עוזרים לילדים להבין יחסים
Helping Children Understand Ratios

מאת: Ana Helvia Quintero

הופיע ב: Arithmetic Teacher, Vol. 34 No. 9, May 1987, pp. 17-21
תרגום: ברכה סגליס

טמפרטורה, מהירות, תאוצה, וצפיפות הם דוגמאות אחדות בלבד של מושגים מדעיים המבוטאים באמצעות יחס. נושאים אלה קשים להבנה עבור תלמידים משום שהם לא מבינים את המושג המתמטי של יחס.

מחקרים רבים הראו שמושג היחס קשה להבנה לילדים (למשל, Behr et al. 1983; Karplus, Pulos, and Stage 1983; Lovell and Butterworth 1966; Lunzer and Pumfrey 1966). למרות זאת, במרבית תוכניות הלימוד בבתי הספר, אנו מוצאים מעט מאוד פעילויות המפתחות מושג זה. מאמר זה מתאר רמות שונות של קשיים בהם נתקלים ילדים כאשר הם עובדים עם יחסים, ומציע רצף של פעילויות שמטרתן לעזור לילדים לפתח מושג זה.

רמה 1

יחס הוא קשר בין שתי כמויות. בהתחלה ילדים מתמקדים רק באחד המרכיבים שיוצרים את היחס. לדוגמה, במחקרים שערכתי, ילדים בגילאים תשע עד שלוש עשרה התבקשו לנבא מה יהיה צבע התערובת ביחסים שונים של סוכר חום וסוכר לבן. חלק מן הילדים, על-פי-רוב הצעירים שבהם תמיד ניבאו שהתערובת שיש בה יותר סוכר לבן תהיה בהירה יותר מאשר התערובת שיש בה פחות סוכר לבן. בהתאם לכך הם ניבאו ש- 6 כפות של סוכר לבן המעורבבות עם 8 כפות של סוכר חום, יתנו גוון בהיר יותר מאשר 4 כפות של סוכר לבן עם 3 כפות של סוכר חום, משום ש- 6 גדול יותר מ- 4.

הילדים התמקדו רק בכמות הסוכר הלבן, אחד המרכיבים של היחס, ולא לקחו בחשבון את הכמות של המרכיב השני של היחס, הסוכר החום. ילדים העושים שגיאה מסוג זה צריכים ללמוד על משתנים והקשרים ביניהם. ילדים אחדים עשויים להבין משתנים בהקשרים מסוימים, אבל צריכים להבין שיחסים מסתמכים על שני משתנים.

הרעיון של משתנה התלוי במשתנים אחרים נלמד לעיתים נדירות באופן ישיר פורמלי בביה״ס. כדי ללמד מושג זה, Karplus, Pulos, and Stage (1983) הציעו להציג לילדים בעיות שבפתרונן יש לקחת בחשבון שניים או יותר משתנים. לדוגמה, אפשר להראות לתלמידים עיפרון המוחזק מעל השולחן ולשאול מה משפיע על אורך הצל שלו כאשר הוא נמצא בשמש. בבעיה זו תלמידים צריכים לקחת בחשבון את אורך העיפרון כמשתנה.

רמה 2

ילדים אחדים יודעים שיחס תלוי בשני משתנים, אבל הם רואים את הקשר ביניהם במונחים של חיבור [אדיטיבי]. כאשר הם משווים את היחסים 3/1 ו- 5/3, ילדים אלה יגידו שהם שווים משום ש-

$$3 - 1 = 5 - 3$$

שגיאה זו נובעת אולי מן העובדה שההשוואות הראשונות שהתלמיד עושה מבוססות על עקרונות של חיבור - לדוגמה, למי יש יותר עפרונות? בכמה יותר?

כדי להבין יחסים תלמידים צריכים לעבור משיטת השוואה המבוססת על חיבור לשיטת השוואה המבוססת על כפל. אולם, מעבר זה אינו מתרחש בצעד אחד. סוגים שונים של יחס מציגים בפני הילדים סוגים שונים של קשיים.

הסוג הפשוט ביותר של יחס הוא היחס ליחידה - לדוגמה, 15 ממתקים בכל שקית, 20 תלמידים למורה. ביחס-יחידה המכנה של היחס הוא 1. כאשר תלמידים עוסקים ביחס-יחידה עולות שגיאות משני מקורות: תלמידים אחדים אינם מבינים את השפה שבה משתמשים כדי לבטא את היחס, לדוגמה, הביטוי 'לכלי' או 'לי' (per); תלמידים אחרים אינם מבינים את המושג של 'יחס-יחידה'.

הפעילויות המוצעות להלן עוזרות לזהות את סוג הקושי ומציעות דרכים לטפל בכל אחד מהם בעבודה יחידנית עם התלמיד.

חומרים

1. אוסף של עצמים מוחשיים, כמו גולות, בדידים, כסף מנייר, וכוסות פלסטיק.
2. אוסף כרטיסים של בעיות מילוליות הכוללות יחסי-יחידה המבוטאים בדרכים שונות: 'בכל', 'עבור', 'לכל אחד', 'לי' (ראו **איור 1**).

מהלך

התלמיד מרים את אחד הכרטיסים, לדוגמה, כרטיס מס' 1. המורה מצביע על העצמים ואומר: "אם אלה הם ממתקים ואלה קופסאות, כיצד תוכל לייצג את הסיטואציה המתוארת בכרטיס זה?"
חוזרים על מהלך זה עד אשר מגלים את המקור לקשיים של התלמיד - אחד הביטויים או מושג היחס. תלמיד שאינו מבין את אחד הביטויים יציג נכון יחסי-יחידה המופיעים בחלק מן הכרטיסים אבל לא באחרים. במצב כזה יש להסביר לילד שכל המילים האלה הן דרכים שקולות לבטא אותו מושג. במובן מסוים, הילד לומד את המשמעות של מילה חדשה.

איור 1: בעיות עם יחסי יחידה

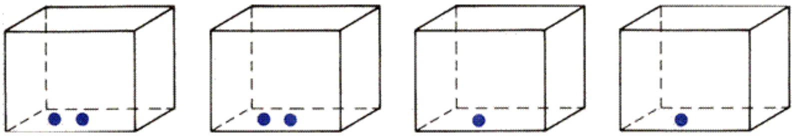
כרטיס 1	כרטיס 2	כרטיס 3
מרי קנתה 4 קופסאות של ממתקים. בכל קופסה היו 6 ממתקים.	לג'ון 3 קבוצות של מכוניות. יש 5 מכוניות לקבוצה.	קרן קנתה תפוחים בשווי $4. 5 תפוחים עולים דולר.

ילדים המתקשים במושג יחס-יחידה יתקשו לייצג את הבעיות ללא קשר לביטויים המופיעים בהן.
במחקר קודם (Quintero 1980), הייצוגים שבאיור 2 נעשו עבור בעיות כמו "מרי קנתה 4 קופסאות של ממתקים. בכל קופסה היו 6 ממתקים."

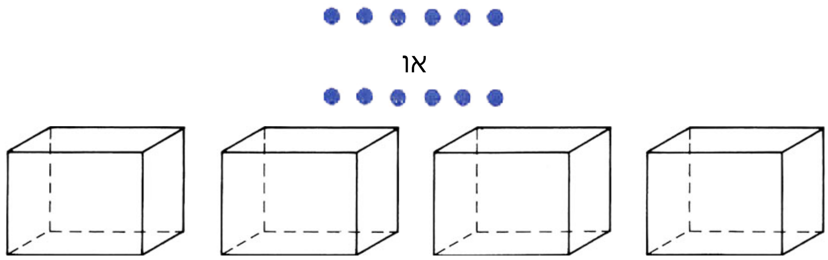
איור 2: ייצוגים שגויים של ילדים לבעיה

"מרי קנתה 4 קופסאות של ממתקים. בכל קופסה היו 6 ממתקים."

א. ייצוג הממחיש את הקשר בין הכמויות כ- "6 ממתקים ב- 4 קופסאות"



ב. ייצוגים של אחת או שתיים מן הכמויות שהוזכרו בבעיה, ללא ייצוג של הקשר ביניהם.

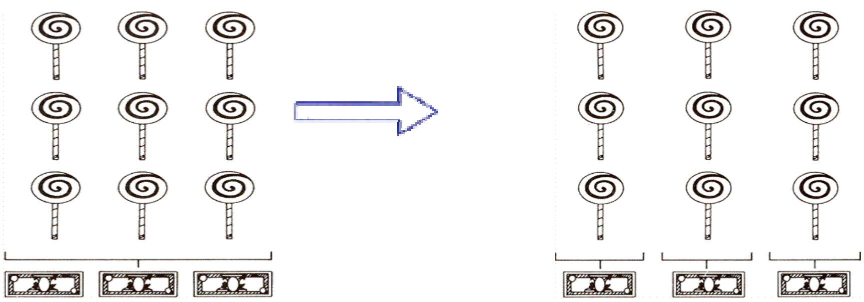


הפעילויות שנועדו לקבוע האם ילדים מבינים את המושג יחס-יחידה יכולות לשמש גם להוראת המושג. ניתן גם להשתמש בידע של ילדים בתחומים אחרים כבסיס להוראת המושג יחס-יחידה. לדוגמה, ילדים מכירים היטב את הפעילות של קח ותן (למשל, 3 מטבעות של 10 סנט עבור חוברת קומיקס). יתכן שהם יכירו גם מספר דוגמאות של קבוצות הומוגניות (למשל, 5 אצבעות לכל יד, 2 רגליים לכל איש). ניתן לפתח בקלות רעיונות אלה למושג יחס-יחידה.

רמה 3

יחסים עם מכנים השונים מ- 1, לדוגמה, 9 סוכריות על מקל ב- 3 דולר, או 5 כפיות של סוכר לבן עבור כל 3 כפיות של סוכר חום, הינם קשים למדי עבור ילדים רבים. ניתן לחלק יחסים אלה ליחסים במספרים שלמים ויחסים במספרים לא שלמים. יחס במספרים שלמים הוא יחס שניתן לצמצם אותו ליחס-יחידה. היחס 9 סוכריות על מקל ב- 3 דולר, ניתן לצמצום ליחס-יחידה של 3 סוכריות על מקל ב- 1 דולר (ראה **איור 3**).

איור 3: 9 סוכריות על מקל ב- 3 דולר שקולות ל- 3 סוכריות על מקל ב- 1 דולר.



יחסים במספרים לא שלמים, כמו 5 כפיות של סוכר לבן עבור כל 3 כפיות של סוכר חום, לא ניתנים לצמצום ליחס במספרים שלמים. אם מצמצמים אותו ליחס-יחידה, יתקבל יחס-יחידה מסוג שבר פשוט או שבר עשרוני; בדוגמה זו, היחס 5 ל- 3 שקול ל- $1\frac{2}{3}$ כפיות של סוכר לבן עבור 1 כפית של סוכר חום.

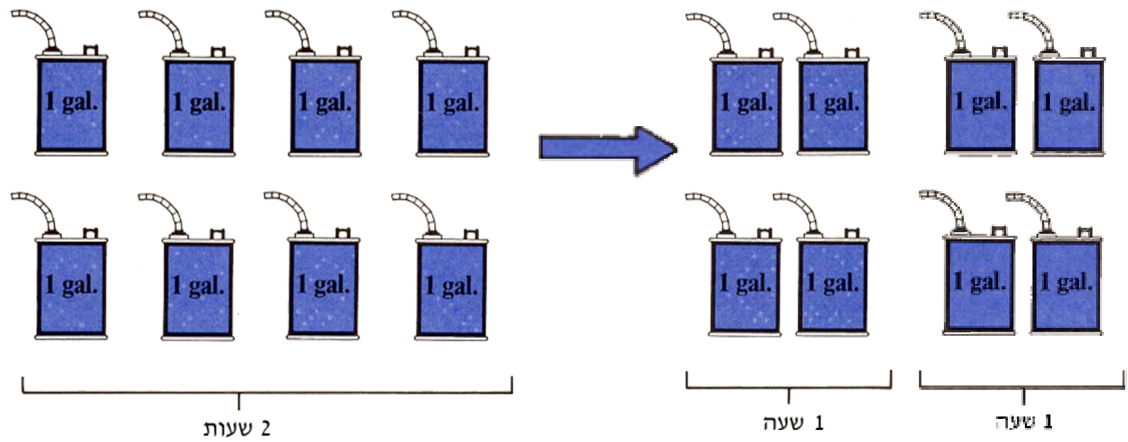
מאחר שילדים מבינים יחסים במספרים שלמים לפני שהם מבינים יחסים במספרים לא שלמים (Quintero and Schwartz 1982; Karplus, Pulos, and Stage 1983), יש להציג בתוכנית הלימודים בביה״ס יחסים במספרים שלמים תחילה.

כאשר מלמדים ילדים על יחסים במספרים שלמים, יש לכוון אותם לראות את יחסי-היחידה השקולים להם. הצעה זו באה בעקבות תצפיות בילדים המשווים יחסים במספרים שלמים. הילדים שעשו השוואה נכונה של יחסים במספרים שלמים תמיד צמצמו אותם קודם ליחסי-יחידה ואח״כ עשו את ההשוואה. לדוגמה, אם הילדים נשאלו איזה סוג של תערובת סוכר לבן וסוכר חום תהיה בהירה יותר, זו שמכילה 9 כפיות של סוכר לבן עבור כל 3 כפיות של סוכר חום, או זו שמכילה 8 כפיות של סוכר לבן עבור כל 2 כפיות של סוכר חום, הם אמרו, ״בתערובת הראשונה יש 3 כפיות של סוכר לבן לכל כפית של סוכר חום, בתערובת השנייה יש 4 ל- 1. אז השנייה בהירה יותר.״

כדי לעזור לילדים לראות את השקילות של יחסים במספרים שלמים ושל יחסי-יחידה, ניתן להציג בעצמים מוחשיים או בציורים את היחס במספרים שלמים וכיצד ניתן להפוך אותו ליחס-יחידה, כפי שרואים ב**איור 3**. דוגמה נוספת יכולה להיות, ״בטיול היו 16 ילדים על כל 2 מבוגרים. כמה ילדים למבוגר?״

כאשר היחסים מבטאים כמויות רציפות או רציפות למחצה (כמו נוזלים), יש להכין ייצוג בדיד של הכמויות. לדוגמה ראו **איור 4**.

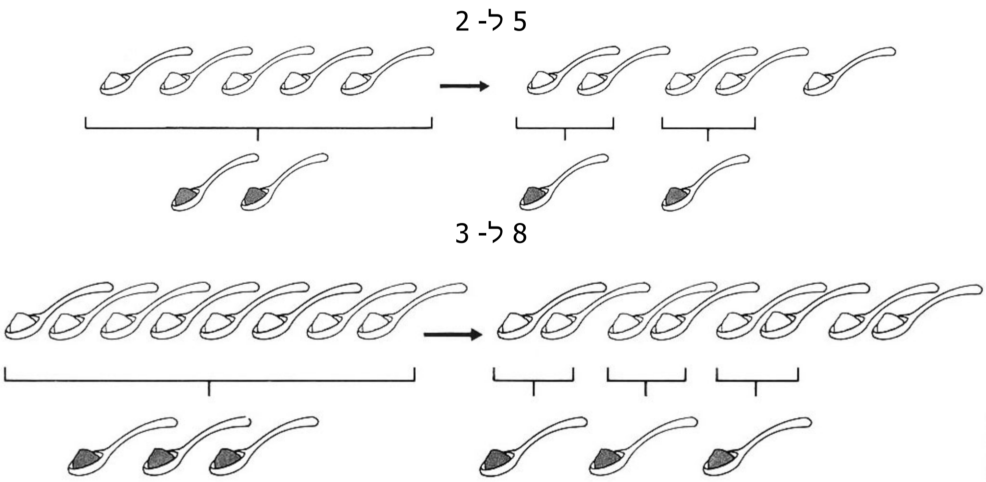
איור 4: 8 גלון של דלק ל- 2 שעות שקולים ל- 4 גלון של דלק לשעה.



רמה 4

כאשר תלמידים מבינים יחסים במספרים שלמים, ניתן להציג יחסים במספרים לא שלמים. תלמידים רבים ישתמשו בתחילה ביחסי-יחידה של מספרים שלמים כדי לפרש יחסים במספרים לא שלמים. לדוגמה, כאשר נתבקשו להשוות "5 כפיות של סוכר לבן עבור כל 2 כפיות של סוכר חום" עם "8 כפיות של סוכר לבן עבור כל 3 כפיות של סוכר חום", תלמידים אחדים הציגו את הנתונים כמתואר ב**איור 5**.

איור 5: שגיאות במציאת ביטויים שקולים עבור יחסים במספרים לא שלמים

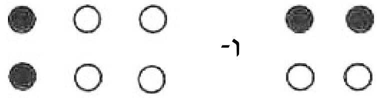


אחרי שהציגו כך את הנתונים הם טענו ש: " 8 ל- 3 בהיר יותר, משום שנשארו שתי כפיות". בין התלמידים שעשו ניתוח כזה היו תלמידים מכיתה ז' שכבר למדו שברים פשוטים ועשרוניים, ולמרות זאת לא השתמשו במושגים אלה כדי לפתור את הבעיה. תלמידים אלה לא למדו את הפירוש של יחס-יחידה. הם השתמשו בו באופן ספונטני בניתוח הבעיה.

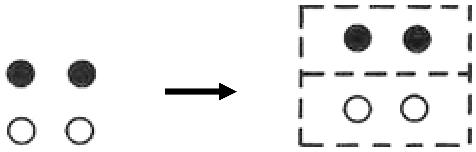
במתמטיקה שכיח למדי להימנע מחישובים בשברים פשוטים ועשרוניים. עם זאת, כשזה נוגע ליחס, ההימנעות של תלמידים מעיסוק בשברים פשוטים ועשרוניים היא יותר מאשר רק בחישובים. תלמידים נמנעים משימוש בשברים פשוטים ועשרוניים בבעיות העוסקות ביחסים משום שהם אינם רואים את הקשר בין מושגים אלה. הנתונים האחרונים מ- NAEP (למשל Carpenter et Al. 1980) מצביעים על כך שמרבית גילאי שלוש עשרה רואים משמעויות שונות של מספרים רציונליים כנושאים נפרדים, בלתי קשורים.

לכן, כדי לעזור לתלמידים לטפל ביחסים במספרים לא שלמים, עלינו לפתח פעילויות המקשרות משמעויות שונות של מספרים רציונליים. הבה נדון בפעילות אחת כזו.

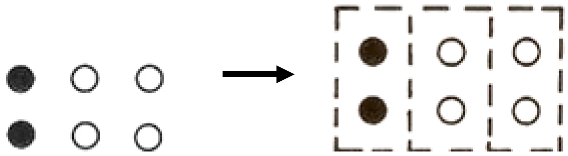
ניתן לפרש שברים כהשוואה בין חלק לשלם, כיחס, כמציינים חלוקה, כפעולה או כמידה. Behr, Post, Silver and Mierkiewicz (1980) מציעים להתחיל את הוראת נושא השבר בחלוקה, במיוחד במשמעות של חלק משלם. משמעויות אחרות צריכות להתבסס על, ולהיות מקושרות למשמעות של חלק משלם. לדוגמה, תלמידים מבינים טוב יותר את השימוש בשברים כמודל של יחס כאשר הם רואים יחסים כדוגמה של השוואה של חלק ושלם. זה היה נכון אצל בתי. כאשר היא היתה בכיתה ב' היא נתבקשה לזהות את השבר המוצג במצבים הבאים:



כדי לבצע משימה זו היא היתה צריכה לייצג יחס כשבר. היא התקשתה בכך עד שהראיתי לה כיצד לפרש את היחס כהשוואה של חלק ושלם. לשם כך הצגתי את המצבים הללו בדרך הבאה:

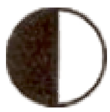


הכדורים השחורים הם חצי מהשלם

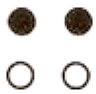


הכדורים השחורים הם שליש מהשלם

כאשר היא קישרה מצב חדש זה למשמעות של השבר כחלק משלם, היא הבינה כיצד ניתן להשתמש באותו סמל, למשל, $\frac{1}{2}$ כדי לייצג שני מצבים שונים:



מצב א': חלק מאזורים במישור



מצב ב': חלק מקבוצות או מערכים

מסקנות

מושגים הקשים ללמידה ולהוראה צריכים להיות המטרה במאמציהם של מורים וחוקרים לפתח דרכים יעילות להוראה. משום כך חשוב לזהות את התפיסות השגויות והנאיביות של התלמידים לגבי מושגים אלה ומה מונע מהם לפתח את תפיסותיהם עד להבנה מלאה. מאמר זה מזהה כמה מאבני הנגף בפיתוח מושג היחס ומציג רעיונות אחדים כיצד לטפל בקשיים אלה במסגרת ביה״ס.

ביבליוגרפיה

Behr, Merlyn J., Richard Lesh, Thomas R. Post, and Edward Silver. "Rational-Number Concepts." In *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, edited by Richard Lesh and Marsha Landau, pp. 91-126. New York: Academic Press, 1983.

Carpenter, Thomas P., Mary K. Corbitt, Henry S. Kepner, Jr., Mary M. Lindquist, and Robert E. Reys. "Solving Verbal Problems: Results and Implications from National Assessment." *Arithmetic Teacher* 28 (September 1980): 8-12.

Goodstein, Madeline P., and William W. Boelke. "A Prechemistry Course on Proportional Calculation." Columbus, Ohio: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education, 1980.

Herron, J. Dudley, and Grayson A. Wheatley. "A Unit Factor Method for Solving Proportion Problems." *Mathematics Teacher* 71 (January 1978): 18-21.

Karplus, Robert, Steven Pulos, and Elizabeth Stage. "Proportional Reasoning of Early Adolescents." In *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, edited by Richard Lesh and Marsha Landau, pp. 45-90. New York: Academic Press, 1983.

Lovell, K., and I.B. Butterworth. "Abilities Underlying the Understandaing of Proportionality." *Mathematics Teaching* 37 (1966): 5-9.

Lunzer, E.A. and P.D. Pumfrey. "Understanding Proportionality." *Mathematics Teaching* 34 (1966): 7-12.

Quintero, Ana H. "The Role of Semantic Understanding in Solving Multiplication Word Problems." Ph.D. diss., Massachusetts Institute of Technology, 1980.

Quintero, Ana H., and Judah L. Schwartz. 'The Development of the Concept of Ratio on Children." Working Paper 15, Division for Study and Research in Education. Cambridge, Mass.: Massachusette Institute of Technology, 1982.