

الرياضيات في رياض الأطفال

Mathematics in the Preschool

بقلم: Douglas H. Clements

ظهر في: Teaching Children Mathematics, Vol. 7, No. 5, January 2001, pp. 270-275
ترجمة: كميل ظاهر

"يخطئ كل من يلجّ على تعليم الأطفال الحساب في الرياض. لا تُسرّع الأطفال. لا حساب في رياض الأطفال!"
"ما فائدة رياض الأطفال إذا لم تقم المعلمات بتحضير الأطفال للمدرسة؟ يجب عليهن تعليم الأطفال المهارات الأساسية وكيفية الجلوس والإصغاء."
تحدد مبادئ الرياضيات ومعاييرها في المدرسة مجموعة جيل تشمل أطفال الرياض للمرة الأولى (NCTM 2000). ما هو تعليم الرياضيات الملائم لهؤلاء الأطفال الصغار؟ للمتحدثين رأيان مختلفان. وأعتقد أنهما أصابا بعض الشيء وأخطأ بعض الشيء أيضاً.
تعليم الرياضيات الجيد يعني التحدي والفرح، وليس الفرض والضغط. إن رياضيات الطفولة المبكرة الجيدة هي أوسع وأعمق من مجرد ممارسة لعمليتي العدّ والجمع. وهي تشمل مناقشة بين الأطفال حول من هو الأطول، ورسم الخرائط للوصول إلى "الكنز" المدفون في الخارج. ويتضمن التدريس الجيد للرياضيات توفير الكثير من وحدات المكعبات مع الكثير من الوقت لاستخدامها: الطلب من الأطفال إحضار عدد من أقلام الرصاص يكفي للجميع في المجموعة؛ وتحدي الأطفال في أن يقدرُوا وأن يفحصوا عدد الخطوات التي يحتاجونها للوصول إلى ساحة اللعب. (أنظر الصورة 1).

يمكن فهم معظم ما هو موجود في عالمنا بشكل أفضل بواسطة الرياضيات. وتعتبر فترة رياض الأطفال وقت جيد ليصبح الأطفال مهتمين في العدّ، التصنيف، بناء الأشكال، العثور على الأنماط، القياس والتقدير. إن الرياضيات الجيدة في رياض الأطفال هي ليس عمليات الحساب الأساسية التي يُدفع بها إلى الأطفال الصغار. بدلاً من ذلك، فإن الرياضيات تدعو الأطفال إلى تجربة الرياضيات في الوقت الذي يلعبون فيه، ووصف العالم المحيط بهم والتفكير به.

الصورة 1: عندما يبني الأطفال بواسطة المكعبات فإنهم يتعاملون مع الطول، الخطوط الأفقية، المتوازية والتماثل.



هل نحتاج نحن، حقيقة، لرياضيات رياض الأطفال؟

نحن نحتاج إلى رياضيات رياض الأطفال لأربعة أسباب. أولاً، يوجد في رياض الأطفال، من قبل، برنامج لتعليم الرياضيات يشمل كمية قليلة من الرياضيات - وعادة ما يكون المحتوى ضعيفاً. ويجدر بنا تحسين هذا الوضع.

ثانياً، العديد من هؤلاء الأطفال، خاصة أطفال الأقليات ومجموعات الدخل المتدني، يواجه صعوبة جدية لدى تعلم رياضيات المدارس. وقد بينت المشاريع الأخيرة لتطوير المنهاج أنه يمكن تضيق الفجوة بين هؤلاء الأطفال والأطفال الآخرين. يجب علينا معالجة قضايا المساواة هذه.

ثالثاً، يملك أطفال الرياض قدرات رياضية غير رسمية، وهم يتمتعون باستخدامها. ويطور العديد من الأطفال، قبل دخول المدرسة، قدرات عددية وهندسية تتراوح بين عد الأشياء بدقة، العثور على الطريق في محيطهم، ووصولاً إلى بناء الأشكال. ويستخدم الأطفال أفكاراً رياضية في الحياة اليومية ويطورون معرفة رياضية غير رسمية مركبة ومحكمة على نحو مفاجئ. إن إهمال رعاية هذه الإهتمامات يشكل عاراً تعليمياً. مثلاً، يرسم كريس ابن الخامسة أشكالاً بواسطة صيغة مبسطة من برنامج اللوغو. فقد قام بطباعة الحرف م (مستطيل)، ثم قام بطباعة عددين لطولي الأضلاع. واختار كريس هذه المرة العددين 9 و 9. وضحك كريس عندما ظهر أمامه مربع. ثم سأله شخص بالغ يقف إلى

2

Translated and reprinted with permission from *Teaching Children Mathematics*, copyright © 2001 by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. <http://www.nctm.org>. All rights reserved. NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation.

جانبه، "الآن، ماذا يعني العددا 9 بالنسبة للمستطيل؟ فأجاب كريس، "لا أعرف، الآن! قد أسمى هذا الشكل مربعًا مستطيلًا!" ويستخدم كريس تسميته المبتكرة على نحو متكرر خلال الأيام التالية. وعلى نحو متشابه، يفهم الأطفال، حتى في سن الـ 3 سنوات، عن طريق مفهوم الأعداد، مبادئ العدّ الأساسية، حتى وهم يعملون على صقل مهاراتهم. وأخيرًا، على الرغم من أن الأبحاث الأخيرة حول الدماغ لم تطلعنا على الكثير بما يتعلق بالتعليم، كما يفترض البعض، فهي تقدم ثلاث رسائل عامة: (1) يمر دماغ أطفال الرياض بتطور كبير، (2) تؤثر تجربة أطفال الرياض وتعلمهم في بنية دماغهم وترتيبه، و (3) ينمو دماغ أطفال الرياض بأكبر قدر نتيجة لعمليات مركبة، وليس من تعلم المهارات البسيطة. خذوا، على سبيل المثال، أليكس التي وصلت على التو جيل الخامسة، واخيها بول، ابن الثالثة، التي دخلت الغرفة وأعلنت:

أليكس: عندما يصل بول سن السادسة، سأكون في سن الثامنة؛ عندما يصل بول سن التاسعة سأكون في سن الحادية عشر؛ عندما يصل بول سن الثانية عشر سأصبح في سن الرابعة عشر ... (واستمرت حتى وصل بول سن الثامنة عشر وستكون هي عندها في سن العشرين).

البالغ: يا للعجب! كيف توصلت إلى ذلك؟

أليكس: إنه أمر سهل. فانت تعدّ "ثلاثة-أربعة-خمسة" (مصفقة على العدد أربع)؛ "ستة-سبعة-ثمانية"؛ ثم تعدّ "تسعة-عشرة-أحدى عشر".

وضعت أليكس ناحيتين من نواحي تجربتها سوية: العدّ والأغاني التي غنّتها بتناغم عند قفز الجبل. وقد بدى هذا التوجه منطقيًا بالنسبة لها، أكثر مما لو حاول شخص بالغ تعليمها نظام العدّ بـ "إضافة 2".

نحن نرى أن أطفال الرياض، بما فيهم أطفال الأقليات ومجموعات الدخل المتدني، مقتدرون من ناحية الرياضيات غير الرسمية، وأنهم يظهرون اهتمامًا تلقائيًا في الأفكار الرياضية "الكبيرة". إذا كان أطفال الرياض يستبطنون الرياضيات غير الرسمية، لماذا نجد الكثيرين منهم في خطر الفشل لاحقًا في تعلم الرياضيات؟ قد يكون السبب الأساسي أن ليس لديهم الدعم المطلوب لإقامة الروابط مع رياضيات المدرسة. إن لديهم الدافع الذاتي للتحقيق في الأنماط، الأشكال، القياس، معنى الأعداد وكيفية عمل الأعداد، لكنهم يحتاجون إلى مساعدة لرفع هذه الأفكار إلى مستوى واضح من الإدراك. ومثل هذا الإدراك هو مكوّن أساسي من المعرفة الرياضية.

أطفال الرياض والرياضيات

يبنى الناس من جميع الأجيال بفاعلية معرفة رياضية، ولكن أطفال الرياض هم مجموعة خاصة، وهناك حاجة لبناء طريقة تعليمهم باهتمام خاص.

فكر ملياً بالميزتين الخاصتين التاليتين:

أولاً، الأفكار التي يبنها أطفال الرياض يمكن أن تكون مختلفة عن أفكار البالغين. ويجب على معلمات أطفال الرياض أن يكن حذرات على نحو خاص بالأا يفرضن أن الأاطفال "ينظرون" إلى الأوضاع، المسائل، أو الحلول كما يفعل البالغون. فمثلاً، طلب أحد الباحثين من بريندا أن تعدّ ست بنانير، وبعدها قام الباحث بتغطيتها وعرض على بريندا بنورة أخرى وسألها كم بنورة يوجد لديه، فأجابته بريندا أن لديه بنورة واحدة. وعندما أشار الباحث أن لديه ست بنانير مخبأة أجابت بريندا بحدة، "أنا لا أرى ست بنانير!" بالنسبة لبريندا العدد غير موجود إذا لم يكن هنالك أشياء يمكن عدّها.

المعلمة الناجحة تفسّر ما الذي يفعله الطفل ويفكره به وتحاول أن ترى الوضع من وجهة نظر الطفل. ومن خلال هذه التفسيرات، تفترض المعلمات فرضيات حول المفاهيم التي قد يتمكن الطفل من تعلمها أو استخلاصها من تجاربه أو تجاربها. وعلى نحو مشابه، عندما تتفاعل المعلمات مع التلاميذ، يجب عليهن الأخذ بعين الإعتبار أعمالهن من وجهة نظر الأاطفال. هذه الحاجة للتفسير والتقييم تجعل التعليم في الطفولة المبكرة كثير المطالب، لكنه يستحق الجهد المبذول في سبيله. فمعلمة بريندا، على سبيل المثال، قد تخفي أربع بنانير ثم تقوم بتشجيع برندا على رفع أربعة أصابع لتمثل البنانير المخبأة.

الميزة الثانية للأاطفال الصغار هي أنهم لا يستوعبون عالمهم ولا يتصرفون فيه على أنه مقسّم إلى مواضيع مختلفة. وتساعد معلمات الرياض الناجحات الأاطفال على تطوير معرفة ما قبل الرياضيات ومعرفة الرياضيات طوال اليوم الدراسي. فهن يخططن النشاطات التي تعزز التطور الفكري، الاجتماعي، العاطفي والجسدي في آن واحد. وعندما يعمل الأاطفال على الرياضيات، فإنهم يفعلون ذلك، في الحقيقة، من كل كيانهم. لهذا السبب، يجب أن يجري التباحث في التناسق الذي يتم بلغة الأاطفال أمراً شائعاً في زاوية المكعبات، وبالقرب من زاوية الرسم، وكذلك في كل فعالية رياضية رسمية.

يستند التدريس والتعلم الشموليان على دافع الأاطفال القوي للتعلم بطريقة موجّهة ذاتياً. ويعزز هذا التعليم رؤية الرياضيات كفعالية إيجابية، ذاتية الدافع، ذاتية التوجيه، تحلّ المسائل في الوقت الذي يطور فيه الأاطفال للمرة الأولى معتقداتهم وعاداتهم وإحساساتهم المتعلقة بالرياضيات.

إن ألعاب الأاطفال واهتماماتهم هي المصدر لتجاربهم الرياضية الأولى. وتصبح هذه التجارب رياضية مع تمثيل الأاطفال لهذه التجارب وتفكيرهم بها. ويمثل الأاطفال الصغار أفكارهم عن طريق الكلام وكذلك من خلال النماذج، الأداء، والفن. فمن خلال أغاني الأاطفال الإيقاعية،

مثل أغنية الأطفال Pat a Cake، تتبع الأنماط الهندسية مثل نمط "الجدار" المبني من وحدات مكعبات والتعميم التدريجي واستخلاص الأنماط من خلال اليوم الدراسي: "أنظر، فإن رسماي تستخدم نفس الأنماط التي استخدمتها أنت في البناء بواسطة المكعبات!"

دور المعلمات

عادة ما يكون التعليم الجيد عرضياً وغير رسمي لكنه ليس غير مخطط له أو غير منهجي. إن دور المعلمة في رعاية هذا التعليم مركب جداً. فكروا في مسؤوليات المعلمة نحو الرياضيات واللعب الحر. يجب على المعلمة أن تهيب بيئة تؤدي إلى الاستكشاف في الرياضيات؛ مثلاً، يجب على البيئة أن تشمل وحدات مكعبات، مركز تجاري، ووسائل إيضاح. ويبلور لعب الأطفال مع هذه الأغراض القاعدة الأساسية لما قبل الرياضيات التي يحتاجها الأطفال. يجب على المعلمات أن يراقبن الأطفال وأن يتدخلن عند الضرورة من أجل مساعدتهم على بناء هذه القاعدة لتطوير المعرفة الرياضية. ولكن، متى يكون هذا التدخل ضرورياً؟ إحدى الإستراتيجيات المهمة هي السؤال ما إذا كانت تجري عملية تطور رياضي أو إن تلك العملية متوقفة. إذا كان هنالك تطور رياضي جار فيمكن للمعلمة أن تراقب وتسجل الملاحظات، وتدع الأطفال وشأنهم، ثم التحدث عن التجربة لاحقاً مع الأطفال أو مع الصف بأكمله لتشرح الرياضيات.

سمعت إحدى المعلمات طفلتين تتناقشان حول من يملك برج مكعبات أعلى من الأخرى. وقد راقبتهم وهما تقارنان ارتفاع برجيها بطول جسميهما. وطلبت منهما، لاحقاً، تفسير ما قامتا به أمام الصف. وأضاف الأطفال الآخرون من تجاربهم المتعلقة بمقارنة ارتفاع الأغراض، بالإضافة إلى طرق مختلفة يمكنهم بواسطتها قياس الارتفاع، مثل طريقة عدّ الوحدات أو استخدام المقارنة المباشرة وغير المباشرة.

وبالمقابل، عندما يتوقف التفكير الرياضي، يمكن للمعلمة أن تتدخل، وتناقش الأفكار وتوضحها. مثلاً، إذا كان طفلان يتناقشان حول أي مبنى مكعبات هو "الأكبر"، يمكن أن ترى المعلمة أن أحد الأطفال يتكلم عن الارتفاع بينما يتكلم الثاني عن العرض، المساحة أو الحجم. ويمكنها القول أن المباني قد تكون "أكبر" من نواح مختلفة: "تملك كولين مبنى مرتفعاً جداً، ويبدو أن مبنى كريس عريض جداً." ويمكنها أن تسأل الأطفال عما يرونه وأن تقوم، لاحقاً، بمناقشة القضية أمام الصف كحدث هام. وتكون التدخلات الأخرى حاذقة. عند مراقبة الأطفال يقارنون طولي سجادتين، يمكن للمعلمة أن توفر، بهدوء، مكعبات متصلة، أو حبل أو أي شيء آخر يمكن استخدامه للقياس (أنظر الصورة 2).

كذلك يمكن للمعلمات أن يعملن مع الأطفال لتطوير مثل تلك الاهتمامات لتصبح مشروعاً كاملاً. وظهر أحد الأمثلة على مثل هذه المشاريع في إحدى رياض الأطفال المشهورة في ريجيو إميليا في إيطاليا.

وتروي قصة الحذاء والمتر (Malaguzzi 1997) القصة الكاملة للمشروع، باستخدام صور المعلمة، إلا أن ملخص القصة هو ما يلي: أرادت مجموعة من الأطفال طاولة عمل أخرى مثل الطاولة الموجودة من قبل. النجار المحلي قال لهم أنه سيبنى الطاولة لهم، لكنه يحتاج إلى القياسات. حاول الأطفال، في البداية، إجراء القياس بواسطة الأصابع، ثم غادر طفلان وعادا مع الورقة فائلين، "إننا بحاجة إلى رسم الطاولة كي يتسنى لنا فهمها." وفي أعقاب ذلك عاد الأطفال إلى القياس كي يتمكنوا من وضع المقاييس على الرسم. فقد حاولوا القياس بواسطة الرؤوس، القبضات، الأشبار والسيقان. وبعد ذلك اعتقد الأطفال أن من شأن استخدام وحدة قياس طويلة أن توفر في العمل. وعد ذلك عاد الأطفال إلى استخدام أغراض مثل الكتب، وبعد أن أدركوا أن استخدام الأغراض سيكون أسهل من استخدام أعضاء الجسم.

الصورة 2: قياس محيط سجادة



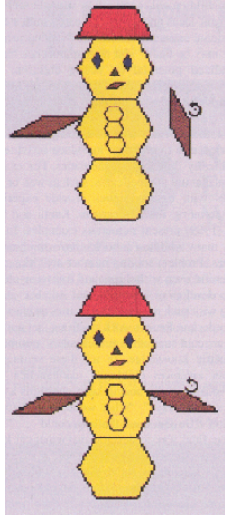
وأخيراً، بعد العمل على مهام القياس التي اقترحتها المعلمات، أدرك الأطفال انهم بحاجة إلى نوع من القياس مشترك لهم، فبدأوا في صنع المساطر الخاصة بهم. وكان صنع هذه المساطر المناسبة الأولى التي يستخدم بها الأطفال الأرقام في قياساتهم. وكان أحد التلاميذ غير راض عن وجود أعداد فقط على المسطرة، ثم بدأ الأطفال بفصل الأعداد بواسطة خطوط. وتساعد الخطوط على رؤية الحاجة إلى مسافات متساوية بين الأعداد. قام الأطفال جميعهم بصنع مساطرهم، ولكن عمت البلبلة عند البدء في استخدامها - حصل الأطفال على قياسات مختلفة مثل 20، 41، 78، وما شابه ذلك، وقد ضحك الجميع بصوت عال وطلبت المعلمات من الأطفال جمع المساطر، وصاح الأطفال بأن عليهم اختيار المسطرة ذات "الأعداد الصحيحة."

بعد ذلك، قام الأطفال بصنع مساطر جديدة، لكنهم عادوا، بشكل مفاجئ، إلى القياس بواسطة أشياء أخرى. فقد استعملوا حذاءً على قطاع من الورق بعد أن وضعوه على سطح الطاولة من أجل تحديد المسافات. وأجرى الأطفال القياس بالاتجاه المعاكس وكانوا متأكدين أنهم مستعدون لتسليم القياسات للنجار، لأن الحذاء يعطي دائماً نفس القياس! وسجّل الأطفال نتائجهم بحذر، وعندها اقترح أحد الأطفال إحضار مسطرة "حقيقية" طولها متر واحد. احضر الأطفال مسطرة المتر الواحد وقاموا بقياس . . . الحذاء! وكان طوله 20 سم. استخدم الأطفال آلة حاسبة لإضافة 20 لكل وحدة حذاء، وبعد ذلك سجّلوا كلا القياسين على تخطيطهم لسطح الطاولة. وبعد القليل من الأعمال الإضافية، قاموا برسم التخطيط النهائي لإعطاءه للنجار مرفقاً برسالة تحثه على "القيام بعمل جيد".

إن فعالية مدرسة ريجيو هي تجربة تعليمية استثنائية، وهي توضح عمق التزام الأطفال وتعلمهم، وعلى المعلمات مراقبة الفعالية، توثيق التقدم، والتدخل بحذر. ويمثل الأطفال تفكيرهم بطريقة تعود إليهم بالكثير من الفائدة. وتفتخر الفعالية أنه قد تنشأ أعداد كبيرة من الفعاليات من اهتمامات الأطفال وأتة يتمكنها أن تساهم في تطور الرياضيات لديهم. ستفاوت المشاريع، وفقاً لطبيعتها، مثلها مثل تفكير الأطفال عندما يعملون على المشاريع. وسيستمر العديد من الأطفال في شق طريقهم بجهد مع فكرة القياس ومهاراتها. وتشير الأبحاث أن الافتراضات التقليدية المستخدمة في تعليم القياس قد تعاني من العيوب، وأن من الممكن أن تقوم التوجهات الجديدة بتوجيه الطاقات الكامنة التي لم يتم تحقيقها من قبل لدى الأطفال الصغار. والأهم من ذلك، تتيح المشاريع للأطفال من جميع مستويات الجهوية المشاركة بشكل جدي في الرياضيات.

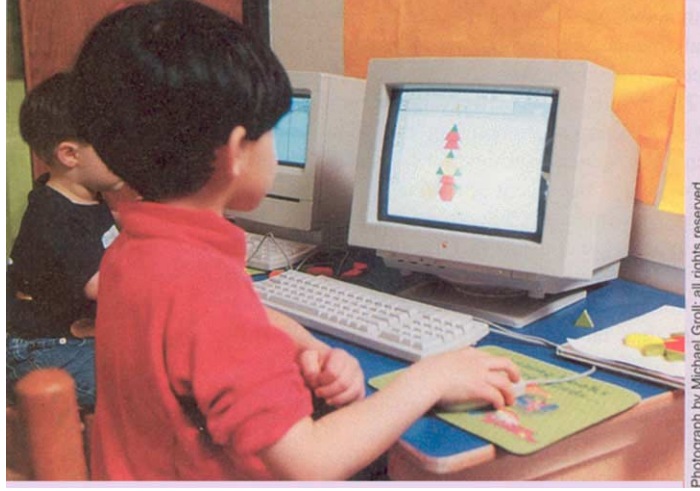
طريقة أخرى واضحة لتطوير المعرفة الرياضية هي تخطيط الفعاليات التي تتعامل مع الرياضيات بشكل محدد وعرضها على الأطفال. مثلاً، الألعاب التي تستخدم بطاقات أعداد، مثل الحرب، أو ألعاب اللوحة حيث توفر مكعبات الأعداد تجارب العدّ والمقارنة. ويعرض Kamii and Housman (1999) أمثلة عديدة على ذلك. بالإضافة إلى ذلك، تحتوي العديد من كتب الأطفال على مواضيع رياضية. ويمكن أن تكون مسائل حلّ الأعداد ناجحة حتى مع أطفال في سن الثالثة أو الرابعة، بحيث تطور لديهم القدرة على العدّ وعلى التعامل مع الأعداد، إلى جانب القدرات على التفسير مثل التصنيف والترتيب. وتؤكد الأعمال الأخيرة أن المنهاج الملائم يعزز من معرفة الأعداد والهندسة لدى أطفال الرياض. وتقوم المعلمات، في جميع هذه الأوضاع، بتعزيز أفكار الأطفال الرياضية ومصطلحاتهم من خلال طرح أسئلة مثل "هل جربت هذه الطريقة؟" "ماذا كان سيحدث لو...؟" "هل تعتقد أنك تستطيع...؟"

الصورة 3: في برنامج البناء بواسطة اشكال هندسية،
يجب على الأطفال تحديد الأدوات - إزاحة، قلب،
وتدوير - من أجل تكوين الصورة. يبين هذا الشكل أداة
"عملية القلب". وتساعد مثل هذه الفعاليات الأطفال
على الفهم بشكل واضح التحركات الهندسية.



الطريقة الأخيرة لتطوير المعرفة
الرياضية هي من خلال استخدام
التقنية الملائمة. مثلاً، تطلب
فعالية في برنامج البناء بواسطة
الأشكال الهندسية من الطلاب بناء
صورة على الحاسوب باستخدام
أدوات محددة للتحركات الهندسية
(أنظر الصورة 3). لاحظ أن الطفل
يستخدم أداة "الحجم" أيضاً لإضافة
ملامح للوجه والأزرار لم يكن
باستطاعته فعل ذلك بواسطة صور
هندسية حقيقية. وبسبب وجوب
اختيار كل حركة بشكل مقصود
على الحاسوب، يتجنب الأطفال،
عادة، تدوير وقلب الأشكال.
استراتيجية تعليمية جيدة هي
الطلب منهم صنع تصميم مكون
من أشكال ملموسة، ثم نسخه
على الحاسوب (أنظر الصورة 4).
وهم يقومون، في هذه الطريقة،
بالعديد من عمليات القلب والتدوير،
ويربطون الفعالية الملموسة بمهمة
الحاسوب.

الصورة 4: يصنع الأولاد النماذج بواسطة الأشكال الهندسية ثم ينسخونها على الحاسوب.



الاستنتاجات

معلمات أطفال الرياض الناجحات يبنين فعاليات الأطفال اليومية، ودمجون خلفياتهم الثقافية، اللغات، والأفكار والإستراتيجيات الرياضية. ويستخدمن تنوع من استراتيجيات التعليم، ويخلقن سياقات متعلقة بالأطفال ومفيدة، وتوفرن الفرص للمشاركة الفعالة، لمساعدة الأطفال على تعلّم أفكار رياضيات رياض الأطفال وتطوير معتقدات إيجابية حول الرياضيات وحول أنفسهم كرياضيين مبتدئين.

توفر معايير ومبادئ NCTM لرياضيات المدارس خطوطاً توجيهية للمواضيع التي يجب تعليمها في الرياضيات. ولكن، يجب علينا أن نتذكر أن كيفية تعليمنا للرياضيات هو أمر هام بمقدار أهمية المواضيع التي نعلمها. يتم الحصول على أفضل نوع من الرياضيات لأطفال الرياض، عادة، في الوقت الذي يجلس فيه الأطفال في درس جماعي، بل تحضرها المعلمة من فعالية الطفل الموجهة ذاتياً، والنابعة من دوافعه الداخلية.

يستطيع الأطفال الانهماك في التفكير الرياضي، ويجب عليهم القيام بذلك. ويملك كل الأطفال الصغار معلومات رياضية ويستطيعون تعلم المزيد. يجب على المعلمات البناء على الرياضيات النابعة من الفعاليات اليومية للطفل واهتماماته وأسئلته، وتوسيعها. يجب عليهن الإجتهد لرؤية وجهة نظر الأطفال واستخدام تفسيراتهم من أجل تخطيط تفاعلاتهن مع الأطفال ومع المنهاج. وبضمن هذا التوجه أن يكون للمضامين الرياضية معنى بالنسبة للأطفال الصغار. إن المزج بين بيئة تحت على الاستكشاف في الرياضيات، وبين الفعاليات الرياضية المحددة من شأنه أن يساعد أطفال الرياض على بناء معرفة ما قبل الرياضيات ومعرفة جلية في الرياضيات.

السبيلوغرافيا

- Bransford, John D., Ann L. Brown, and Rodney R. Cocking, eds. *How People Learn*. Washington, D.C.: National Academy Press, 1999.
- Clements, Douglas H. "Teaching Length Measurement: Research Challenges." *School Science and Mathematics* 99 (January 1999): 5-11.
- _____. "Training Effects on the Development and Generalization of Piagetian Logical Operations and Knowledge of Number." *Journal of Educational Psychology* 76 (1984): 766-76.
- _____. "Young Children and Technology". In *Dialogue on Early Childhood Science, Mathematics, and Technology Education*, edited by George D. Nelson, pp. 92-105. Washington, D.C.: American Association for the Advancement of Science, 1999.
- Clements, Douglas H., and Michael T. Battista. *Logo and Geometry*. JRME monograph # 10, 2001.
- Clements, Douglas H., and Julie Sarama. *Building Blocks - Foundations for Mathematical Thinking, Pre-Kindergarten to Grade 2: Research-Based Materials Development*. Buffalo, N.Y.: State University of New York at Buffalo, 1999.
- Clements, Douglas H., Sudha Swaminathan, Mary Anne Zeidler Hannibal, and Julie Sarama. "Young Children's Concepts of Shape" *Journal for Research in Mathematical Education* 30 (March 1999): 192-212.
- Davis, Robert B. *Learning Mathematics: The Cognitive Science Approach to Mathematics Education*. Norwood, N.J.: Ablex Publishing Corp., 1984.
- Edwards, Carolyn, Lella Gandini, and George Forman. *The Hundred Languages of Children: The Reggio Emilia Approach to Early Childhood Education*. Norwood, N.J.: Ablex Publishing Corp., 1993.
- Fuson, Karen. *Children's Counting and Concepts of Number*. New York: Springer-Verlag, 1988.
- Geary, David C. *Children's Mathematical Development: Research and Practical Applications*. Washington, D.C.: American Psychological Association, 1994.
- Gelman, Rochel, and C.R. Gallistel. *The Child's Understanding of Number*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1978.
- Ginsburg, Herbert P., Y. Elsie Choi, Luz Stella Lopez, Rebecca Netley, and Chao-Yuan Chi. "Happy Birthday to You: The Early Mathematical Thinking of Asian, South American, and U.S. Children." In *Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective*, edited by Terezinha Nunes and Peter Bryant, pp. 163-207. East Sussex, England: Psychology Press, 1997.

- Griffin, Sharon, and Robbie Case. "Re-Thinking the Primary School Math Curriculum: An Approach Based on Cognitive Science." *Issues in Education* 3 (1) (1997): 1-49.
- Kamii, Constance K., and Leslie Baker Housman. *Young Children Re-Invent Arithmetic: Implications of Piaget's Theory*. 2nd ed., New York: Teachers College Press, 1999.
- Lehrer, Richard, Michael Jenkins, and Helen Osana. "Longitudinal Study of Children's Reasoning about Space and Geometry." In *Designing Learning Environment for Developing Understanding of Geometry and Space*, edited by Richard Lehrer and Daniel Chazan, pp. 137-67. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, 1998.
- Malaguzzi, Loris. *Shoe and Meter*. Reggio Emilia, Italy: Reggio Children, 1997.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: NCTM, 2000.
- Natriello, Gary, Edward L. McDill, and Aaron M. Pallas. *Schooling Disadvantaged Children: Racing against Catastrophe*. New York: Teachers College Press, 1990.
- Piaget, Jean, and Barbel Inhelder. *The Child's Conception of Space*. Translated by F.J. Langdon and J.L. Lunzer. New York: W.W. Norton & Co., 1967.
- Razel, Micha, and Bat-Sheva Eylon. "Developing Mathematics Readiness in Young Children with the Agam Program." Fifteenth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Genova, Italy, 1991.
- Steffe, Leslie P., and Paul Cobb. *Construction of Arithmetical Meanings and Strategies*. New York: Springer-Verlag, 1988.