أهمية التنظيم الحيّزي في التفكير الهندسي

The Importance of Spatial Structuring in Geometric Reasoning

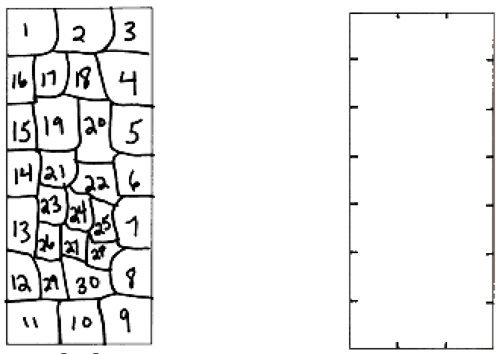
بقلم: Michael T. Battista

نُشر في: Teaching Children Mathematics, Vol. 6 No. 3, Nov. 1999, pp.170-177

ترجمة: كميل ظاهر

عُرض على طالبة الصف الثاني، كاتي، قطعة مربعة من البلاستيك مساحتها إنش مربع واحد وقيل لها أنها مساوية في مساحتها لمساحة أحد المربعات المُشار إليها في المستطيل أبعاده سبعةإنشات وثلاثة إنشات الذي يظهر في **الشكل 1أ**. وطُلب منها، بعد ذلك، أن تتنبأ عدد مربعات البلاستيك التي ستحتاجها من أجل تغطية المستطيل بشكل كامل. قامت كاتي برسم مربعات داخل المستطيل ووصلت إلى ثلاين مربعًا، كما يظهر **الشكل 1ب**.

الشكل 1: مثال 1 من عمل كاتي



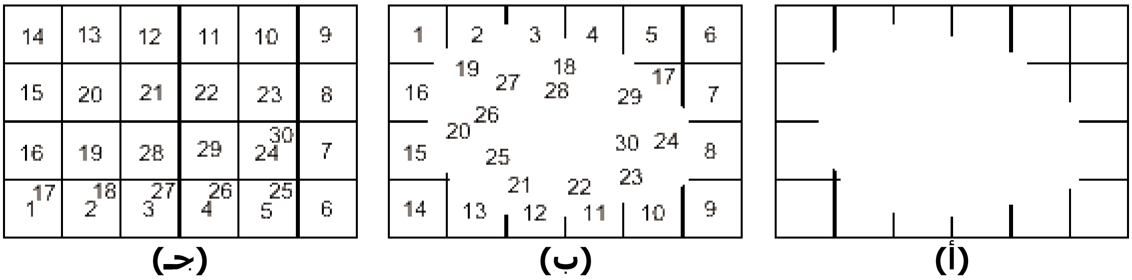
(ب) (أ)

وطُلب من كاتي، في مسألة مشابهة، أن تتنبأ عدد المربعات التي تغطي المستطيل الذي يظهر في الشكل 2أ، إلا أنها قامت، هذه المرّة، بالتنبؤ بدون الرسم، وأشارت إلى المستطيل وعدّت، كما يظهر في الشكل 2ب، ووصلت إلى العدد 30. ومن أجل أن تفحص كاتي إجابتها، قامت بوضع أربع وعشرين قطعة من البلاستيك بشكل صحيح في المستطيل، إلا أنها كانت قد عدت ووصلت إلى ثلاثين، كما يبين الشكل 2جـ. وعندما قمت بعدّ المربعات مرة أخرى، حصلت في البداية على أربع وعشرين مربعًا ثم سبع وعشرين.

من الواضح أن كاتي لم تستخدم طريقة ترتيب الأعمدة والأسطر بغية تحديد المربعات في ترتيبات المستطيلات هذه. ونحن "نرى"، كبالغين متعلمين، كيف أن المربعات التي تغطي هذه المستطيلات مرتبة من خلال أعمدة وأسطر؛ إلا أن كاتي لم تقم حتى الآن ببناء مثل هذا الترتيب ذهنيًا.

Translated and reprinted with permission from *Teaching Children Mathematics*, copyright © 1999
by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved.
NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation.

الشكل 2: مثال 2 من عمل كاتي



على الرغم من أن الصعوبة التي تواجهها كاتي قد تبدو غير عادية، إلا أنها ليست كذلك. عندما عرضت المسألة في **الشكل 1أ** على الطلاب العاديين في الصفوف 2-5، تبين، بشكل مفاجئ، وجود عدد من الطلاب الذين يواجهون مشاكل مشابهة. فقد أعطى التنبؤ الصحيح 19 بالمائة من طلاب الصف الثاني، 31 بالمائة من طلاب الصف الثالث، 54 بالمائة من طلاب الصف الرابع و 78 بالمائة من طلاب الصف الخامس فقط. فتحت هذه النتائج أعيننا، نظرًا لكون طريقة التعليم التقليدية، بالنسبة للعديد من طلاب هذه الصفوف، تستخدم هذه الترتيبات المستطيلة الشكل كأحد النماذج التي تعطي معنى لعمليات الضرب وتفترض أن الطلاب يرون مثل تلك الترتيبات على أنها مجموعات من الأعمدة والأسطر المتكافئة.

تنظيم الحيّز

أخطأت كاتي والتلاميذ الآخرون في هذه المسألة نظرًا لتنظيم الحيز غير الملائم بالنسبة إليهم. التنظيم الحيّزي هو العملية الذهنية المتعلقة ببناء تنظيم أو شكل بالنسبة لغرض ما أو مجموعة أغراض، وهو يحدد طبيعة الغرض، شكله أو تركيبته عن طريق ربط هذه المكوّنات ودمجها، وإقامة علاقات متداخلة بين المكوّنات وبين الغرض. لم يقم هؤلاء الطلاب حتى الآن ببناء تنظيم السطر مقابل العامود الذي يحدد المربعات داخل المستطيلات بشكل ملائم.

إن تدريس الهندسة بطريقة تمكّن الطلاب من تعلمها بشكل له معنى يقتضي فهمًا لكيفية بناء الطلاب معرفتهم للمواضيع الهندسية المختلفة. ويقتضي هذا الأمر استخدام هذا الفهم لاختيار مهام التدريس الملائمة، تقييم ودعم تعلم الطلاب. إن تنظيم الحيّز هو عملية أساسية في بناء الطلاب للمعرفة الهندسية. وصفت المقالات السابقة التعامل مع تنظيم الطلاب لمجموعات من الأغراض ثلاثية الأبعاد، مثل ترتيبات المكعبات في علب مستطيلة (Battista 1998; Battista and Clements 1998). يصف هذا المقال كيفية التعامل مع تنظيم الطلاب لترتيبات مستطيلة من المربعات والمناطق ثنائية الأبعاد الأخرى، كذلك يصف الفعاليات التي تربط بين تنظيم الحيّز من أجل تطوير التفكير المتعلق بالضرب.

Translated and reprinted with permission from *Teaching Children Mathematics*, copyright © 1999
by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved.
NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation.

مستويات البراعة في التنظيم الحيّزي للطلاب

يُظهر الطلاب تنوعًا واسعًا من البراعة في التنظيم الحيّزي الذي يستخدمونه بغية تنبؤ عدد المربعات التي تغطي المستطيلات (Battista et al. in press). تشتت مسارات كاتي لدرجة أنها لم تستطع متابعة من أين جاءت وإلى أين يجب عليها الوصول. وقد أعارت مسارات التنظيم الخاصة بها القليل من الاهتمام للمكان الذي يجب أن تكون فيه المربعات داخل الإطار الثنائي الأبعاد لدرجة أنها ضلّت الطريق.

عرض بيل مستوى براعة أعلى في التنظيم عندما طُلب منه تنبؤ عدد المربعات التي تغطي المستطيل الذي يظهر في **الشكل 3أ**.

> في البداية أقوم بعدّ القسم السفلي، وهنالك 6 [وهو يحرّك يده نحو الداخل كما يظهر ذلك في **الشكل 3ب**]. إذًا، القسم السفلي والقسم العلوي يساويان 12. ومع هذين الاثنين [مشيرًا إلى المربعات المتوسطة على الجهتين اليسرى واليمنى] يصبح العدد 14. [يستخدم الأصابع من أجل تقدير مكان وجود المربعات الفردية] أعتقد أنه يوجد 12 في الوسط؛ اثنا عشر زائد اثنا عشر يساوي أربعة وعشرين. لذلك أعتقد أن الجواب هو أربعة وعشرون.

الشكل 3: عمل بيل

(ب) **(أ)**

قام بيل، خلافًا لكاتي، بتنظيم مربعات في مجموعات موجودة، بشكل واضح، ضمن إطار مرجعي ثنائي الأبعاد. ولكن، لم يستطع بيل تطبيق تنظيمه في أرجاء المستطيل، إذ لم يكن قادرًا على تحديد المربعات داخل القسم الأوسط بشكل صحيح.

جو موجود في المستوى العالي التالي. شُرح له أنه يمكن وضع خمسة مربعات في القسم العلوي من المستطيل وسبعة مربعات في الوسط نحو الأسفل، وبعد ذلك تمت إزالة تلك المربعات.

جو: خمسة، عشرة، .... خمسة وأربعون [وهو يتقدم عبر السطور داخل المستطيل].

المعلمة: كيف حصلت على ذلك؟

جو: كنت أحاول أن أخمن مكان وجود قاع المستطيل. [يضع جو سبعة مربعات في العامود الأيمن نحو الأسفل ثم يشير بسرعة لكل واحد منها ويستنتج على الفور: خمسة وثلاثون.] خمسة، عشرة، ... خمسة وثلاثون؛ خمسة مرات سبعة مربعات. إنني متأكد.

Translated and reprinted with permission from *Teaching Children Mathematics*, copyright © 1999 by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved.
NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation.

قام جو بتنظيم الترتيب عن طريق السطور. ولكنه كرر سطر المربعات الخمسة بشكل غير صحيح عندما قدّر، بصريًا، كيفية تغطية هذه الأسطر للمستطيل. وقد كان بحاجة إلى عامود حقيقي من أجل أن يكرر الأسطر السبعة من المربعات الخمس بشكل صحيح.

يحتل أعلى مرتبة من البراعة الطلاب الذين قاموا بإجراء تجريد لتنظيم السطر والعامود لترتيب ما لدرجة تمكّنهم من عد أسطر المربعات من خلال استخدام أصابعهم، عدّ شفهي قفزي، أو استخدام قلم وورقة. ويوضّح عمل بول على نفس المسألة التي عُرضت على جو هذا المستوى.

بول: قلت سبعة إلى الأعلى، صحيح؟ خمسة من جانب إلى آخر [يعد ويشير عبر أعلى سطر الواحد تلو الآخر]. خمسة من جانب إلى جانب، وسبعة إلى الأسفل [يتوقف]؛ سبعة إلى الأسفل، خمسة من جانب إلى جانب [يتقدم عبر الأسطر الثلاثة العلوية من المستطيل]؛ خمسة، عشرة، خمسة عشرة، عشرون، خمسة وعشرون، ثلاثون، خمسة وثلاثون؛ خمسة وثلاثون.

المعلمة: كيف عرفت أنه يجب التوقف عند خمسة وثلاثين؟

بول: عندما رفعت آخر إصبع، عرفت أن ذلك كان سبعة.

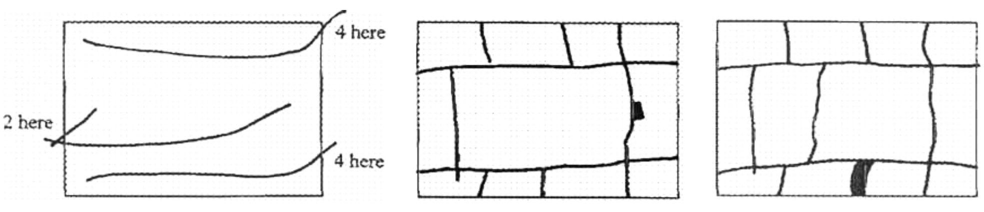
المعلمة: ماذا يعني لك ذلك؟ لماذا سبعة؟

بول: هنالك سبعة إلى الأسفل فقط [يتقدم عاموديًا من وسط المستطيل إلى الأسفل.]

التناسق كمفتاح لتنظيم الأسطر والأعمدة

كما رأينا حتى الآن، فإن بناء تنظيم ملائم يتكون من ترتيب ثنائي الأبعاد من المربعات هو أمر صعب بالنسبة للعديد من الطلاب. وتبيّن الأمثلة التالية كيف قام طالبان من الصف الثاني بحل صعوبات التنظيم التي واجهاها وقاموا ببناء تنظيم السطر مقابل العامود. الطالبة الأولى إيمي، تتنبأ عدد المربعات التي ستغطي مستطيلاً أبعاده 3 × 4، بعد أن قيل لها أن هنالك مكان لأربعة مربعات في الجهة العليا من المستطيل وثلاثة في الجهة اليسرى.

الشكل 4: عمل إيمي



(أ) (ب) (جـ)

Translated and reprinted with permission from *Teaching Children Mathematics*, copyright © 1999 by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved.
NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation.

إيمي: [مشيرة كما يظهر في **الشكل 4أ**] يوجد أربعة هنا، [السطر العلوي] وأربعة هنا [السطر السفلي] بالإضافة إلى اثنين هنا [واحد على الجهة اليمنى وآخر على الجهة اليسرى]، وهذا يساوي عشرة [مشيرة إلى ما تُفترض أن تكون المربعات الداخلية في المستطيل] ولكنني غير متأكدة ما إذا كان هنالك مربعان في الوسط أو مربع واحد، وذلك بسبب كبرها.

إيمي: [بعد أن رسمت مربعات محيطية لكنها تركت الوسط فارغًا؛ أنظر **الشكل 4ب**] أعتقد أن هنالك اثنين في الوسط أو واحد في الوسط. [ترسم إيمي القطاع العمودي الأوسط في السطر الثاني كما في **الشكل 4جـ**.]

المعلمة: إذًا، كم يوجد لديك هناك؟

إيمي: احد عشر أو اثنا عشر. أعتقد أن هنالك اثنين في الوسط أو واحد [محركة يدها على طول السطر الثاني]. لقد غيّرت رأيي للتو. أعتقد أن هنالك أربعة في الوسط [مشيرة إلى السطر الثاني مما رسمته] ... سيكون اثنان في الوسط لأن هنالك ثلاثة هنا فقط [مشيرة إلى العامود الأيمن] وثلاثة هنا [متقدمة إلى العامود الأيسر]، ثم الانتقال من جانب إلى جانب يعطينا أربعة [متنقلة عبر السطر الثاني]؛ اثنا عشر.

المعلمة: لماذا تعتقدين الآن أن هنالك اثنا عشر؟

إيمي: لآن هنالك أربعة في القسم العلوي [محركة يدها على السطر العلوي]، ثم الانتقال إلى هنا [متنقلة إلى السطر الثاني] سيكون مثل الانتقال إلى هنا [التحرك إلى السطر العلوي]، وهكذا، ربما يوجد اثنان في الوسط. وسوية تكون أربعة [مشيرة إلى أربعة مربعات في السطر الأوسط].

في البداية، اعتقدت إيمي أن مجموعة المربعات التي غطّت المستطيل كمجموعة من المكوّنات المنفصلة – القسم العلوي، القسم السفلي، الجانبان والمركز غير المتبلور. ولم تكن إيمي قادرة على النظر إلى مركز المستطيل على أنه يحتوي على مربعين، وهكذا فإن السطر الأوسط مكون من أربعة، إلا عندما فكّرت في المربعين الخارجيين في السطر المتوسط (**الشكل 4ب**) ليس كمربعات منفصلة بل كعناصر من العامودين الأيسر والأيمن. وعندما نسّقت إيمي هذه الأعمدة مع المربعات في السطر العلوي، أصبحت قادرة على تخيّل عامود لكل واحد من المربعات في السطر العلوي. ومكّن هذا التنسيق إيمي من استنتاج تكافؤ السطرين الأول والثاني لأن التنسيق أدى إلى ترتيب عامودي للمربعات الموجودة في الأسطر

Translated and reprinted with permission from *Teaching Children Mathematics*, copyright © 1999 by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved. NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation.

الأمر الذي أدى إلى ملائمة واحد لواحد بينها. وهكذا مكّنت عملية التنسيق إيمي من أن تعطي الترتيب تنظيم الأسطر والأعمدة.

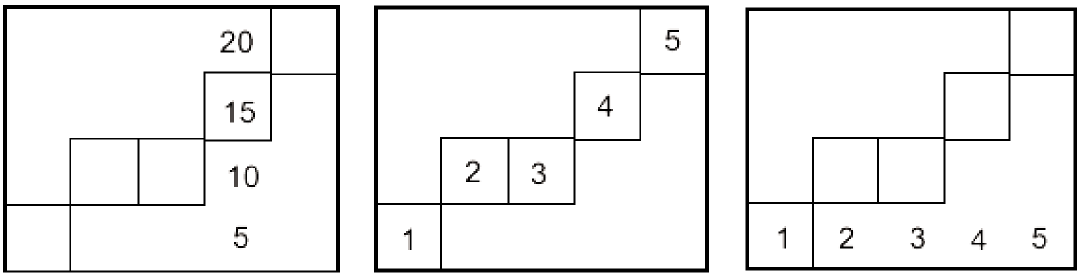
تظهر أهمية عمليات التنسيق بوضوح لدى بول أيضًا.

بول: [يعدّ المربعات في السطر السفلي كما في **الشكل 5**أ]، واحد، اثنان، ثلاثة، أربعة، خمسة، لأنه واحد، اثنان، ثلاثة، أربعة، خمسة [مشيرًا إلى المربعات التي تم رسمها من قبل في **الصورة 5**ب]. لأنه عندما تنتقل إلى الأعلى، فإنها لا تزال خمسة. انقلها إلى الأسفل لكي تحصل على سطر واحد [منتقلاً إلى السطر الأسفل بإصبعه]. قم بنقل جميع المربعات الموجودة في الأعلى إلى الأسفل. وعندها ستكون مثل خط واحد مستقيم.

المعلمة: هل يمكنك التنبؤ كم يوجد معًا؟

بول: خمسة، عشرة، خمسة عشر، عشرون [مشيرًا إلى الأسطر المتتالية كما في **الشكل 5**جـ].

الشكل 5: عمل بول



(جـ) (ب) (أ)

استنتج بول أن السطر السفلي يحتوي على خمسة مربعات لأن كان بمقدوره أن يرى كيف يمكن "نقل" المربعات المرسومة من قبل إلى الأسفل. وعندما قام بول بتخيّل نقل المربعات بشكل عامودي ليضعها في وضعها الأفقي، أدت عملية التنسيق إلى تنظيم الترتيب في اتجاهين متعامدين، أفقي وعامودي، الأمر الذي مكّن بول من رؤية أنه لا يوجد خمسة مربعات في كل سطر فحسب، بل أنه إذا تم تكديس الأسطر بشكل عامودي يمكنها أن تغطي المستطيل أيضًا.

Translated and reprinted with permission from *Teaching Children Mathematics*, copyright © 1999 by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved.
NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation.

التنظيم والتفكير المتعلق بعملية الضرب

في الوقت الذي يعمل فيه الطلاب على مسائل المستطيلات، فأنهم لا يُظهرون نطاقًا واسعًا من التنظيمات الحيّزيّة فحسب، بل نطاقًا واسعًا من العمليات العددية أيضًا. فعلى سبيل المثال، سيستخدم الطلاب في عدّ المربعات العدّ عن طريق الواحد تلو الآخر، العد القفزي، العدّ المخلوط عن طريق العد الواحد تلو الآخر ثم العد القفزي، استخدام الإضافة المتكررة واستخدام حقائق الضرب المعروفة.

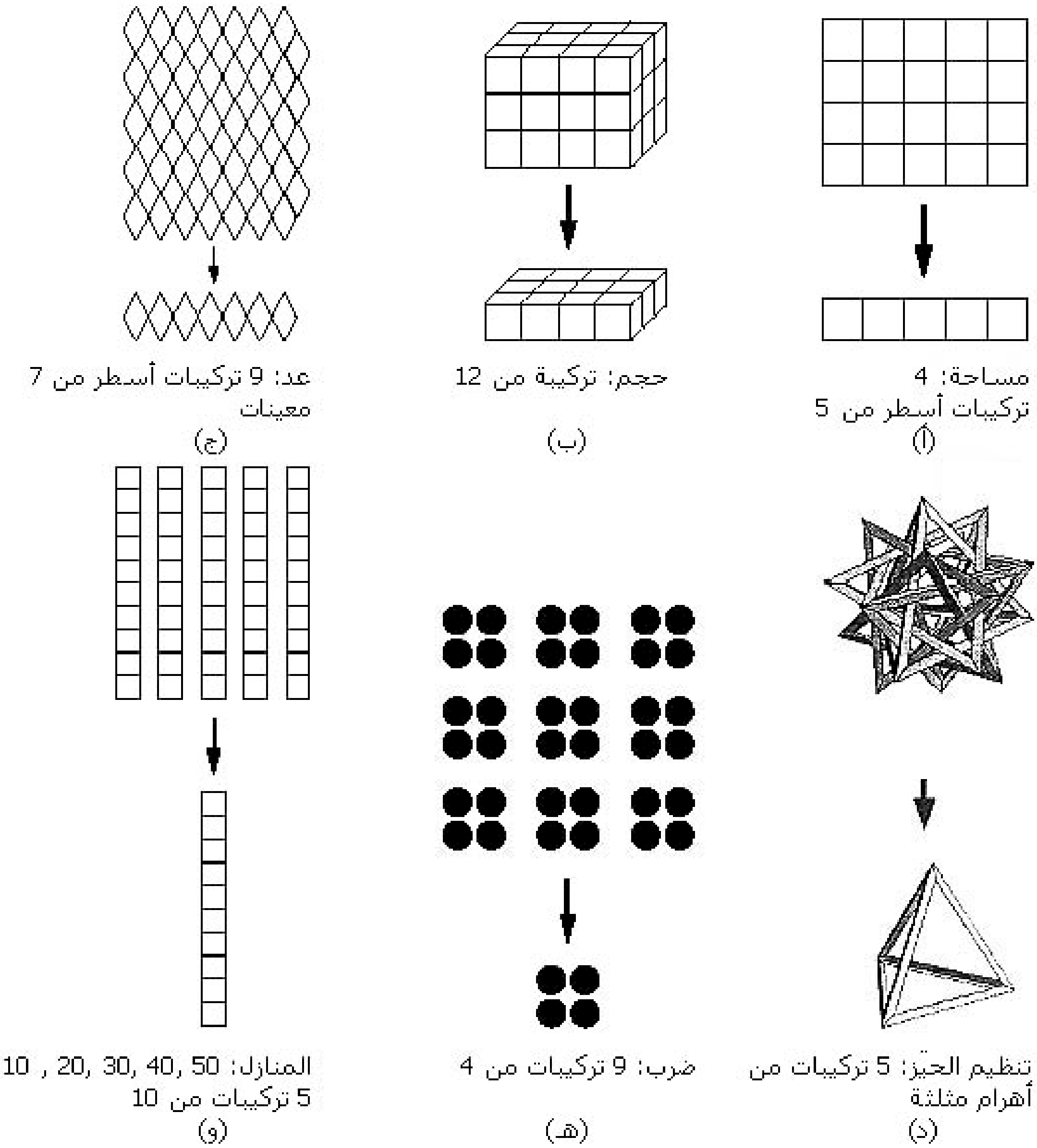
بالإضافة إلى ذلك، ستتوفر للطلاب فرصًا عديدة لتشكيل **وحدات مركبة** (composite units)، كمفهوم أساسي للتفكير المتعلق بعمليةالضرب (Killion ans Steffe 1989). تتشكل الوحدة المركبة عندما يأخذ الطالب مجموعة من عناصر الوحدة ويتعامل معها بشكل حيّزيّ أو عددي كوحدة واحدة. على سبيل المثال، أخذ بول مجموعة المربعات الخمسة التي كانت في سطر واحد في مستطيل أبعاده أربعة بخمسة كوحدة مركبة، ثم قام بالعدّ خمسة، عشرة، خمسة عشر، عشرون في الوقت الذي تخيّل فيه المستطيل وهو يمتلئ مع تكرار السطر أربع مرات.

كما يمكن أن نرى في **الشكل 6أ-و**، يمكن لعملية تكوين الوحدات المركبة أن تساعد الطلاب على تبسيط المنطق الكامن وراء الأشياء ليس في الهندسة فحسب، بل في عدد من الأوضاع العددية أيضًا. بالإضافة إلى ذلك، وكما هو مُقترح في هذا الشكل، يجب على الطلاب، في العديد من الحالات، الربط بشكل واضح بين المكوّنات الحيّزية، مثل سطر من المربعات، وبين المكوّنات العددية، مثل عدد المربعات في السطر.

إن تعليم الرياضيات العامة الذي يتم في المدرسة الابتدائية هو هام للطلاب، لأنه يساعدهم على تطوير القدرة على البناء والعمل مع المكوّنات الحيّزية والعددية. ونحن نحتاج إلى أن نوفر للطلاب العديد من الفرص من أجل تشكيل المكوّنات وعدّها في حال وجود مواد للعمل معها أو عند عدم تواجد مثل هذه المواد، ويجب على الطلاب التعامل مع المكوّنات في مخيلتهم فقط. (أنظر Akers et al.[1997] من أجل الحصول على المزيد من الفعاليات.)

Translated and reprinted with permission from *Teaching Children Mathematics*, copyright © 1999 by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved.
NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation.

الشكل 6: الأغراض والتشكيلات التي يمكن بناءها منها



فعاليات التعليم مع المستطيلات

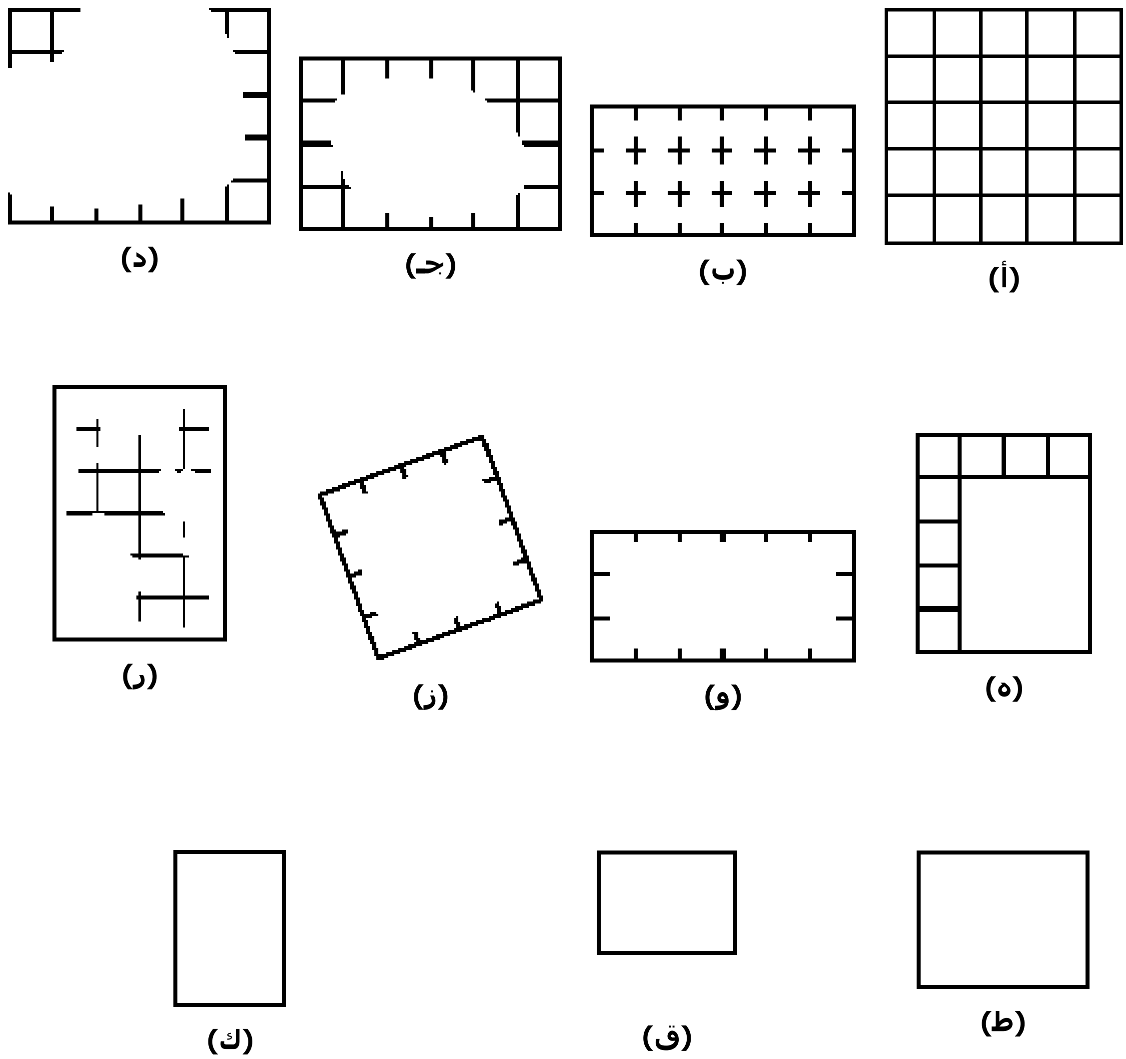
من أجل بناء تنظيم حيزي ملائم من ترتيبين ثنائيي الأبعاد من المربعات، يحتاج الطلاب إلى العديد من الفرص لتنظيم مثل هذه الترتيبات والتفكير في مدى ملاءَمة تنظيماتهم. إحدى الطرق الناجعة لعرض مثل هذه الفرص هي استخدام مسائل على غرار المسائل التي تم عرضها من قبل. على سبيل المثال، يوجد لكل مستطيل معروض في **الشكل 7** أبعادًا بالإنشات. وعند إعطائك المستطيل للطلاب، أعرض عليهم كيف يمكن وضع مربع بلاستيكي مساحته إنش مربع واحد في المستطيل. سيتنبأ الطلاب في البداية عدد المربعات التي ستغطي المستطيل ثم يقومون، بعد ذلك، بفحص صحة تنبؤهم بواسطة المربعات البلاستيكية.

Translated and reprinted with permission from *Teaching Children Mathematics*, copyright © 1999
by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved.
NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation.

ومن أجل التنويع بما يتعلق في هذه الفعالية، بعد أن ينهي الطلاب تنبؤهم الأول، أطلب منهم أن يرسموا كيف يعتقدون أن المربعات ستغطي المستطيل، إجراء تنبؤ آخر، ثم التحقق من تنبؤهم بواسطة استخدام المربعات البلاستيكية. سيكون بإمكان العديد من الطلاب التنبؤ بشكل صحيح بعد القيام برسم المربعات في المستطيل، ولكن لن يكون تنظيمهم جيداً بما يكفي للقيام بتنبؤ أولي صحيح.

يمكنك البدء بالمستطيلات التي توفر أكثر ما يمكن من المعلومات التخطيطية حول موضع المربعات، ثم الانتقال بالتدريج للمستطيلات التي توفر معلومات أقل؛ المستطيلات في **الشكل 7**مدرجة وفقاً لصعوبتها. أعط الطلاب عدداً من المسائل من كل نوع من التمثيل التخطيطي ليتسنى لهم تطوير التنظيم الملائم لذلك النوع قبل التقدم للمسائل الأكثر صعوبة.

الشكل 7: مهمات تتعلق بالمستطيلات



عُرض على التلاميذ أن أربعة مربعات تلائم القسم العلوي (ثم تمت إزالة المربعات) وأن ثلاثة مربعات تلائم وسط المستطيل (ثم تمت إزالة المربعات).

عُرض على التلاميذ أن خمسة مربعات تلائم القسم العلوي (ثم تمت إزالة المربعات) وأن سبعة مربعات تلائم وسط المستطيل (ثم تمت إزالة المربعات).

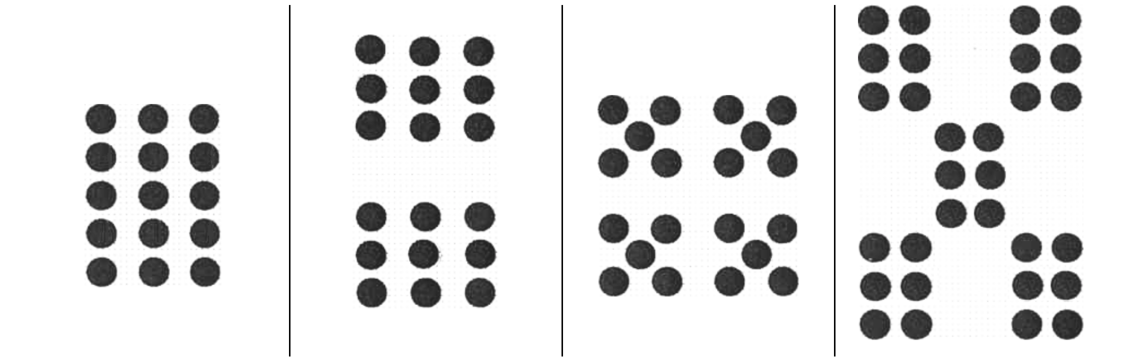
Translated and reprinted with permission from *Teaching Children Mathematics*, copyright © 1999 by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved. NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation.

الفعاليات التي تربط بين المكوّنات الحيّزية والعددية

بالإضافة إلى عدّ الترتيبات المستطيلة، هنالك العديد من الفعاليات الأخرى التي تُشرك الطلاب في التنظيم الحيّزي وتشكيل المكوّنات العددية. وتشمل الأمثلة على ذلك عدّ الأشياء في ترتيبات غير عادية (أنظر **الشكل 6جـ**)، بالإضافة إلى إيجاد عدد المكعبات في أبنية مستطيلية (أنظر **الشكل 6ب**) وعيدا ن المبنى العشري (أنظر **الشكل 6و**).

المسائل التي تحتوي على الصور-السريعة هي أيضًا مجدية. على سبيل المثال، قم بتكبير نموذج يتكون من مجموعات تحتوي كل منها على أربعة أشكال كما في الشكل 6هـ، ثمّ حضّر شريحة عرض (شفيفة). أخبر الطلاب بأنك ستقوم بعرض مجموعة من النقاط لمدة ثلاث ثوان بواسطة المسلاط وأنه سيتوجب عليهم حساب عدد النقاط التي تمّ عرضها. قم بتشغيل المسلاط لمدة ثلاث ثوان من أجل عرض النموذج ثم أطفئه. أعطِ الطلاب بضع دقائق ليعملوا بشكل فردي، من أجل التفكير في عدد النقاط التي تمّ عرضها. قم بعرض النموذج لمدة ثلاث ثوان أخرى، ثم أعط الطلاب بضع دقائق إضافية للتفكير بالمسألة. وفي النهاية، قم بتشغيل المسلاط ثانية واسأل الطلاب عن عدد النقاط التي يرونها. بعد أن يصل التلاميذ إلى القرار النهائي، أطلب منهم أن يناقشوا الإستراتيجيات التي استخدموها من أجل حساب عدد النقاط عندما قمت بعرضها لفترة قصيرة. قم بتكرار هذه العملية مع ترتيبات مشابهة. استخدم النماذج المنقّطة، مثل النماذج المعروضة في الشكل 8، ويمكنك التعديل بحسب الضرورة لتلائم مستوى طلابك.

الشكل 8: نماذج النقاط



الفعاليات مع نماذج الأشكال العجيبة

الفعاليات مع الأشكال العجيبة، مثل النماذج المعروضة في **الشكل 9**، يمكنها أن تكون ناجعة في حثّ الطلاب على التفكير في المكوّنات الحيّزية والعددية. من أجل حلّ هذه المسائل، يجب على الطلاب القيام ببناء شكل عجيب كبير مكوّن من أشكال عجيبة صغيرة، وفي نفس الوقت، القيام ببناء بناء كبير يتكون من الأشكال العجيبة الكبيرة.

Translated and reprinted with permission from *Teaching Children Mathematics*, copyright © 1999
by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved.
NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation.

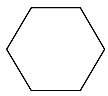
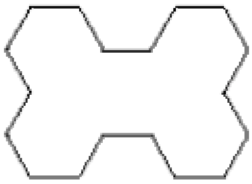
على غرار العمل مع المستطيلات، سيظهر في تفكير الطلاب تنوع واسع من مستويات البراعة. فعلى سبيل المثال، بعد أن قررت كاتي في عملها مع الأشكال العجيبة بأنه يمكن وضع خمسة مسدسات في **الشكل 10أ** وأنه يمكن وضع ثلاثة معينات زرقاء في المسدس، ثم تنبأت العديد من التنبؤات حول عدد المعينات التي يمكن وضعها في الشكل، محاولة كل مرة تخيّل المكان الذي يوضع فيه كل معين من خلال الإشارة بيدها، كما يظهر في **الشكل 10ب**. ويبدو أن كاتي تجاهلت حقيقة كونها قد قررت كيفية وضع ثلاث معينات في المسدس وكيفية وضع خمس مسدسات في الشكل.

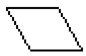
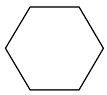
على عكس كاتي، كان تنبؤ بيل صحيحًا:

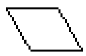
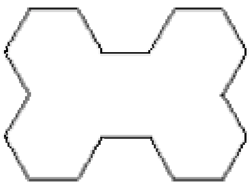
بما أن هنالك حاجة لثلاثة لتغطية واحد من هذه [وضع معينَين في موقع المسدس العلوي الأيسر]، سيكون ذلك ثلاثة [يشير إلى المسدسين الأيسرين في الشكل]، ستة [أنظر **الشكل 10جـ**]؛ [يشير إلى الوسط] سيحتاج هذا إلى ثلاثة، تسعة؛ [يشير إلى القسم العلوي الأيمن] اثنا عشر؛ [يشير على القسم السفلي الأيمن] خمسة عشر.

الشكل 9: فعاليات مع نماذج الأشكال العجيبة بهدف رؤية الوحدات المركبة وعدّها

يجب أن يتيح الحجم الحقيقي للأشكال وضع النماذج العجيبة بشكل دقيق في الصور الملائمة لها.

كم مسدسًا مثل هذه  نحتاج لتغطية هذا الشكل؟  تنبأوا ثم افحصوا بواسطة النماذج العجيبة

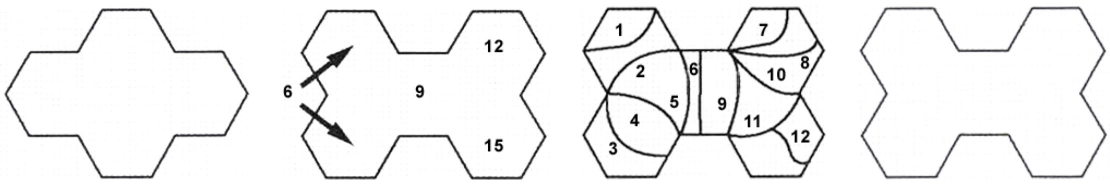
كم معينًا مثل هذا  نحتاج لتغطية المسدس؟  تنبأوا ثم افحصوا بواسطة النماذج العجيبة

كم معينًا مثل هذا  نحتاج لتغطية هذا الشكل؟  تنبأوا ثم افحصوا بواسطة النماذج العجيبة.

Translated and reprinted with permission from *Teaching Children Mathematics*, copyright © 1999
by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved.
NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation.

في مسألة مشابهة (أنظر **الشكل 10د**)، أظهرت مجموعة من طلاب الصف الثاني براعة أكبر.
المعلمة: بما أنك تعرف الآن أن له أربعة مسدسات. كم شبه منحرف يوجد له؟
دون: ثمانية، لأنني أعرف أن شبهي المنحرف يكوّنان مسدسًا، لذلك فإنني أضاعف العدد.
المعلمة: ماذا بشأن المثلثات الخضراء؟
كارا: أربعة وعشرون.
المعلمة: لماذا؟
كارا: لأن ستة مثلثات خضراء تكون مسدسًا أصفر؛ ستة وستة تساوي اثني عشر، واثنا عشر واثنا عشر تساوي أربعة وعشرين.
لاتيشا: لقد جمعت ثماني مرات "ثلاثة" لآنه يوجد ثمانية أشكال من شبه المنحرف، وثلاثة مثلثات تكون كل شبه منحرف.
المعلمة: ماذا بشأن الأشكال الزرقاء؟
جِد: ثلاثة أشكال زرقاء تكوّن مسدسًا، وثلاث مرات "أربعة" تساوي اثني عشر.

الشكل 10: عمل كاتي، بيل ودون مع نماذج الأشكال العجيبة



(أ) (ب) (جـ) (د)

يمكننا أن نساعد الطلاب، مثل كاتي، في تطوير المزيد من التفكير البارع من خلال توفير دعم بصري ملموس إضافي. على سبيل المثال، في المسألة المعروضة في **الشكل 10أ**، بعد أن عرضت كاتي تنبؤها الخاطئ، كان من الممكن أن نطلب منها أن تضع المسدس على الشكل الكبير، ثم التنبؤ. وإذا كانت لا تزال تواجه صعوبة، كان من الممكن أن نطلب منها أن تضع ثلاثة معينات على المسدس والتنبؤ مرة أخرى. في كل مثال، نحن نحاول أن نساعد كاتي على تكوين تنظيم حيّزي صحيح في ذهنها. ولكن، يجب علينا أن نوفر لها ما يكفي من المواد المفهومية من أجل دعم عمليات التنظيم.

الخلاصة

تتكون الهندسة من طرق لتنظيم الحيّز وتحليل نتائج ذلك التنظيم. نحن ننظم الحيّز عندما نقوم بتنظيم ترتيبات أو بهيئة محاور. إننا ننظم الحيز عندما نضعه ضمن إطار مفهومي من ناحية الخطوط، الزوايا، المضلعات ومتعددة الوجوه. نحن ننظم الحيّز عندما نحوّله من خلال عمليات الإزاحة، القلب، الدوران والتكبير. يوفر لنا التركيز على تنظيم الطلاب للبيئات الحيّزية منظورًا جديدًا وقويًا لتطوير البناء الجدي للأفكار المتعلقة بالحيّز وبالهندسة. الخطوة الأولى في

Translated and reprinted with permission from *Teaching Children Mathematics*, copyright © 1999 by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved.
NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation.

استخدام هذا المنظور هي الإدراك بأنه على الطلاب تنظيم العالم غير المنظّم بالنسبة لهم. الخطوة الثانية هي فهم كيفية قيام الطلاب، بشكل شخصي، ببناء التنظيمات الهندسية المختلفة الضرورية للعمل المقتدر والمتنور في ثقافتنا اليوم.

المصادر

Akers, Joan, Michael T. Battista, Anne Goodrow, Douglas H. Clements, and Julie Sarama. *Shapes, Halves, and Symmetry.* Palo Alto, Calif.:Dale Seymour Publications, 1997.

Battista Michael T. "How Many Blocks?" *Mathematics Teaching in the Middle School* 3 (March-April 1998): 401 - 11.

Battista Michael T., and Douglas H. Clements. "Finding the Number of Cubes in Rectangular Cube Buildings". *Teaching Children Mathematics* 4 (January 1998): 258-64.

Battista Michael T., Douglas H. Clements, Judy Arnoff, Kathryn Battista, and Caroline Borrow. "Students' Spatial Structuring and Enumeration of 2D Arrays od Squares."*Journal for Research in Mathematics Education,* in press.

Killion, Kurt, and Leslie P. Steffe. "Children's Multiplication." *Arithmetic Teacher* 37 (September 1989):34-36.

Translated and reprinted with permission from *Teaching Children Mathematics*, copyright © 1999
by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved.
NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation.