמים. למרות שהייתי משוכנעת לגבי הוראה קונסטרוקטיביסטית בכיתות היסוד, הרי שהמחשבה על התמודדות עם תוכנית הלימודים של כיתות הביניים, העוסקת בשברים, מספרים עשרוניים ואחוזים, באותה גישה נראתה לי מפחידה. יחד עם זאת, המחשבה ללכת על בטוח וללמד בגישה המסורתית, סתרה את כל מה שידעתי על האופן שבו ילדים לומדים מתמטיקה. נוסף על כך, הייתי מודעת היטב לסטטיסטיקה המדאיגה בקשר להישגים במתמטיקה בבתי הספר שלנו ולחוסר היעילות הגלויה של הרבה מן השיטות הנהוגות היום. משום כך, בחרתי ללמד מתמטיקה לכיתה של תלמידי ה׳ – ו׳ תוך שימוש בגישה הקונסטרוקטיביסטית שבה התלמידים קיבלו עידוד לחשוב לעומק על מושגים מתמטיים ולהמציא את השיטות שלהם לפתרון בעיות.

מטרת מאמר זה היא לאפשר לאחרים לדעת שבניגוד לאמונה הרווחת, ילדים בהחלט **יכולים** לבנות ידע על מושגים מורכבים ומופשטים במתמטיקה, ללא שימוש באלגוריתמים. בחרתי להתמקד בחילוק שברים של התלמידים, משום שהכלל של "כפל בהופכי" תמיד הביך אותי, והייתי מוטרדת לגבי היכולת של תלמידים למצוא משמעות בתחום שמבוגרים מעטים מבינים. מרבית המבוגרים "כופלים בהופכי" ללא כל מושג מדוע הם עושים זאת, ותלמידים בדרך כלל אינם יכולים להסביר את ההיגיון שמאחורי פרוצדורה מקובלת ונפוצה זו.

הדיווח הבא מספק תובנה לגבי הדרך שבה ילדים חושבים באופן טבעי כאשר מעודדים אותם לחשוב בעצמם. התלמידים שרעיונותיהם מובאים במאמר זה, היו תלמידי כיתות ה' – ו' בכיתה הטרוגנית רב-גילאית. התלמידים נחשפו בעבר למגוון של דרכי הוראה, לפני שנכנסו לכיתה שלי. חלק למדו אלגוריתמים, חלק עבדו במידה רבה עם אמצעי המחשה, ולחלק היו שנתיים של הוראת מתמטיקה בגישה קונסטרוקטיביסטית. תרבות הכיתה ובית הספר היא זו המעריכה את תהליך הלמידה, והתלמידים רגילים להחליף דעות בפתיחות.

מחשבות של ילדים על חילוק שברים

בשלב שבו הוצג נושא זה, התלמידים כבר בנו לעצמם ידע ניכר אודות שברים ורכשו ביטחון ושליטה בנושא של שקילות שברים. העבודה המדווחת כאן התחילה בפברואר, כך שעבדתי עם תלמידים אלה במשך חמישה חודשים לפחות. הילדים כבר הוכיחו יכולת להמציא דרכים לחבר, לחסר, ולכפול שברים ללא הוראה ישירה של פרוצדורות ואלגוריתמים.

מכיוון שאני מאמינה שילדים בונים ידע על בסיס מה שהם כבר יודעים, לימדתי תמיד מתוך נקודת מבט זו. כאשר אני מציגה מושג חדש, אני מתחילה מנושא מוכר ומתקדמת. כך, הדיון הראשוני אודות חילוק שברים התחיל עם שאלה כללית אודות חילוק. ביקשתי מהכיתה לחשוב על הביטוי **4:2** ומה זה אומר להם. התגובות שלהם נעו בין "זה אומר שאם יש לך ארבעה דברים ואתה מחלק אותם לשתי קבוצות, כמה יש בכל קבוצה?" לבין התגובה השכיחה ביותר, שהיתה "זה אומר כמה פעמים שתיים נכנס בארבע, או כמה קבוצות של שתיים נכנסות בארבע?" דיון קצר זה על חילוק נתן לי מידע לגבי האופן שבו הילדים חשבו על עיקרון מתמטי זה. חיוני לגלות מה התלמידים שלך יודעים וכיצד הם חושבים, לפני שמתקדמים לתחום חדש. הידע הקודם אודות חילוק צריך לשמש בסיס או נקודת התחלה.

לאחר מכן הצגתי להם את הבעיה הבאה:

$$2 \div \frac{1}{2}$$

תוך שניות תלמידים רבים היו להוטים להגיב. כאשר נשאל, תלמיד אחד אמר, "ארבע [הפסקה] משום שחצי אחד נכנס בשתיים ארבע פעמים". תלמיד אחר אמר אחריו, "אני גם חושב שזה ארבע [הפסקה] משום שאם היו לך שני ופלים וחילקת אותם לחצאים, היית מקבל ארבע חתיכות". הייתי שבעת רצון מדרך החשיבה שלהם עד כה והתלהבתי מהרצון שלהם לנסות לפתור את הבעיות תוך שימוש באמצעים המוכרים להם. התלמידים היו רגילים לסמוך על עצמם למציאת פתרונות, כך שהמשפט הידוע "אני לא יודע איך לעשות את זה" לא עלה על פני השטח. התלמידים נראו בטוחים בעצמם לגבי דרך החשיבה שלהם, ואני הייתי להוטה להתקדם לבעיות אחרות, בידיעה שחצי נוטה להיות קל יותר לילדים מאשר שברים אחרים, כמו שלישים וחמישיות.

הבעיה הבאה שכתבתי על הלוח היתה:

$$1 \div \frac{1}{3}$$

הילדים הגיבו ללא היסוס, כמעט במקהלה "שלוש [הפסקה] משום ששליש נכנס באחד שלוש פעמים".
לאחר מכן כתבתי:

$$1 \div \frac{2}{3}$$

הוצעו שתי תגובות. כשליש מן הכיתה אמרה שהתשובה היא 6, והיתר האמינו שהתשובה צריכה להיות **1** 1/2 . ההסבר של אלו שטענו **1** 1/2 היה ש 1/3 : 1 הוא 3, אז 2/3 : 1 צריך להיות **1** 1/2 , משום ש 2/3 גדול פי שניים מ 1/3 ולכן נכנס ל- 1 חצי מהפעמים. מאחר שהם כבר קבעו ש 1/3 : 1 זה 3, אז 2/3 : 1 צריך להיות חצי מזה, או **1** 1/2 . נראה היה שהסבר זה שכנע את האחרים ש- 6 אינו סביר. חלק גדול מאלה שבהתחלה ענו 6, נסוגו מהר מתשובה זו, בעוד שהאחרים דנו בנושא לזמן מה עד שהבחינו בפגם שבחשיבה שלהם. חילופי הדעות הוא מרכיב חשוב בכיתה הקונסטרוקטיביסטית. למרות שהקונסטרוקטיביסטים מאמינים שילדים לומדים זה מזה, הם אינם מאמינים שילדים רוכשים ידע מתמטי **מ**אנשים אחרים. ידע כזה צריך **להיבנות** על ידי כל אחד מתוכו. אינטראקציה כזו מעוררת חשיבה ביקורתית, אבל איננה המקור לידע מתמטי (Kamii 1994). במקרה זה, התלמידים שהאמינו שהתשובה היא 6 היו צריכים לחשוב על ההיגיון שבתשובה שלהם יחד עם זו של עמיתיהם ולקבוע מי מהם צודק. בהחלטה ש- 6 היא תשובה שגויה, הם היו צריכים ל**שנות** את החשיבה שלהם. ללא ספק האינטראקציה החברתית עוררה ילדים אלה לבחון מחדש את החשיבה שלהם. עם זאת, עצם הבנייה של הידע – הקביעה שהתשובה היא **1** 1/2 – היתה תהליך פנימי.

בנקודה זו התלמידים פתרו את $3 \div \frac{1}{3}$ בקלות יחסית, ואז נתבקשו לנסות לפתור את:

$$\frac{1}{3} \div 3$$

שוב הם בנו את החשיבה שלהם מתוך מה שהם כבר ידעו. ילד אחד אמר, "זה תשיעית, משום שאחד לחלק לשלוש זה שליש, אז אם רוצים לחלק את זה [שליש] לשלוש, צריך לקחת שליש משליש, שזה תשיעית." ההסבר של ילד אחר היה כך: "אני חושב שזה תשיעית, משום שאם היה נשאר לנו שליש של עוגה והיינו מחלקים אותו בין שלושה אנשים, כל אחד היה מקבל תשיעית." מה שמצא חן בעיני לגבי טיעון זה היה שהילד לקח תרגיל חישוב פשוט ונתן לו משמעות על ידי יצירת בעיה מילולית.
לאחר שעברתי איתם על מספר בעיות נוספות, נתתי לכיתה את הבעיה הבאה:

> קניתי 5 3/4 פאונדס של בוטנים מצופים שוקולד. אני רוצה לאחסן את הממתקים בשקיות של 1/2 פאונד כדי שאוכל להקפיא אותם ולהשתמש בהם במנות קטנות. כמה שקיות של 1/2 פאונד אני יכולה להכין?

התלמידים הורגלו לעשות קודם אומדן, אז הם נתנו במהירות אומדנים שנעו בין 10 ל- 12. לאחר מכן הם ניגשו למצוא את התשובה המדויקת. תלמידה אחת הגיבה, "אחת עשרה שקיות, ונשאר רבע פאונד, או חצי שקית." כאשר שאלתי אותה כיצד קבלה תשובה זו, היא ענתה, " מקבלים עשר שקיות מהחמישה פאונד, משום שחמש לחלק לחצי זה עשר, ואז מקבלים עוד שקית מהשלושה רבעים, שזה נותן אחת-

עשרה שקיות, ונשאר רבע פאונד, שזה חצי של שקית של חצי פאונד." תלמיד אחר פתר את הבעיה על ידי שינוי של 5 3/4 ל- 6 פאונד, ואז חילק אותם ב- 1/2 וקיבל 12 שקיות. אחרי זה הוא לקח את ה- 1/4 שהוסיף, חילק אותו ב- 1/2 וקיבל 1/2, שאותו הוא חיסר מה- 12 כדי לקבל לבסוף 11 1/2 שקיות.

ההמצאה שאולי הפתיעה אותי ביותר בבעיה מסוימת זו, היתה של ילדה שבשוויון נפש הרימה את ידה ואמרה, "פשוט הכפלתי (doubled) את זה [חמש ושלושה רבעים] וחילקתי באחד." חבריה לכיתה הגיבו, "אפשר לעשות דבר כזה?" היא המשיכה והסבירה שזה לא משנה את התרגיל. היא ציינה בפיקחות שכאשר מכפילים פסוק, התשובה נשארת אותו דבר, כמו במקרה של $2 = 5 : 10$ ו- $2 = 10 : 20$. היא השתמשה בפיקחות ביחסים מתמטיים, בלא שלמדה באופן ישיר על פרופורציה. סוג כזה של חשיבה המצאתית ולקיחת סיכון אינטלקטואלי, פשוט לא קיימים בכיתות בהן המורים כופים שיטות על התלמידים. הוקסמתי גם, אם כי לא הופתעתי, מכך שאף לא ילד אחד חשב על הפיכת המספר המעורב לשבר מדומה של 23/4, מה שהיה הצעד הראשון באלגוריתם המסורתי. למרות שרבים מתומכי ההוראה של אלגוריתמים טוענים שתלמידים לא ממציאים שיטות יעילות לפתרון חישובים מורכבים, הרי שהממצאים המובאים כאן אינם תומכים בטענה זו. מה יכול להיות יעיל יותר מאשר הכפלה של 5 3/4 כדי ליצור 11 1/2 ולחלק ב- 1?

במהלך השבוע הבא התלמידים המשיכו לעבוד על חילוק שברים. התפעלתי מהחשיבה שהתרחשה והתרגשתי מכמות הדברים שלמדתי מהילדים. עבודתם היתה מעל ומעבר לציפיות שלי עד כה, אולם עדיין הייתי סקרנית לראות האם יוכלו להמשיך ולעלות מעלה ככל שהבעיות והחישובים נעשו קשים יותר. יום אחד בקשתי מהם לפתור את הבעיה הבאה:

$$4\frac{2}{5} \div \frac{1}{3}$$

בשלב זה הכיתה כולה יכלה לאמוד שהתשובה היא "קצת יותר משתים עשרה." אחרי שאמדו, הם התחילו לחשב את התשובה המדויקת. כפי שניתן לצפות, לבעיה זו נדרש זמן רב יותר מאשר לקודמות, ויותר מתמיד ילדים גרדו בראשיהם, קמטו את מצחיהם והחליפו ביניהם דעות. לאחר זמן התאספנו יחד כדי לדון בתוצאות.

תלמידים אחדים העירו שיש להם תשובה קרובה אבל הם לא בטוחים שהיא מדויקת. הבטחתי להם שאני מעוניינת יותר לשמוע על האסטרטגיות שלהם. תלמידים שונים נידבו תשובות, אותן רשמתי על הלוח. (כל התשובות היו מעט יותר מ- 13). ההסבר של אחת התלמידות היה כדלקמן: "קיבלתי שלוש עשרה ואחד חלקי חמש עשרה [הפסקה]. התחלתי עם ארבע לחלק לשליש שהם שתים עשרה, משום ששליש נכנס בארבע [הפסקה] שתים עשרה פעמים. . . אחרי זה הפכתי שתי חמישיות לשש חלקי חמש עשרה ושליש לחמש חלקי חמש עשרה." בנקודה זו הפרעתי לה וביקשתי ממנה להסביר מדוע עשתה זאת. היא המשיכה, "משום שקל לי יותר לחלק אותם כעת, והם עדיין אותו מספר [הפסקה]. אחרי זה חישבתי שחמש חלקי חמש עשרה נכנס בשש חלקי חמש עשרה פעם אחת נוספת, שזה נותן שלוש עשרה ואחד חלקי חמש עשרה." מספר תלמידים הנהנו בהסכמה, תלמידים אחדים קראו, "זה מה שאני עשיתי!" אחרים ביקשו שיסבירו זאת שוב.

אחרי דיון ממושך בבעיה זו, כולם נראו משוכנעים שהתשובה היא אכן 13 1/15 חוץ מהתלמידה ש"כפלה וחילקה באחד" בבעיה הקודמת. היא הרימה את ידה וטענה שהיא מסכימה עם כל מה שנאמר "חוץ מהחלק האחרון". היא אמרה ש"שש חלקי חמש עשרה לחלק לחמש חלקי חמש עשרה הם אחד ונשאר

אחד חלקי חמש עשרה, שגם אותו צריך לחלק לחמש חלקי חמש עשרה. אחד חלקי חמש עשרה לחלק לחמש חלקי חמש עשרה הם חמישית משום שחמש חלקי חמש עשרה נכנסים [באחד חלקי חמש עשרה] חמישית פעמים, אז התשובה היא שלוש עשרה וחמישית." תגובה זו, לא רק שהיתה הגיונית ונכונה מבחינה מתמטית, אלא גם הוותה דוגמה מצוינת לאוטונומיה שילדים מפתחים כאשר מעודדים אותם לחשוב בעצמם (Kamii 1985,1994). הנה ילדה, הניצבת לבדה, חולקת על הכיתה כולה ואולי אפילו על המורה שלה. היא לא היתה מוכנה לקבל כל חשיבה או פרוצדורה שלא נראתה לה הגיונית. זהו אחד התוצרים המהוללים של קונסטרוקטיביזם : אוטונומיה אינטלקטואלית.

מיותר לציין, הדיון אודות התשובה לבעיה זו נמשך עוד זמן מה, ועבור רבים נמשך גם בהפסקה. במהלך הדיון הסוער, תלמיד אחד הביט בי ואמר, "ובכן, איזו תשובה נכונה?" כאשר הכיתה נוכחה שכמו תמיד אני לא אומרת תשובות, הדיון התחדש. סוג כזה של ויכוח אינטלקטואלי בין ילדים הינו התרחשות טיפוסית ורצויה בכיתה הקונסטרוקטיביסטית. סוג כזה של דיון או אינטראקציה חברתית מעסיק את הילדים בחשיבה ביקורתית. הוא אינו תורם לסוג הבלבול שאנשים רבים חוו בכיתת המתמטיקה, ואשר הסתיים רק בתסכול. זהו תהליך של עיבוד רעיונות המסתיים בהבנה עמוקה יותר. פיאז'ה מייחס חשיבות רבה לאינטראקציה חברתית. בתיאוריה שלו, אינטרקציה חברתית חיונית בהחלט לבניה של ידע, והכרחית בתקופת הילדות לצורך ליטושה של החשיבה הלוגית (Kamii 1989).

המשכנו לעבוד על חילוק שברים, והבעיות הפכו יותר מורכבות ודרשו הרבה יותר חישובים. התלמידים המשיכו להצליח, ובסופו של דבר כמעט כולם יישבו את הבלבול שלהם בקשר לשאריות (כמו ה- 1/15 שבבעיה הקודמת). תלמידים אחדים המשיכו להיאבק עם הבעיות הקשות יותר, עם זאת הם היו מסוגלים לתת אומדנים קרובים ביותר, אשר העידו על הבנה מתפתחת וחוש למספרים מצוין.

מסקנות

כאשר התחלתי לראשונה ללמד ילדים, הייתי מוקסמת מהיכולת שלהם לחשוב ולנמק. כמו כן, האסטרטגיות שלהם לפתרון בעיות הפתיעו אותי בכל פעם מחדש. במקרים רבים ובהקשר לנושאים שונים רבים, כמו זה המתואר במאמר, תלמידים לימדו אותי מה המשמעות של היותי מורה ומה המשמעות של "לחשוב ולשוחח באופן מתמטי".

ברצוני להדגיש לקוראים שילדים **יכולים** **ואכן** ממציאים דרכים לעשות מתמטיקה מתוחכמת. יחד עם זאת, תרבות הכיתה חייבת להיות כזו שבאמת מעריכה ומעודדת חשיבה. תלמידים צריכים להרגיש בטוחים אם הם אמורים לקחת את הסיכונים האינטלקטואליים הנחוצים לבניית ידע. הם צריכים לקבל מספיק זמן כדי לחשוב ולהרהר על מספרים ולהחליף רעיונות עם עמיתיהם, ועליהם להיות מוכנים מבחינה התפתחותית לחומר שמציגים לפניהם. בנוסף, תלמיד שהאכילו אותו בדיאטה קפדנית של אלגוריתמים ואשר תופס את המתמטיקה רק כעשיית חישובים תוך שימוש במערכת של כללים ששינן, אינו מסוגל בבת-אחת להתחיל לחשוב לעומק על מספרים ולהמציא פרוצדורות. ילדים כאלה למדו להיות תלויים במורים בשיטות ובפתרונות, וקשה מאוד לשנות התנהגות כזו.

כמורים, חובתנו לספק סביבות למידה המאפשרות לילדים להצליח. התחייבות זו פירושה שעלינו להתבונן בתשומת לב בתכונות להן אנחנו מיחסים ערך. האם אנו מעוניינים רק בתשובה הנכונה, והאם זה כל מה שאנחנו בוחנים? האם אנו כמחנכים באמת מעריכים מתמטיקה, ואם כן, כיצד אנו מעבירים

הערכה זו לתלמידים? האם הקדשנו זמן ואנרגיה ללמוד את המתמטיקה שאנו טוענים שמלמדים? האם אנחנו באמת מעריכים ומעודדים אוטונומיה אינטלקטואלית?

ולבסוף, אל לכם להניח שתפקיד המורה בכיתה הקונסטרוקטיביסטית הינו של צופה פסיבי היושב בחוסר מעש ומחכה שהתלמידים יבנו את הידע שלהם. יצירת סביבה כיתתית שבה הילדים ממציאים פרוצדורות לפתרון בעיות אינה משימה קלה. המורה חייב לחתור להבין את דרך החשיבה של כל ילד וחייב לקבוע בזהירות מתי בדיוק וכיצד עליו לכוון את הילד להבנה ברמה עמוקה וגבוהה יותר. יצירת כיתה כזו וניסוח שאלות מתאימות כדי לבדוק את החשיבה של הילדים ולהוביל אותם לגבהים אינטלקטואליים חדשים הוא אולי הנושא למאמר המשך.

ביבליוגרפיה

Burns, Marilyn. *About Teaching Mathematics: A K-8 Resource.* Sausalito, Calif.: Marilyn Burns Education Associates, 1992.

-----. "Arithmetic: The Last Holdout. "*Phi Delta Kappan* 75 (February 1994): 471-76.

Carraher, Terezinha Nunes, David William Carraher, and Analucia Dias Schliemann. "Mathematics in the Streets and in Schools". *British Journal of Developmental Psychology* 3 (March 1978):75-83.

Heege, Hans ter. "Testing the Maturity for Learning the Algorithm of Multiplication". *Educational Studies in Mathematics* 9 (February 1978): 75-83.

Kamii, Constance. *Young Children Reinvent Arithmetic.* New York : Teachers College Press, 1989.

-----. *Young Children Continue to Reinvent Arithmetic, Second Grade.* New York : Teachers College Press, 1994.

-----. *Young Children Continue to Reinvent Arithmetic, Third Grade.* New York : Teachers College Press, 1994.

Leinward, Steven. "It's Time to Abandon Computational Algorithms." *Education Week*, 9 February 1994, 36.

Mack, Nancy K. "Learning Fractions with Understanding: Building on Informal Knowledge." *Journal for Research in Mathematics Education* 21 (January 1990): 16-32.

Madell, Rob. "Children's Natural Processes." *Arithmetic Teacher* 32 (March 1985): 20-22.

Olivier, Alwyn, Hanlie Murray, and Piet Human. "Children's Solution Strategies for Division Problems." In *Proceedings of the Thirteenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, edited by Robert G. Underhill, 15-21. Blacksburg, Va.: Virginia Polytechnic Inst., 1991.

Streefland, Leen. "Fractions: A Realistic Approach." In *Rational Numbers*, edited by Thomas P. Carpenter, Elizabeth Fennema, and Thomas A. Romberg, 289-325. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Assoc.,1993.

Treffers, A. "Integrated Column Arithmetic According to Progressive Schematisation." *Educational Studies in Mathematics* 18 (May 1987): 125-45.