

מתמטיקה בגן הילדים

Mathematics in the Preschool

מאת : Douglas H. Clements

הופיע ב: Teaching Children Mathematics, Vol. 7, No. 5, January 2001, pp. 270-275

תרגום: ברכה סגליס

"כל מי שדוחף חשבון לילדים בגן עושה טעות. לא צריך לזרוז ילדים. אסור ללמד חשבון בגן הילדים!"
"בשביל מה צריך גן, אם לא כדי להכין את הילדים לבית הספר? הגננות צריכות ללמד את הילדים
כישורים בסיסיים ואיך לשבת בשקט ולהקשיב."

מסמך העקרונות והסטנדרטים להוראת מתמטיקה בארה"ב (NCTM 2000) כולל לראשונה ילדי גן
בתוכנית הלימודים. איזו הוראת מתמטיקה מתאימה לילדים צעירים אלה? שני הדוברים מציגים דעות
שונות. אני חושב שכל אחד מהם קצת צודק וקצת טועה.

הוראה איכותית במתמטיקה מכוונת לאתגר ולהנאה, ולא לאכיפה ולחץ. מתמטיקה טובה לגיל הרך
רחבה יותר ועמוקה יותר מאשר רק תרגול במניה ובחיבור. היא כוללת דיון איזה ילד גדול יותר, וציור
מפות ל"אוצר" שקבור בחצר. הוראה איכותית במתמטיקה כוללת אספקה של המון קוביות יחידה
ביחד עם המון זמן להשתמש בהם; בקשה מן הילדים להביא כמות עפרונות שתספיק בדיוק לכל
הילדים בקבוצה; והזמנת הילדים לאמוד ולבדוק כמה צעדים נדרשים כדי ללכת למגרש המשחקים
(ראה איור 1).

איור 1: כאשר ילדים בונים עם קוביות הם עוסקים באורך, קוים מאוזנים,
מקבילות, וסימטריה.



Photograph by Michael Groll; all rights reserved

האם אנו באמת זקוקים למתמטיקה של גן הילדים?

אנו זקוקים למתמטיקה בגן הילדים מארבע סיבות. ראשית, בגני הילדים יש כבר תוכנית לימודים במתמטיקה, אבל יש בה רק מעט מתמטיקה – ורובה בעלת תוכן אנמי. עלינו לשפר מצב זה. שנית, רבים מן הילדים בגן, במיוחד אלה המשתייכים לקבוצות מיעוט, או בעלי הכנסה נמוכה, חווים אחר-כך קשיים ניכרים במתמטיקה של בית הספר. פרויקטים של פיתוח תכניות לימודים שנעשו לאחרונה, הראו שניתן לצמצם את הפער בין ילדים אלה וילדים אחרים. עלינו להתייחס לסוגיות שוויון אלו.

שלישית, לילדים בגן הילדים יש יכולות מתמטיות לא-פורמליות והם נהנים להשתמש בהם. עוד לפני הגיעם לבית-הספר, מפתחים ילדים רבים יכולות בתחומי המספר והגיאומטריה הנעות ממניית עצמים בצורה מדויקת, להתמצאות בסביבה, וליצירת צורות. ילדים משתמשים ברעיונות מתמטיים בחיי היומיום ומפתחים ידע מתמטי לא פורמלי המפתיע במורכבותו ובתחכמו. הזנחת הטיפול של גילוי התעניינות אלה תהיה בושה חינוכית.

לדוגמה, כריס בן החמש יוצר צורות בעזרת גירסה פשוטה של תוכנת לוגו. הוא מקיש **מ** (בשביל מלבן), ואחרי זה שני מספרים עבור אורכי הצלעות. הפעם הוא בחר את המספרים 9 ו-9. הוא רואה ריבוע וצוחק. מבוגר העומד לידו שואל, "מה המשמעות של שני ה-9 בשביל המלבן?" כריס עונה, "אני לא יודע, אולי אני אקרא לזה מלבן ריבועי!" כריס השתמש שוב ושוב במונח שהמציא במהלך הימים הבאים. באופן דומה, ביחס למושג המספר, ילדים, כבר בגיל שלוש, מבינים את העקרונות הבסיסיים של המניה, בזמן שהם עובדים על שיפור יכולת המנייה שלהם.

לבסוף, למרות שהמחקר העכשווי של המוח מגלה לנו אודות חינוך פחות ממה שאחדים חושבים, הוא מציע שלושה מסרים: (1) המוח של ילדים בגיל הגן מתפתח באופן משמעותי, (2) ההתנסויות והלמידה של ילדים בגיל הגן משפיעים על המבנה והארגון של מוחותיהם, ו- (3) המוח של ילדים בגיל הגן גדל יותר כתוצאה מפעילויות מורכבות, מאשר מלמידה של מיומנויות פשוטות. קחו לדוגמה את אלכס, שבדיוק עכשיו בת חמש, ואחיה, פול, בן שלוש. היא נכנסה לחדר והצהירה כך:

אלכס: כאשר פול יהיה בן שש, אני אהיה בת שמונה; כאשר פול יהיה בן תשע, אני אהיה בת אחת-עשרה; כאשר פול יהיה בן שתיים-עשרה, אני אהיה בת ארבע-עשרה... (היא ממשיכה עד שפול יהיה בן שמונה-עשרה והיא תהיה בת עשרים).

מבוגר: אני המום! איך הצלחת לחשב את זה?

אלכס: זה קל, פשוט עושים "שלוש – ארבע – חמש" [כשהיא מוחאת כפיים במספר ארבע]; עושים "שש – שבע – שמונה"; עושים "תשע – עשר – אחת עשרה".

אלכס חיברה בין שני היבטים של ההתנסויות שלה: ספירה, ושירים ששרה בקצב בזמן שקפצה על חבל. גישה זו היתה הגיונית עבורה, הרבה יותר מאשר ניסיון של מבוגר ללמד אותה שיטה "לחבר 2". אנו רואים שילדים בגיל הגן, כולל כאלה מקבוצות מיעוט ובעלי הכנסה נמוכה, מוכשרים במתמטיקה לא פורמלית, ומגלים עניין ספונטני ברעיונות מתמטיים "גדולים". אם ילדים בגיל הגן מפנימים מתמטיקה לא פורמלית, מדוע כה רבים מהם נמצאים בסיכון להיכשל בלמידת מתמטיקה בהמשך? הסיבה העיקרית יכולה להיות שהם לא מקבלים את התמיכה הנדרשת כדי לבנות קשרים למתמטיקה של בית הספר. יש להם מוטיבציה עצמית לחקור דפוסים, צורות, מדידות, את משמעות המספרים,

וכיצד המספרים עובדים, אבל הם צריכים עזרה כדי להביא רעיונות אלה לרמה מפורשת של מודעות. מודעות כזו היא מרכיב חיוני של ידע מתמטי.

גיל הגן ומתמטיקה

אנשים, בכל גיל, בונים ידע מתמטי באופן אקטיבי, אבל ילדי גיל הגן הם קבוצה מיוחדת, ועלינו לתכנן את ההוראה שלהם בתשומת לב. הנה שניים מן המאפיינים המיוחדים שלהם.

ראשית, הרעיונות שילדים בגיל הגן מפתחים יכולים להיות שונים למדי מאלה של מבוגרים. גננות צריכות במיוחד להיזהר לא להניח שהילדים "רואים" מצבים, בעיות או פתרונות, כמו מבוגרים. לדוגמה, חוקר אחד ביקש מברנדה למנות שש גולות. לאחר מכן החוקר כיסה אותן, הראה אחת יותר, ושאל כמה יש לו בסך הכל. ברנדה אמרה שיש לו אחת. כאשר החוקר ציין שיש לו שש גולות מוסתרות, ברנדה ענתה בתקיפות, "אני לא רואה שום שש!" עבור ברנדה, שום מספר לא יכול להתקיים ללא עצמים שניתן למנות אותם.

גננות מוצלחות מפרשות מה הילד עושה וחושב ומנסות לראות את הסיטואציה מנקודת המבט של הילד. מתוך פירושים אלה הן מנסות להבין איזה מושגים הילד יהיה מסוגל ללמוד או להגיע להפשטה שלהם מתוך ההתנסויות שלו. באופן דומה, כאשר גננות עובדות עם ילדים, הן צריכות לקחת בחשבון גם את הפעולות שלהן עצמן מנקודת המבט של הילדים. צורך זה בפירוש והעלאת השערות הופך את ההוראה המתמטיקה בגיל הרך לתובענית אבל גם למתגמלת. הגננת של ברנדה, למשל, יכולה להסתיר ארבע גולות ולאחר מכן לעודד אותה לזקוף ארבע אצבעות כדי לייצג את הגולות המוסתרות.

מאפיין שני של ילדים צעירים הוא שהם לא תופסים את עולמם או פועלים בתוכו כאילו שהוא מחולק למקצועות שונים. גננות טובות עוזרות לילדים לפתח ידע טרום מתמטי וידע מתמטי במהלך היום כולו. הן מתכננות פעילויות שמקדמות בו זמנית התפתחות אינטלקטואלית, חברית, רגשית, ופיסית. כאשר ילדי גן עושים מתמטיקה, הם באמת **עושים** אותה, הם פועלים בכל ישותם. מסיבה זאת, דיונים על סימטריה הנעשים בשפה של הילדים, צריכים להיות שכיחים בפינת הקוביות, וליד כן- הציור, כמו בכל פעילות מתמטית פורמלית.

הוראה ולמידה כוללנית כזו, בונה על המוטיבציה הגבוהה של ילדי גן ללמוד בדרך של מכוונות עצמית. הוראה כזו מקדמת הסתכלות על המתמטיקה באופן חיובי כפעילות של פתרון בעיות, בעלת הנעה עצמית ומכוונות עצמית בתקופה שבה ילדים מפתחים לראשונה אמונות, הרגלים ורגשות לגבי המתמטיקה.

המשחקים ותחומי ההתעניינות של ילדים הם המקור להתנסויות המתמטיות הראשונות שלהם. התנסויות אלה הופכות למתמטיות כאשר הילדים מייצגים אותם ועושים רפלקציה עליהם. ילדים צעירים מייצגים את הרעיונות שלהם על ידי דיבור, אבל גם באמצעות מודלים, הצגות ואמנות. משירי ילדים קצביים, כמו שיר הילדים pat-a-cake יכולים לנבוע דגמים גיאומטריים, כמו למשל "גדר" הנבנית בעזרת קוביות יחידה, שיובילו להכללה והפשטה הדרגתית של הדגמים במהלך היום: "תראה, בציור שלי יש אותן צורות כמו שאתה בנית קודם בקוביות!"

תפקיד הגננת

הוראה איכותית הינה לעיתים קרובות מקרית ולא פורמלית אבל איננה לא מתוכננת או לא שיטתית. תפקיד הגננת בקידום למידה כזו הינו מורכב. חשבו על המחויבויות הרבות של הגננת למתמטיקה ולמשחק חופשי. הגננת צריכה לתכנן סביבה שתביא לחקירות מתמטיות. לדוגמה, הסביבה צריכה לכלול קוביות יחידה, מרכז קניות, ואמצעי המחשה. המשחק של הילדים עם עצמים כאלה יוצר חלק גדול מבסיס המושגים הקדם-מתמטי הנחוץ להם.

במטרה לעזור לילדים להישען על בסיס זה לפיתוח ידע מתמטי, גננות צריכות לצפות בילדים ולהתערב כשנחוץ. אבל מתי להתערבות נחוצה? אסטרטגיה שימושית היא לשאול את עצמך האם זה מצב שבו החשיבה המתמטית **מתפתחת**, או שמא היא **נעצרת**. אם היא מתפתחת, הגננת יכולה לצפות ולרשום הערות, להשאיר את הילדים לבד, ולשוחח על ההתנסות עם הילדים בשלב מאוחר יותר, או עם כל ילדי הגן, כדי לפרש את המתמטיקה.

גננת אחת שמעה שתי ילדות מתווכחות למי יש מגדל קוביות גבוה יותר. היא צפתה בהן בשעה שהן השוו את הגובה של שני המגדלים בעזרת הגוף שלהן. מאוחר יותר, היא ביקשה מהן להסביר לכל ילדי הגן מה הן עשו. הילדים שיתפו זה את זה בהתנסויות אחרות שבהן השוו את הגובה של עצמים, ובדרכים שונות בהן אפשר למדוד גובה, כמו ספירת יחידות, או באמצעות השוואה ישירה או בלתי ישירה.

לעומת זאת, כאשר החשיבה המתמטית נעצרת, הגננת יכולה להתערב, לשוחח ולהבהיר את הרעיונות. לדוגמה, אם שני ילדים מתווכחים למי יש מבנה קוביות "גדול יותר", הגננת עשויה לגלות שילד אחד מדבר על הגובה ואילו הילד השני מדבר על הרוחב, השטח, או הנפח. הגננת יכולה להעיר ששני המבנים גדולים באופנים שונים: "לקולין יש מבנה גבוה מאוד, ואילו של כריס נראה רחב מאוד." היא יכולה לשאול את הילדים מה הם רואים, ומאוחר יותר, לערוך דיון בנושא עם כל ילדי הגן כשהיא מציגה זאת כאירוע מעניין. התערבויות אחרות הן עדינות. כאשר היא צופה בשני ילדים המשווים את האורך של שני שטיחים, הגננת יכולה בשקט לדאוג לנגישות של קוביות מתחברות, חוט, ועצמים אחרים שניתן להשתמש בהם לצורך מדידה (ראה **איור 2**).

איור 2: מדידת ההיקף של שטיח



גננות יכולות גם לעבוד עם ילדים כדי לפתח התעניינות כאלה לכדי פרויקט שלם. דוגמה לפרויקט כזה התגלתה באחד מגני הילדים המפורסמים ב- Reggio Emilia שבאיטליה. נעל ומטר (Malaguzzi 1997), מתאר את הסיפור המלא של הפרויקט, תוך שימוש בתמונות של הגננת עצמה, אבל הסיכום הוא כדלהלן: קבוצת ילדים רוצה שולחן עבודה נוסף הזהה לזה שיש להם כבר. נגר מקומי אומר שהוא יבנה את השולחן, אך הוא זקוק למדידות. הילדים מנסים תחילה למדוד בעזרת אצבעותיהם. שני ילדים עוזבים וחוזרים עם נייר, כשהם אומרים, "אנחנו צריכים לצייר את השולחן כדי שנבין את זה." הילדים חוזרים אחרי זה למדידה כדי שיוכלו לרשום תוויות ברישום שלהם. הם מנסים למדוד בעזרת ראשים, אגרופים, רוחב הידיים, ורגליים. נראה שהם מאמינים שיחידה גדולה יותר תהפוך את עבודתם לחסכונית יותר. אחרי זה הילדים פונים לעצמים, כמו ספרים. נראה שהם מתחילים להבין ששימוש בעצמים יהיה קל יותר מאשר שימוש באברי גוף.

לבסוף, לאחר שעבדו על משימות מדידה אחרות שהגננות הציגו, הילדים נוכחים לדעת שהם צריכים איזה שהוא סוג של מדידה שניתן לשיתוף. הם מתחילים בכך שהם יוצרים סרגלים משלהם, וזו ההזדמנות הראשונה שבה הם הצטרכו לכתוב מספרים עבור המדידות שלהם. ילד אחד אינו שבע רצון מכך שיש רק מספרים על הסרגל, והילדים מתחילים להפריד בין המספרים בעזרת קווים. הקווים עוזרים להם לראות את הצורך במרחקים שווים בין מספר למשנהו. כל הילדים יוצרים לעצמם סרגלים, אבל המבוכה שולטת כאשר הם משתמשים בהם בפעם הראשונה. הילדים מקבלים מידות של 20, 41, 78, וכדומה. הם צוחקים בהפתעה. הגננת מבקשת מן הילדים להעמיד את סרגליהם זה ליד זה. הילדים צועקים שהם צריכים לבחור את הסרגל עם "המספרים הנכונים".

לאחר מכן, הילדים יוצרים סרגלים חדשים, אבל, למרבה ההפתעה, חוזרים גם למדידה עם עצמים. הם משתמשים בנעל, כשהם דורכים איתה על רצועת נייר שהם שמים על השולחן כדי לסמן את המרחקים. הם מודדים בכיוון השני ובטוחים שהם מוכנים לתת את המידות לנגר, משום שהנעל תמיד מפיקה אותה מידה! הם מציירים את התוצאות שלהם בזהירות, ואז ילד אחד מציע להביא סרגל מטר "אמיתי". הם עושים זאת ומודדים... את הנעל! אורכה 20 ס"מ. הם משתמשים במחשבון כדי להוסיף 20 עבור כל אורך של הנעל, ואחרי זה רושמים את שתי המידות על התרשים שלהם של משטח השולחן. לאחר עבודה נוספת, הם מכינים תרשים סופי לתת לנגר, ביחד עם מכתב המבקש ממנו "לעשות עבודה טובה".

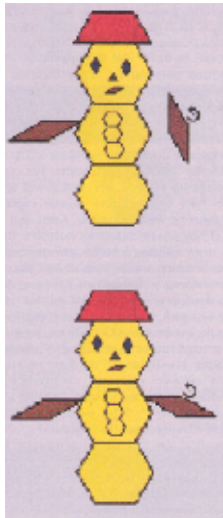
הפעילות של גן Reggio מייצגת חוויה חינוכית יוצאת דופן, הלוכדת את עומק המעורבות והלמידה של הילדים. גננות צופות בפעילות, מתעדות את ההתקדמות של הילדים ומתערבות בזהירות. ילדים מייצגים את החשיבה שלהם בצורה שמביאה תועלת רבה. הפעילות מראה שמספר רב של פרויקטים יכול לנבוע כתוצאה מהתעניינות של ילדים ולתרום להתפתחותם במתמטיקה.

על פי אופיים, הפרויקטים יהיו מגוונים, וכן החשיבה של הילדים כאשר הם עובדים על פרויקטים. ילדים בוגרים רבים ימשיכו להתחבט עם רעיונות וכישורים של מדידה. מחקרים מציינים שהנחות מסורתיות בהם השתמשו בהוראת מדידות יכולות להיות לקויות, ואילו גישות חדשות עשויות לעורר פוטנציאל חבוי אצל ילדים צעירים. החשוב ביותר הוא שפרויקטים מאפשרים לילדים מכל רמות המוכנות להיות מעורבים באופן משמעותי בעשייה מתמטית.

דרך ברורה נוספת לפתח ידע מתמטי היא לתכנן ולהציג פעילויות העוסקות באופן ספציפי במתמטיקה. לדוגמה, משחקים המשתמשים בכרטיסי מספר, כמו משחק מלחמה, או משחקי לוח עם קוביית מספרים, מספקים התנסויות במנייה ובהשוואה. Kamii and Housman (1999) מציגים דוגמאות

רבות. בנוסף, בספרי ילדים רבים יש מוטיבים מתמטיים. פעילויות של פתרון בעיות מספריות יכולות להיות מוצלחות אפילו עם ילדים בגילאי שלוש וארבע, כשהן מפתחות יכולות ספירה, מנייה ועבודה עם מספרים ביחד עם יכולות חשיבה כמו מיון וסידור. מחקרים עדכניים מאשרים שתוכניות לימודים מתאימות מחזקות את הידע של ילדי גן במספרים ובגיאומטריה. בכל המצבים האלה, הגננת מקדמת רעיונות ואוצר מילים מתמטיים של הילדים באמצעות הצגת שאלות כמו, "האם ניסית דרך זו?" "מה היה קורה אילו...?" "האם אתה חושב שתוכל...?"

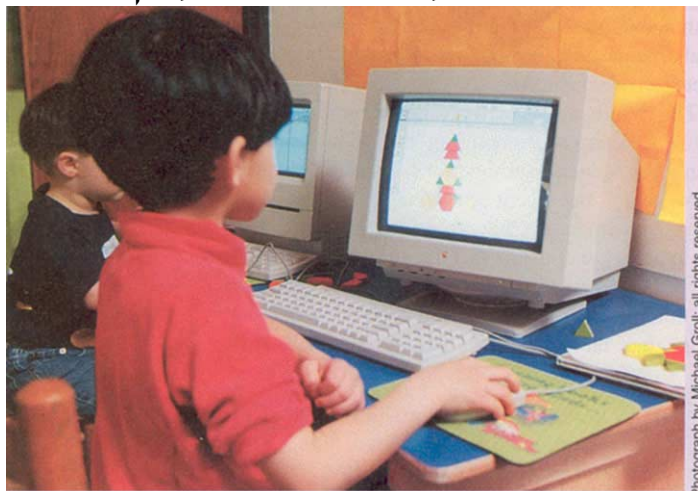
איור 3: בלומדת הבנייה בצורות הנדסיות, ילדים צריכים להשתמש בכלים ספציפיים – הזזה, היפוך וסיבוב – כדי ליצור תמונה. איור זה מראה את השימוש בכלי של "סיבוב". פעילויות מסוג זה מסייעות לילדים להיות מודעים בצורה מפורשת לתנועות בגיאומטריה.



דרך נוספת אחרונה לפתח ידע מתמטי היא באמצעות שימוש מתמשך בטכנולוגיה מתאימה. לדוגמה, פעילות אחת בלומדה של בנייה בצורות הנדסיות מבקשת מן הילדים לבנות תמונה במחשב תוך שימוש בכלים ספציפיים לתנועה גיאומטרית (ראו איור 3). שימו לב שהילדה השתמשה גם בכלי של "גודל" כדי להוסיף חלקי פנים וכפתורים, דבר שלא היתה יכולה לעשות עם צורות הנדסיות ממשיות. מכיוון שכל תנועה במחשב צריכה להיבחר בכוונה תחילה, ילדים נמנעים לעיתים קרובות מסיבוב והיפוך של צורות.

אסטרטגיית הוראה טובה היא לבקש מהם ליצור דגם מעצמים מוחשיים, ולאחר מכן להעתיק אותו למחשב (ראה איור 4). באופן כזה, הם מבצעים היפוכים וסיבובים רבים והם מקשרים את הפעילות המוחשית עם המשימה במחשב.

איור 4: ילדים יוצרים דגמים עם צורות הנדסיות ומעתיקים אותם למחשב.



גננות מוצלחות בונות על הפעילויות היומיומיות של ילדים, כשהן משלבות בהן את הרקע התרבותי והשפתי שלהם, ואת הרעיונות והאסטרטגיות המתמטיים שלהם. הם משתמשות במגוון של אסטרטגיות הוראה, יוצרות מצבים משמעותיים הקשורים לילדים, ומציעות הזדמנויות להשתתפות פעילה, כדי לעזור לילדים ללמוד רעיונות קדם-מתמטיים ומתמטיים ולפתח אמונות חיוביות אודות המתמטיקה ואודות עצמם כמתמטיקאים מתחילים.

הסטנדרטים למתמטיקה של ה-NCTM מספקים קווים מנחים לנושאים אותם יש ללמד במתמטיקה. עם זאת, עלינו לזכור, שהאופן שבו אנחנו מלמדים מתמטיקה חשוב באותה מידה כמו הנושאים שאנו מלמדים. המתמטיקה בעלת העוצמה הרבה ביותר עבור ילד גן, איננה בדרך כלל זו הנרכשת בזמן ישיבה בשיעור קבוצתי, אלא זו המקודמת על ידי הגננת מתוך פעילות המכוונת על ידי הילד עצמו והנובעת ממוטיבציה פנימית שלו.

ילדים בגילאי גן יכולים וצריכים לעסוק בחשיבה מתמטית. כל הילדים הצעירים הם בעלי ידע מתמטי לא פורמלי ויכולים ללמוד עוד. גננות צריכות לבנות על ולהרחיב את המתמטיקה העולה מתוך הפעילויות היומיומיות, תחומי ההתעניינות והשאלות של ילדים. עליהן לעשות מאמץ לראות את נקודת המבט של הילדים ולהשתמש בפרשנות שלהן כדי לתכנן את האינטראקציה שלהן עם הילדים ועם תוכנית הלימודים. גישה זו מבטיחה שתוכן מתמטי יהיה משמעותי עבור ילדים צעירים. שילוב של סביבה המעודדת חקירות מתמטיות, תצפיות והתערבויות מתאימות, ופעילויות מתמטיות ספציפיות, יסייע לילדים בגיל הגן לבנות ידע קדם-מתמטי וידע מתמטי מפורש.

ביבליוגרפיה

- Bransford, John D., Ann L. Brown, and Rodney R. Cocking, eds. *How People Learn*. Washington, D.C.: National Academy Press, 1999.
- Clements, Douglas H. "Teaching Length Measurement: Research Challenges." *School Science and Mathematics* 99 (January 1999): 5-11.
- _____. "Training Effects on the Development and Generalization of Piagetian Logical Operations and Knowledge of Number." *Journal of Educational Psychology* 76 (1984): 766-76.
- _____. "Young Children and Technology". In *Dialogue on Early Childhood Science, Mathematics, and Technology Education*, edited by George D. Nelson, pp. 92-105. Washington, D.C.: American Association for the Advancement of Science, 1999.
- Clements, Douglas H., and Michael T. Battista. *Logo and Geometry*. JRME monograph # 10, 2001.

- Clements, Douglas H., and Julie Sarama. *Building Blocks - Foundations for Mathematical Thinking, Pre-Kindergarten to Grade 2: Research-Based Materials Development*. Buffalo, N.Y.: State University of New York at Buffalo, 1999.
- Clements, Douglas H., Sudha Swaminathan, Mary Anne Zeitler Hannibal, and Julie Sarama. "Young Children's Concepts of Shape " *Journal for Research in Mathematical Education* 30 (March 1999): 192-212.
- Davis, Robert B. *Learning Mathematics: The Cognitive Science Approach to Mathematics Education*. Norwood, N.J.: Ablex Publishing Corp., 1984.
- Edwards, Carolyn, Lella Gandini, and George Forman. *The Hundred Languages of Children: The Reggio Emilia Approach to Early Childhood Education*. Norwood, N.J.: Ablex Publishing Corp., 1993.
- Fuson, Karen. *Children's Counting and Concepts of Number*. New York: Springer-Verlag, 1988.
- Geary, David C. *Children's Mathematical Development: Research and Practical Applications*. Washington, D.C.: American Psychological Association, 1994.
- Gelman, Rochel, and C.R. Gallistel. *The Child's Understanding of Number*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1978.
- Ginsburg, Herbert P., Y. Elsie Choi, Luz Stella Lopez, Rebecca Netley, and Chao-Yuan Chi. "Happy Birthday to You: The Early Mathematical Thinking of Asian, South American, and U.S. Children." In *Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective*, edited by Terezinha Nunes and Peter Bryant, pp. 163-207. East Sussex, England: Psychology Press, 1997.
- Griffin, Sharon, and Robbie Case. "Re-Thinking the Primary School Math Curriculum: An Approach Based on Cognitive Science." *Issues in Education* 3 (1) (1997): 1-49.
- Kamii, Constance K., and Leslie Baker Housman. *Young Children Re-Invent Arithmetic: Implications of Piaget's Theory*. 2nd ed., New York: Teachers College Press, 1999.
- Lehrer, Richard, Michael Jenkins, and Helen Osana. "Longitudinal Study of Children's Reasoning about Space and Geometry." In *Designing Learning Environment for Developing Understanding of Geometry and Space*, edited by Richard Lehrer and Daniel Chazan, pp. 137-67. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, 1998.
- Malaguzzi, Loris. *Shoe and Meter*. Reggio Emilia, Italy: Reggio Children, 1997.

- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: NCTM, 2000.
- Natriello, Gary, Edward L. McDill, and Aaron M. Pallas. *Schooling Disadvantaged Children: Racing against Catastrophe*. New York: Teachers College Press, 1990.
- Piaget, Jean, and Barbel Inhelder. *The Child's Conception of Space*. Translated by F.J. Langdon and J.L. Lunzer. New York: W.W. Norton & Co., 1967.
- Razel, Micha, and Bat-Sheva Eylon. "Developing Mathematics Readiness in Young Children with the Agam Program." Fifteenth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Genova, Italy, 1991.
- Steffe, Leslie P., and Paul Cobb. *Construction of Arithmetical Meanings and Strategies*. New York: Springer-Verlag, 1988.