עובדות ואלגוריתמים כתוצרים של הפעילות המתמטית של התלמידים עצמם

Facts and Algorithms as Products of Students' Own Mathematical Activity

מאת: Koeno Gravemeijer, Freudenthal institute and Vanderbilt University

Frans van Galen, Freudenthal institute

הופיע בספר: *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*

Kilpatrick J., Martin W.G., Schifter D. (Ed.) National Council of Teachers of Mathematics

Reston, VA: NCTM, 2003. Chapter 8, pp.114-122.

תרגום ועיבוד: ברכה סגליס

עובדות ואלגוריתמים מתקשרים בדרך כלל לתרגול ושינון ולשחזור מן הזיכרון. ידע אינסטרומנטלי זה לא נראה מתאים לגישות העכשוויות של המתמטיקה הרפורמית המדגישות הבנה, פתרון בעיות ויישומים. מאידך, בהיסטוריה של המתמטיקה יש לאלגוריתמים שורשים בפתרון בעיות. האלגוריתמים הקשיחים של ימינו נוצרו מפתרון בעיות יישומיות באמצעות תהליכים של פורמליזציה, הכללה, סכמטיזציה, ופיתוח פרוצדורות. כפי שנראה בהמשך, לעובדות יש מקור דומה. בפרק זה נדון בפעילות שניתן לכנותה "אלגוריתמיזציה" כאלטרנטיבה להוראת אלגוריתמים. בגישה כזו, האלגוריתמים הקונבנציונליים עשויים להיות נקודת הסיום של רצף הוראה, אך לעיתים קרובות יותר פיתוח אלגוריתמים חצי-פורמליים יכולה להיות עבור המורים מטרה מספקת.

גישת האלגוריתמיזציה הינה אלטרנטיבה לדרך השכיחה של הוראת אלגוריתמים המנסה להשתמש בעצמים קונקרטיים, כמו אמצעי המחשה וייצוגים ויזואליים, כדי להסביר אותם לתלמידים. מחקרים הראו שהוראה המבוססת על שימוש בעצמים קונקרטיים, לדוגמה בדידי דיינס [כוח עשר], אינה יעילה במיוחד (ראה Labinowitz, 1985; Resnick & Omanson, 1987). מעבר לעובדה שתלמידים רבים אינם מפגינים שליטה בביצוע האלגוריתמים, רבים מהם נכשלים כאשר הם צריכים להשתמש במתמטיקה במצבי יישום (Schoenfeld, 1987). סיבה אפשרית לכישלונות אלה נעוצה בעובדה שאלגוריתמים נלמדים על-פי-רוב באופן מבודד, וכתוצאה מכך התלמידים יודעים בעיקרון כיצד לבצע אלגוריתמים מסוימים, אך אינם יודעים מתי הם מתאימים. לדוגמה, Hart (1981), צפתה בבעיה כזו עם האלגוריתם הכתוב לחילוק. היא מצאה שתלמידים נטו יותר להשתמש בחיסור חוזר מאשר בחילוק ארוך כאשר נתבקשו לפתור בעיות של "חילוק יחסי" כמו זו: "משאית נוסעת במהירות של 75 מייל לשעה. כמה זמן יקח לה לנסוע למרחק של 500 מייל?" מסתבר, שתלמידים מתקשים לפרש בעיה מסוג זה כבעיית חילוק.

בעיה קשורה היא שתלמידים משתמשים בצורה שגויה בכללים שלמדו כפרוצדורות מתמטיות מבודדות. תופעה ידועה היא שתלמידים יוצרים את הכלל שכפל מגדיל את המספרים וחילוק מקטין אותם. יישום שגוי זה מכניס אותם לצרות כאשר הם צריכים לפתור בעיות שמכילות מספרים עשרוניים

(Bell, Fischbein, & Greer, 1984). כאשר תלמידים נדרשים לחשב את המחיר של 0.58 ק״ג גבינה, הם מחלקים את המחיר של 1 ק״ג ב- 0.58, מתוך מחשבה שהתשובה צריכה להיות קטנה יותר, שפירושו מבחינתם לחלק.

בפרק זה, אנו מתארים את הלמידה של עובדות ושל אלגוריתמים כתהליך הנבנה על תובנת המספר. אנו טוענים שעובדות ואלגוריתמים צריכים להיות אבני הבניין של הידע המתמטי הפעיל של תלמידים. מרבית הפרק מוקדש ליישום נקודת מבט זו בהוראת המתמטיקה. במקום להמחיש לתלמידים באופן קונקרטי את האלגוריתמים, המורה יכול לאפשר להם לפתח או להמציא מחדש בעצמם את האלגוריתמים (Freudenthal, 1973, 1991; Kamii, Lewis, & Livingstone, 1993). תהליך כזה של המצאה מחדש מתחיל מבחירה קפדנית של בעיות עם הקשר. כדי לפתור בעיות אלה, התלמידים צריכים במידה מסוימת לעשות מודליזציה של הסיטואציה. כאשר הם עושים רפלקציה על שיטות הפיתרון שבהם השתמשו, התלמידים עשויים לפתח מודלים ופרוצדורות מתוחכמות יותר בהם יוכלו להשתמש גם בסיטואציות אחרות. גישה זו של מודליזציה-המצאה מחדש דורשת תכנון קפדני של פעילויות הוראה. התהליך תלוי במידה רבה במה שהתלמידים עושים, אבל הבעיות אותן הם מתבקשים לפתור והכלים הניתנים להם צריכים להיות מתוכננים כך שיציעו הזדמנויות עשירות ללמידה מתמטית.

הביקורת על הערך המועט של הוראת עובדות ואלגוריתמים בלבד ועל ההשפעה המזיקה של תרגול ושינון גרמה לעיתים למורים לדחות לחלוטין לימוד של עובדות ואלגוריתמים כמטרות בחינוך מתמטי. אנו טוענים, לעומת זאת, שהחינוך המתמטי צריך לתת לתלמידים הזדמנות ללמוד אלגוריתמים מסוג כלשהוא. הם לא חייבים להיות האלגוריתמים הפורמאליים הסטנדרטיים, הם יכולים להיות פרוצדורות לחישוב אישיות, חצי-פורמאליות.

תובנת המספר כבסיס ללימוד עובדות ואלגוריתמים

עובדות ואלגוריתמים נחשבים בדרך כלל לדברים שונים, אך האומנם זה כך? במבט ראשון, עובדה נראית פשוט כידע שבצורה כזו או אחרת יש לשנן. עם זאת, ניתן להגיע לידיעת העובדה בדרכים שונות. הידיעה יכולה להיות תוצאה מכך שהיא נאמרה לתלמיד, אבל היא יכולה גם להיות התוצאה של תובנה שהתלמיד פיתח בעצמו, שנובעת מעיסוק פעיל בפתרון בעיות מתמטי. נוכל לשאול את עצמנו מה פירוש לדעת ש- $7 + 6 = 13$ או $6 \times 8 = 48$, או לדעת ש״שטח = אורך כפול רוחב״. או, אם נרחיב רשימה זו לכיתות העליונות, מה פירוש הדבר לדעת שהנגזרת של x^2 היא 2X. כדי להרחיב זאת אף יותר, מה פירוש הדבר לדעת ש- $E = mc^2$?

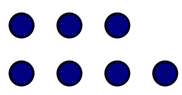
בכל דרך שבה הן נלמדות, עובדות לא קיימות ללא מסגרת התייחסות אשר נותנת להן משמעות. לדוגמה, מרבית התלמידים יודעים ש- $6 + 7 = 13$ לא כעובדה מבודדת ששיננו אותה, אלא כעובדה הקשורה ל- $6 + 6 = 12$, ל- $7 + 7 = 14$, או ל- $7 + 3 = 10$ ו- $3 + 3 = 6$. לפיכך, לא ניתן כמעט להפריד בין ידיעת עובדה לבין היכולת להשתמש בה באופן משמעותי. קשה גם לעשות הבחנה חדה בין עובדות ואלגוריתמים. למשל, ניתן לחשוב על הנוסחה לחישוב השטח של מלבן, הן כעובדה והן כאלגוריתם. אם הנוסחה ידועה רק כצרוף מילים, היא למעשה עובדה חסרת משמעות, כפי ש- $E = mc^2$ הוא עבור רבים מאיתנו, אבל אם באמת יודעים כיצד ליישם את הנוסחה לחישוב שטח, זאת פרוצדורה בדומה לאלגוריתם.

עם הזמן פותחה תפיסה אחרת למשמעות של לימוד עובדות ואלגוריתמים. נעשה מעבר מתפיסת הידע כסחורה הניתנת להעברה אל תפיסת הידע בצורת פעילות (Sfard, 1998). מנקודת מבט זו, ניתן להתייחס לעובדות ולאלגוריתמים כהרחבה של תובנת המספר. אנו מאמצים פה את המטפורה הסביבתית של Greeno (1991), המתארת את תובנת המספר כיכולת להתמצא בסביבה המתמטית. סביבה כזו יכולה להיתפס כמורכבת מרשת של יחסים בין מספרים (Skemp, 1976; van Hiele, 1973). דוגמה ליחסים מספריים אלה היא הרשת של עובדות החיבור והחיסור במספרים עד 20. תלמידים יכולים לפתח רשת כזו במהלך סידרת פעילויות של בניית כמויות (Gravemeijer, Cobb, Bowers, & Whitenack, 2000). תוך כדי עשיית פעילויות אלה, תלמידים עשויים ללמוד ש- $2 + 2 = 4$. כך הם לומדים באופן בסיסי שצרוף שני עצמים לשני עצמים דומים נותן ארבעה עצמים, ללא תלות בעצמים הספציפיים או בסיטואציה. נוכל לומר שבלימוד קשר זה, התלמידים עושים הכללה מעבר לעצמים ולסיטואציות. באופן זה, הם יכולים לעשות את המעבר מחשיבה במונחים של מספרים, בקונטקסט של כמות, המקושרים לעצמים מזוהים (כמו, שתי גולות ועוד שתי גולות נותנות ארבע גולות), אל חשיבה במונחים של מספרים בלבד ויחסים בין מספרים (כמו, שתיים ועוד שתיים שווה ארבע).

ניתן לתאר מעבר זה כבניית מספרים כישויות מתמטיות שיש להם תכונות כמו של עצמים. נוכל לדבר כאן על קיום המספר כישות מתמטית העומדת בפני עצמה עבור התלמיד, משום שהמספרים לא מפיקים עוד את המשמעות שלהם מהתייחסות לעצמים מזוהים שניתן למנותם, אלא מהיותם משובצים בתוך מסגרת מתמטית של יחסים בין מספרים. לדוגמה, הכמות ארבע אינה מקושרת עוד לעצמים מזוהים, כמו ב"ארבע גולות", "ארבעה חרוזים", "ארבעה ילדים" וכדומה, אלא מקושרת ליחסים מספריים, כמו $4 = 2 + 2$, $4 = 5 - 1$, $4 + 4 = 8$, ו- $4 + 6 = 10$.

הסיטואציה הבאה היא דוגמה לפעילות הוראה שעשויה לקדם את התפתחות המסגרת של יחסים בין מספרים שהוזכרה קודם. המורה שמה כמות קטנה של דסקיות על מטול שקפים ומראה אותם לילדים לפרק זמן קצר. המורה מבקשת כעת מהילדים להגיד כמה דסקיות ראו וכיצד הם ראו אותם. התשובות לשאלה השנייה ינחו את המורה להתחיל להעדיף פתרונות המבוססים על יצירת קבוצות על פני פתרונות של ספירה בלבד (cf. McClain, 1995). בדוגמה המופיעה ב**איור 1**, תלמידים עשויים לדווח שהם ראו "קבוצה של שלוש, קבוצה של ארבע ... שבע דסקיות בסך-הכל" או שהם עשויים לדווח שהם ראו "קבוצה של שש ואחד". כתוצאה מהשתתפות בפעילויות כאלה, תלמידים מתחילים לתפוס יחסים מספריים כקונקרטיים.

איור 1: ספירת דסקיות על מטול השקפים



כאשר יותר ויותר יחסים מספריים נכללים ברשת זו, תלמידים עשויים לפתור בעיית חיבור, כמו $7 + 6 =$ ___, על ידי שימוש בעובדות מספריות, כמו $3 + 3 = 6$, ו- $7 + 3 = 10$. שימו לב שהמטרה כאן איננה יישום של פרוצדורה קבועה או אלגוריתם. איננו מניחים שהתלמידים חושבים מלכתחילה במונחים של השלמה לעשר, שבו מפרקים מספר אחד כך שאחד החלקים יוכל להתחבר עם המספר השני וליצור עשר. במקום זה, אנו מציעים שמלכתחילה הם מכוונים על ידי הידע שלהם על יחסים מספריים. אם במסגרת ההתייחסות של יחסים מספריים שהתלמידים בנו לעצמם, יחסים מספריים

כמו $3 + 3 = 6$, ו- $7 + 3 = 10$ הינם בהישג יד, אז הם יוכלו להשתמש בהם כאבני בניין להרכבת יחסים חדשים.

יש להודות שהשיטה המקובלת היא ללמד תלמידים פרוצדורות, כמו השלמה לעשר. מאידך, אנו מציעים כאן גישה שמתחילה מלמטה ועולה כלפי מעלה (bottom-up) שבה התלמידים מפתחים בהתחלה מסגרת של יחסים מספריים. הרעיון הוא שכאשר התלמידים מכירים כבר היטב יחסים מסוג $3 + 3 = 6$ ו- $7 + 3 = 10$, הפיתרון $7 + 3 = 10$, ו- $10 + 3 = 13$ הופך להיות מובן מאליו. מנקודת המבט של המתבונן, ניתן לאפיין את הפעילות של התלמיד כ"שימוש בחוק הקיבוץ והשלמה לעשר". אבל מנקודת המבט של התלמיד, המטרה איננה ליישם חוק כלשהו, התלמיד פשוט משתמש בתובנת המספר ומצרף באופן יעיל את היחסים המספריים שהוא יודע. בגישה שאנו מעדיפים, רק אחרי שהתלמידים מתחילים לחשוב על הדברים הקבועים שבשיטות הפתרון שלהם, הם נוכחים לדעת כיצד ניתן להתייחס לשיטות פתרון אלה כפרוצדורות נוחות או כאסטרטגיות. כתוצאה מכך הם עשויים להתחיל לפרש אסטרטגיות ופרוצדורות שגרתיות כהכללות של שיטות לפתרון בעיות. בהמשך, ידיעת אסטרטגיות ופרוצדורות אלה יכולה להתחיל להדריך את שיטות הפתרון שלהם, והדרכה זו עשויה להביא, בסופו של דבר, להתנהגות שגרתית יעילה. עם זאת, עלינו לציין שהתנהגות שגרתית אינה תמיד יעילה. פיתוח רב מדי של פרוצדורות טומן בחובו את הסכנה של יישום עיוור - אפילו כאשר פרוצדורות אלה מעוגנות היטב בהתנסויות וברפלקציה (Van Parreren, 1981).

דוגמה שנייה לקוחה מאלגברה של הכיתות הגבוהות, שבה תלמידים צריכים ללמוד כללים למציאת נעלמים במערכת של משוואות. אנו מאמינים שבמקום ללמוד כללים אלה כהפשטות מוכנות, יש לתת לתלמידים הזדמנות, בתוך סיטואציה מוחשית של פתרון בעיות, לפתח את הכללים בעצמם כהכללות של הפתרונות. דוגמה למצב כזה מופיעה ב**איור 2** (בעיות דומות ניתן למצוא אצל Kindt & Abels, 1998).

איור 2: הפנקס של המלצר

Order	Taco	Drink	Total
1	1	3	$5
2	3	4	$10

תלמידים יכולים למצוא את מחירי היחידה של משקאות ומנות טאקו על ידי הוספת הזמנות פיקטיביות לפנקס של המלצר. לדוגמה, מההזמנה הראשונה ניתן להגיע באופן הגיוני לעובדה ששלוש הזמנות כאלה - שלושה טאקו ותשעה משקאות - יעלו $15. על ידי השוואת כמות זו למחיר של ההזמנה השנייה, תלמידים יכולים להסיק שחמישה משקאות יעלו $5. לכן, משקה אחד יעלה $1, ואז ניתן לראות מההזמנה הראשונה שטאקו אחד צריך לעלות $2.

כאשר התלמידים משווים דרכי פתרון שונות, הם לומדים איזה מניפולציות הן הגיוניות ובכך הם יכולים לפתח פרוצדורות כלליות יותר. בהתחלה, כל המניפולציות הן פעולות משמעותיות בתוך הקונטקסט של, למשל, מסעדה מקסיקנית. בהמשך, הקונטקסטים עשויים להעלם ברקע והמניפולציות עם משוואות ירכשו משמעות משלהם. באותו שלב, ניתן להציג אופן סימון כללי יותר, כמו למשל זה המופיע **באיור 3**.

איור 3: סימון פורמאלי לבעיה שבאיור 2

$$\begin{cases} x+3y=5 \\ 3x+4y=10 \end{cases} \left| \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix} \right|$$

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 3x+9y=15 \\ -3x-4y=-10 \end{cases} + \\ \hline 5y=5 \\ y=1 \end{array}$$

substitute:

$x+3=5$

$x=2$

מנקודת המבט שלנו, אם כן, יש לחקור פעולות אלגבריות כפעולות בתוך מצבים קונקרטיים שבהמשך מתפתחות לפעולות משמעותיות במשוואות פורמאליות יותר. בתהליך זה, משוואות הופכות להיות עצמים שניתן לפעול עליהם, בדומה לאופן שבו הכמות ארבע בראשית לימוד המספר קשורה בהתחלה לעצמים מזוהים אך בהמשך מקבלת משמעות דמוית-עצם משל עצמה.

לפיכך, לפי דעתנו, הבסיס ללימוד פרוצדורות ואלגוריתמים מונח ביכולת לפעול בדרך משמעותית בתוך סביבה מתמטית. סביבה זו יכולה להיות בסיסית ביותר - כמו הסביבה המורכבת מרשת של עובדות חיבור וחיסור עד 20 - אבל היא יכולה להיות גם סביבה של משוואות אלגבריות. כדי לאפשר לתלמידים להפעיל את יכולתם בדרך משמעותית, רצפי ההוראה צריכים להתחיל עם בעיות שקשורות להתנסות אמיתית של התלמידים. במקום שהמורה יעביר לתלמידים פרוצדורות מוכנות, התלמידים צריכים לפתח בעצמם פרוצדורות על ידי כך שיעשו רפלקציה על פתרונותיהם לבעיות ספציפיות.

המצאה מחדש מודרכת (Guided Reinvention)

ההתייחסות ללמידת עובדות ואלגוריתמים שתוארה קודם מתאימה לנקודת המבט המבוטאת במסמכי הרפורמה המדגישים את הרעיון של מתמטיקה כפעילות. רעיון זה של מתמטיקה כפעילות יכול להיות מוצג כניגוד לדימוי של המתמטיקה כמערכת מוכנה מראש של כללים, פרוצדורות וידע, אשר לעיתים הובילה לדחייה של כללים ופרוצדורות כמטרות בחינוך המתמטי. אולם מחנכים יכולים להתעלות מעל דיכוטומיה זו: הדגשת המתמטיקה כפעילות אין משמעותה שיש לבטל את התכנים המתמטיים, ניתן

להמציא אותם מחדש (Bednarz, Dufour-Janvier,Poirier, & bacon, 1993; diSessa, Hammer, Sherin, & Kolpakowski, 1991; Polya, 1963).

כדי לטעון טענה זו, אנו הולכים בעקבות Freudenthal (1971,1973), אשר הבחין שבהיסטוריה של המתמטיקה, אכסיומות, הגדרות, הנחות, אלגוריתמים וכך הלאה, מתגלים כנקודות קצה בתהליך ארוך של פעילות מתמטית. בהוראת המתמטיקה בגישה המסורתית, נקודות קצה אלה הופכות להיות נקודות ההתחלה בהוראה. Freudenthal רואה היפוך זה כלא רצוי. במקום זה, הוא טוען שהתלמידים צריכים לעבור תהליך דומה לזה שעוברים המתמטיקאים. הוא אומר שהתלמידים צריכים לקבל הזדמנות להמציא מחדש את המתמטיקה. מטרת העל, לדעתו, היא שהתלמידים יחוו את הידע המתמטי שלהם כתוצר של פעילותם המתמטית.

בהקשר לפעילות המתמטית, Freudenthal מדגיש את הארגון או ה- **מתמטיזציה**. באופן מילולי ניתן לתרגם מתמטיזציה כ"לעשות יותר מתמטי". ההשלכות שלה יכולות להיות מובנות כאשר מתייחסים לתכונות של המתמטיקה, כמו הכללה, ודאות, דיוק וקיצור. מתמטיזציה כוללת פעילויות כמו יצירת הכללות, הצדקות, פורמאליזציה וקיצור ; האחרון כולל גם פיתוח אלגוריתמים.

מתמטיזציה כוללת הן תכנים בעלי בסיס מציאותי והן תכנים מתמטיים. Treffers (1987) מבחין בין מתמטיזציה "מאוזנת" לבין מתמטיזציה "מאונכת". מתמטיזציה מאוזנת כרוכה בהמרת בעיה קונטקסטואלית לבעיה מתמטית כדי לפתור אותה באופן מתמטי. מתמטיזציה מאונכת כרוכה בהעלאת התוכן המתמטי לרמה גבוהה יותר. תוצר זה אפשרי כאשר תלמידים עושים מתמטיזציה של הפעילות המתמטית שלהם. מתמטיזציה מאונכת היא הבסיס של התקדמות מתמטית, בעוד שמתמטיזציה מאוזנת חיונית כשהמטרה היא להכיל טווח רחב של תופעות. ביחד, המתמטיזציה המאוזנת והמאונכת יוצרות תהליך שנקרא "מתמטיזציה מתקדמת" (progressive mathematization), שהינה, במובן מסוים, המקבילה של המצאה מחדש : המצאה מחדש מנקודת המבט של המתבונן, אשר יודע מה צריך להמציא מחדש, עשויה להיות מתמטיזציה מתקדמת מנקודת המבט של השחקנים, או התלמידים. הרעיון הבסיסי הוא שכאשר תלמידים פותרים בעיות הם מפתחים מושגים מתמטיים, סימונים ופרוצדורות ככלים מארגנים. בתהליך כזה, אלגוריתמים לא פורמאליים עשויים להופיע כצורות של שיטות מאורגנות לפתרון סוג מסוים של בעיות. בהדרכת המורה, ניתן לפתח אלגוריתמים לא פורמאליים אלה לאלגוריתמים המקובלים. מאידך,המורה יכול גם להעדיף לטפח את האלגוריתמים הלא פורמאליים כמטרה בפני עצמה.

המצאה מחדש מודרכת דורשת תיאוריות הוראה בעלות תכנים מסוימים. על מנת שיוכלו לארגן את תהליכי הלמידה, המורים צריכים "תיאוריות הוראה מקומיות" עבור כל נושא נלמד (Gravemeijer, 1998). תיאורית הוראה מקומית מתארת ומנמקת, כיצד הפעלת רצף של פעילויות הוראה יכולה לתמוך בתהליך הוראה מסוים לטווח הארוך. לדוגמה, היא תתאר כיצד ילדים לומדים בתחילה דרכים לא פורמאליות לחיבור וחיסור וכיצד הם עשויים לפתח על-ידי-זה פרוצדורות סטנדרטיות יותר לחיבור וחיסור. או שהיא תתאר כיצד ילדים מפתחים פרוצדורות חישוב אשר עשויות להיות דומות, או לא דומות, לאלגוריתמים הסטנדרטיים של כפל וחילוק. נחזור לדוגמאות אלה בקטעים הבאים.

מודליזציה: המקרה של חיבור וחיסור

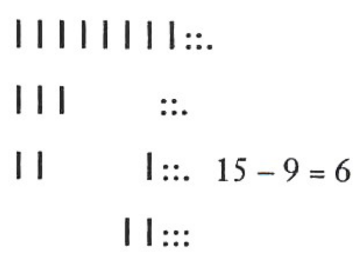
המצאה מחדש מודרכת מתייחסת למודליזציה כאל תהליך בסיסי בלימוד המתמטיקה. נקודת ההתחלה היא דרכי הפיתרון ההגיוניות שהתלמידים מציגים כאשר הם פותרים בעיות שמבחינתם מהוות התנסות מציאותית. לאחר מכן, המורה עושה מודליזציה של שיטות הגיוניות אלה. בהתחלה, יהיה קשר הדוק בין הפעילות במודל לבין הסיטואציה שעליה עושים את המודליזציה, אבל בהדרגה הפעילות תשיג מעמד עצמאי יותר. המודל המוכלל שיתקבל יוכל כעת לתפקד כאמצעי תומך לחשיבה מתמטית פורמאלית יותר. בגישה זו, אנו מדברים יותר על "מודליזציה" מאשר על "שימוש במודל" משום שהביטוי האחרון מציע שימוש בכלים מוכנים מראש מתוך ארגז כלים מתמטי.

גישה זו למודליזציה ולמודלים מנוגדת לשימוש המקובל במודלים בהוראת מתמטיקה שהם תוצאה של המאמצים לעשות קונקרטיזציה של ידע המומחים. בגישה זו, המודלים הם ניסיון להפוך את ידע המומחה לנגיש ברמת התלמיד. דוגמה לכך היא השימוש בבדידי בסיס עשר במה ש- Resnick ו- Omanson (1987) מכנות "מיפוי" (mapping instruction). בהוראה זו, כל צעד באלגוריתם הכתוב ממופה לפעולה בבדידים. אולם, מנקודת המבט של התלמיד, כללים אלה עלולים להיות בלתי מובנים לחלוטין.

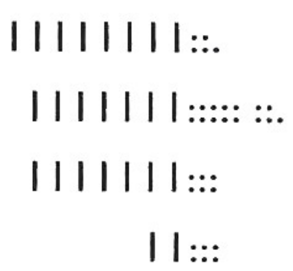
לדוגמה, הבעיה 59 - 85, בה מתחילים עם 8 עשרות ו- 5 אחדות. בגישה המבוססת על ההיגיון, הדבר הטבעי הוא להוריד קודם 5 עשרות. לאחר מכן, מתוך ידיעה ש- $15 - 9 = 6$, מישהו יכול להחליף עשרת אחת ו- 5 אחדות ב- 6 אחדות, או מישהו יכול להיווכח שלקחת 9 זה כמו לקחת עשר אחד ולהוסיף אחדה אחת (ראה **איור 4**). מאידך, בפתרון הבעיה על-פי הפרוצדורה הסטנדרטית, התלמיד נדרש לפעול על-פי סידרה של צעדים שנקבעו מראש (**איור 5**):

1. התחל עם האחדות.
2. בדוק אם ניתן להחסיר 9 מהאחדות.
3. לא ניתן לחסר, אז החלף 1 עשרת ל- 10 אחדות.
4. החסר 9 אחדות.
5. בדוק אם ניתן להחסיר 5 עשרות.
6. ניתן להחסיר, אז החסר 5 עשרות.
7. קרא את התשובה: 26.

איור 4: פרוצדורה לא-פורמאלית לבעיה 59 - 85



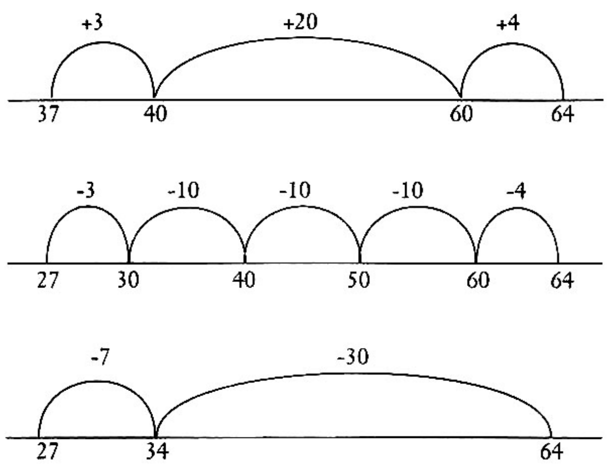
איור 5: פרוצדורה של צעד אחר צעד לבעיה 59 - 85



גישת מיפוי זו מעלה שתי בעיות : פרוצדורה זו, המבוססת על כללים, מאולצת למדי וכמו כן אינה מכינה את התלמידים במידה הולמת לאלגוריתם הכתוב. בעוד שתלמידים המשתמשים בבדידים יכולים פשוט לקרוא את התשובה, הרי שכאשר יבצעו את האלגוריתם הכתוב הם יצטרכו לחשב בראש כמה זה 9 - 15.

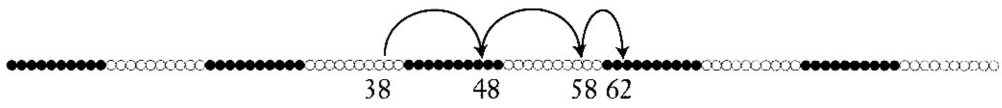
נוכל לאפיין גישת הוראה זו כמתחילה מלמעלה ויורדת כלפי מטה (top-down) משום שנקודות ההתייחסות הן האלגוריתם לחישוב במאונך וידע מומחה אודות המבנה העשורי, ולא הידע של התלמידים. מקלות העשר, משטחי המאה וקוביות האלף מוצגים כייצוגים שהוכנו מראש, אבל יתכן שהתלמידים לא פיתחו עדיין את המושגים שמאחורי ייצוגים אלה. כמו כן, התלמידים צריכים לטפל בבדידים, על-פי כללים מוכתבים, בדרכים השונות ממה שתלמידים היו עושים אילו ניתנה להם האפשרות לבחור בדרך משלהם. על-פי מחקרים, גישה זו אינה מונעת השלכות מסוימות : חסר בהבנה, חסר בשליטה, וחסר ביכולת ליישם (Labinowitz, 1985; Cobb, Yackel, & Wood, 1992; Resnick & Omanson, 1987). נוכל לדמיין את גישת המיפוי כמומחה המתכופף לעבר התלמיד. האלטרנטיבה לגישת המיפוי היא לנסות לעזור לתלמידים לבנות ולשכלל את הידע הלא-פורמאלי שלהם. כלי מתאים להשגת מטרה זו הוא מה שנקרא ישר המספרים הריק. במקום ללמד ילדים פרוצדורות קבועות לחיבור וחיסור עד 100, Whitney(1985) ובהמשך Treffers ו- de Moor (1990) הציעו להשתמש בסכמה של ישר המספרים שבו התלמידים מציירים את היחסים המספריים שהם רואים כמתאימים לפתרון שלהם. דוגמה לכך מופיעה ב**איור 6**. פרוצדורות החישוב בהם משתמשים התלמידים בדוגמאות כאלה הם פרי פיתוח עצמי - בניגוד לאלגוריתמים המוכנים - והם משקפים את הידע של ילדים אודות יחסים מספריים.

איור 6: דרכים שונות לחשב 37 - 64 על ישר המספרים הריק



פעולות על ישר המספרים הריק, כמו שמופיע בעבודת התלמידים ב**איור 6**, הם כבר מופשטות למדי. לכן, הטקטיקה של הצגת ישר המספרים הריק ככלי מוכן שהמורה מראה לתלמידים את יעילותו, אינה הולמת. תחת זאת, במסלול הלמידה הנחוץ, ישר המספרים הריק נולד מתוך חשיבה בקונטקסטים של בעיות. בהצעה של Treffers ו- de Moor (1990), הצגת ישר המספרים הריק באה אחרי עבודה עם שרשרת של 100 חרוזים, הצבועים בקבוצות של 10 (ראה **איור 7**). התלמידים מבצעים מטלות כמו : ספרו עד 38 ואחרי זה הוסיפו עוד 24, לאיזה מספר הגעתם?

איור 7: קפיצות על שרשרת החרוזים: 38 ועוד 24



בתוך כך מציגים בהמשך את ישר המספרים הריק כדי לעשות מודליזציה של הפעילויות שבשרשרת החרוזים. אם כך, ישר המספרים הריק מתפקד תחילה כמודל **של** (of) סיטואציה, והדמייה של פעולה בתוך אותה סיטואציה הופך את הציור של קשתות בישר המספרים הריק לפעולה משמעותית עבור התלמידים. בהדרגה תעבור תשומת הלב של התלמידים מחשיבה על פעולה עם שרשרת החרוזים אל חשיבה על יחסים מתמטיים בין המספרים שבבעיה. כתוצאה מכך, פעולה על ישר המספרים הריק יכולה להיות בעלת משמעות משל עצמה. אז יכול ישר המספרים הריק להתחיל לתפקד כמודל **עבור** (for) חשיבה מתמטית.

נקודת ביקורת על השימוש בשרשרת החרוזים היא אופייה המלאכותי כסוג של עולמון (microworld) העוסק במישוש. תלמידים עשויים לחשוב על הקונטקסט של שרשרת החרוזים כעל עולם בפני עצמו, עם כללים משלו שיכולים או לא יכולים להיות ישימים מחוץ לאותו קונטקסט. מתוך התייחסות לביקורת זו נעשה ניסיון לתכנן רצף הוראה שמסתמך על מדידות אורך כבסיס להצגת ישר המספרים הריק (McClain, Cobb, Gravemeijer, & Estes, 1999; Stephan, Cobb, Gravemeijer & McClain,1998). בתיאור קצר מאוד של רצף זה, תלמידים מתבקשים למדוד אורכים שונים באמצעות חזרות על יחידות מדידה בסיסיות ויחידת מדידה גדולה יותר המכילה 10 יחידות בסיסיות. מדידה זו בעשרות ואחדות נעשית באמצעות סרגל של 100 יחידות המורכב מיחידות של עשר ושל אחד. בהמשך, פעילות המדידה מורחבת להוספה, הפחתה והשוואה של אורכים. פעילויות אלה מעוררות אסטרטגיות ספירה שניתן לסמל אותן באמצעות קשתות על סרגל סכמתי. ייצוג סכמתי זה משמש אז כאמצעי לתמיכה ולתקשורת אודות שיטות פיתרון. לבסוף, שימוש זה של ישר המספרים מוכלל לשימוש בבעיות חיבור וחיסור בכל מיני קונטקסטים.

תכונה שיכולה להיות בעייתית היא האופי הקשיח של הסרגל. בסרגל, יש להתאים בדיוק את המיקום לאורכים המתאימים, בעוד שבישר המספרים הריק, המרחקים שבין המספרים אינם חייבים להיות בדיוק בהתאמה עם ערכיהם המספריים. ניסיון לשאוף לייצוג מדויק של כל הקפיצות מבחינה פרופורציונלית, היה פוגע באופן חמור בשימוש גמיש של ישר המספרים. לכן תלמידים צריכים להבחין בהבדל שבין הסרגל כמכשיר מדידה לבין ישר המספרים הריק כאמצעי לבטא שיטות פיתרון. הבחנה זו תואמת את הכוונה הכללית, לעשות **מודליזציה של הפעילות**, ולא מודליזציה של העצם.

אלגוריתמים חלקיים לא-פורמאליים

במסלול הלמידה המבוסס על המצאה מחדש מודרכת, יש לבחון בתשומת לב רבה את מאפייני הסימבוליזציה המוצגים. אם אפשר, מודלים צריכים לתת לתלמידים את החרות לעשות כל מה שהם היו עושים בסיטואציה קונקרטית. מודלים צריכים גם לתת לתלמידים הזדמנויות לעשות רפלקציה על התכונות המתמטיות של פרוצדורות הפתרון. משמעות המלצה זו היא שהבעיות הקונטקסטואליות שפותחות את רצף ההוראה צריכות להיבחר לאור מה שעשוי לבוא בהמשך. בקטע הקודם, תיארנו גישה זו עבור בעיות חיבור וחיסור.

דוגמה נוספת היא הפעילויות המקדימות באלגברה. ברצף ההוראה ממנו נלקחה בעיית המסעדה המקסיקנית (**איור 2**), הקונטקסט של המסעדה מציע הזדמנות טבעית להציג את הפנקס של המלצר כדרך לרשום הן את ההזמנות הממשיות שבבעיה והן את ההזמנות המדומות. הוספת הזמנות חדשות לפנקס מכינה את התלמידים לפרוצדורה של טרנספורמציה של סדרה נתונה של משוואות. למעשה, הפרוצדורה דומה למדי לתהליך של הוספת הזמנות, אבל עדיין שואבת את המשמעות שלה מהקונטקסט של המסעדה. מתוך פעילות בסיטואציה קונקרטית כזו, תלמידים עשויים לפתח כללים פורמאליים יותר לפעולות עם משוואות לינאריות.

במשך הזמן, מתמטיזציה מתקדמת תעלה את החשיבה של התלמידים לרמה גבוהה יותר. במקרים רבים, רצוי שתהיה מידה מסוימת של שגרה, ובכך מציעה סטנדרטיזציה מסוימת של פרוצדורות.

בנקודה זו, מתכנני רצף של הוראה צריכים לקבל החלטות. בשיטה הנוכחית להוראת מתמטיקה, לפתרון מערכת של משוואות, מלמדים לעיתים את התלמידים כללים קפדניים מאוד המפרטים מתי לעשות חילוץ או החלפה וגם כיצד לעשות זאת. לעומת זאת, אפשרות אחרת היא להשאיר את פרוצדורת הפתרון פתוחה, ולאפשר לפרוצדורות לתפקד כהיוריסטיקות במקום כאלגוריתמים קבועים. ביחס לאלגברה, גישה זו, לדעתנו, מומלצת יותר משום שהשימוש הגמיש של פרוצדורות כמו חילוץ והחלפה יוביל לעיתים קרובות לפתרונות פשוטים יותר. במקום פרוצדורה אלגוריתמית קבועה, אנו מעדיפים גישה גמישה שבה פרוצדורות נעשות סטנדרטיות במידה מסוימת ואז מתפקדות כאלגוריתמים חלקיים לא-פורמאליים.

דוגמה לבחירה דומה ביחס למטרות למידה ניתן למצוא באלגוריתם של הכפל. גישה אפשרית היא לפתח פרוצדורות לכפל של מספרים שלמים המשתמשות בטבלת יחס (ratio table) (Van Galen & van den Heuvel-Panhuizen, 1997). מאפיין יפה של טבלת יחס הוא הגמישות שלה, אשר משאיר מקום למגוון של שיטות פתרון. למשל, ניתן לחשב את המכפלה של 23×18 בעזרת טבלת יחס בדרכים שונות (ראה **איור 8**).

ניתן לעצור כאן ולהסכים עם כך שתלמידים משתמשים בדרכים שונות כדי לפתור בעיות כפל. אך, אם רוצים, ניתן לפתח פרוצדורה סטנדרטית, המבוססת על המאפיינים של השיטה העשורית ודומה לאלגוריתם המקובל (ראה **איור 9**).

איור 8: דרכים שונות לחישוב 23×18 בעזרת טבלת יחס

1	2	4	8	16	18
23	46	92	184	368	414

1	2	20	18
23	46	460	414

1	10	8	18
34	340	184	414

איור 9: טבלת יחס ואלגוריתם סטנדרטי

152×242

1	2	50	100	152
242	484	12100	24200	36784

$$\begin{array}{r} 242 \\ \underline{152} \times \\ 484 \\ 12100 \\ \underline{24200} \\ 36784 \end{array}$$

סיכום

פיתוח אלגוריתמים הוא מרכיב חיוני של המתמטיקה. בהיסטוריה של המתמטיקה, שיטות לפתרון בעיות יישומיות התפתחו לפרוצדורות קבועות, יעילות. קיים פיתוי ללמד את התלמידים את תוצרי עבודתם של המתמטיקאים בעבר בצורה מוכנה, במיוחד אם המטרה היא להשיג, פחות או יותר, שגרה של שליטה בפרוצדורות מתמטיות. ואכן, בתחומים רבים של המתמטיקה מידה מסוימת של שגרה עדיין רצויה, למרות שכיום אנו יכולים להשאיר חלק גדול מן העבודה למחשבונים, מחשבונים גרפיים, ומערכות אלגברה ממחושבות. אולם, הוראת תלמידים אלגוריתמים שהם אינם מבינים, היא במקרה הטוב בעלת פוטנציאל מוגבל, ומה שיותר חשוב, מובילה למיומנויות מבודדות שאינן תורמות לידע המתמטי הכללי של התלמידים. אחת התגובות להערה זו היא לבטל לגמרי עובדות ואלגוריתמים כמטרות בחינוך מתמטי. לעומת זאת, בפרק זה, אנו מציעים גישה אלטרנטיבית המשלבת לימוד של עובדות ואלגוריתמים בתוך הליבה של החינוך המתמטי. רצפי הוראה בהם תלמידים יפעלו כמו מתמטיקאים בעבר וימציאו מחדש פרוצדורות ואלגוריתמים, יתרמו להתפתחות ההבנה המתמטית שלהם.

גישה זו של מודליזציה - המצאה מחדש תוכננה ועובדה עבור נושאים רבים בתוכנית הלימודים במתמטיקה לכיתות גן - י״ב (בין היתר, בתוכנית הלימודים למתמטיקה בתוך קונטקסט של ה- National Center for Research in Mathematical Sciences Education & Freudenthal Institute, 1998). המודלים שהם חלק מתוכניות אלה (למשל, טבלת היחס) יכולים לתפקד כבסיס לאלגוריתמים חלקיים לא-פורמאליים. אנו מאמינים שאפשרות זו פירושה שתלמידים אינם צריכים בהכרח להגיע לרמת התיחכום הגבוהה ביותר. למעשה, אנו צריכים להקדיש מחשבה זהירה לרמת האוטומטיזציה אליה אנו חותרים. למרות שלעיתים נדרשת רמה גבוהה של אוטומטיזציה, כמו ביחסים מספריים או עובדות היסוד עד 20, קיימת גם סכנה שבאוטומטיזציה רבה מדי, יהיה יישום עיוור של כללים ואלגוריתמים. בהקשר לכך, ניתן לטעון על אלגוריתמים חלקיים לא-פורמליים ועל הצורך להשאיר את מקורות התובנה פתוחים (Freudenthal, 1973), כדי שתלמידים יוכלו תמיד, בעת הצורך, לחזור אחורה לרמה קונקרטית יותר (Pirie & Kieren, 1994).

ברצוננו להדגיש את החשיבות בשינוי נקודת המבט. התכלית של גישת ההמצאה מחדש היא לעזור לתלמידים לייצר ידע משמעותי ושימושי ברמה שלהם ובקצב שלהם. מטרה זו פירושה שעל התלמידים לפתח עמדה שבה המטרה הראשונה היא הבנה ותפיסה של הבעיה, במקום להסתכל על בעיות כמקרים של יישום ערכת כלים מתמטית כלשהי. במסגרת מגמה זו, העובדות והאלגוריתמים של המתמטיקה אינם נקודת הפרידה; במקום זאת, תלמידים מקבלים הזדמנות לפתח בעצמם את הידע המתמטי שלהם.

ביבליוגרפיה

Bell A., Fischbein E. & Greer, B. (1984). Choice of operation in verbal arithmetic problems: The effects of number size, problem structure and context. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 129-148.

Bednarz N., Dufour-Janvier, B., Poirier, L. & Bacon, L. (1993). Socio-constructivist viewpoint on the use of symbolism in mathematics education. *Alberta Journal of Educational Research*, 39, 41-58.

Cobb, P., Yackel, E. & Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education,* 23, 2-33.

DiSessa, A.A., Hammer, D., Sherin, B. & Kolpakowski, T. (1991). Inventing graphing: Meta-representational expertise in children. *Journal of Mathematical Behavior*, 10, 117-160.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics*, 3, 413-435.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Gravemeijer, K. (1998). Developmental research as a research method. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (ICMI Study Publication 2, pp. 277-296). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J. & Whitenack, J. (2000). Symbolizing, modeling, and instructional design. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain (Eds.), *Communicating and symbolizing in mathematics: Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp 225-273). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Greeno, J.G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 170-218.

Hart, K.M. (1981). *Children's understanding of mathematics*: 11-16. London: Murray.

Kamii, C., Lewis, B.A. & Livingstone Jones, S. (1993). Primary arithmetic: Children inventing their own procedures. *Arithmetic Teacher*, 41(4), 200-203.

Kindt, M., & Abels, M. (1998). Comparing quantities. In: National Center for Research in Mathematical Sciences Education & Freudenthal Institute (Eds.), *Mathematics in context: A connected curriculum for grades 5-8* (pp. 50-77). Chicago: Encyclopedia Britannica Educational Corporation.

Labinowitz, E. (1985*). Learning from children*. Amsterdam; Addison-Wesley.

McClain, K. (1995). *An analysis of the teacher's proactive role in supporting students' mathematical development*. Unpublished doctoral dissertation, Vanderbilt University, Nashville, TN.

McClain, K., Cobb, P., Gravemeijer, K. & Estes, B. (1999). Developing mathematical reasoning within the context of measurement. In L. Stiff (Ed.), *Developing mathematical reasoning, K-12* (1999 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, pp. 93-106). Reston, VA: NCTM.

National Center for Research in Mathematical Sciences Education & Freudenthal institute (Eds.) (1998). *Mathematics in context: A connected curriculum for trade 5-8*. Chicago: Encyclopedia Britannica Educational Corporation.

Pirie, S. & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterize it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, 26, 165-190.

Polya, G. (1963). *Mathematical methods in science* (Studies in Mathematics, Vol. 11). Standord, CA: School Mathematics Study Group.

Resnick, L.B. & Omanson, S.F. (1987). Learning to understand arithmetic. In R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology* (Vol. 3, pp. 41-96). London , Erlbaum.

Schoenfeld, A.H. (Ed.). (1987). *Cognitive science and mathematics education*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Sfard, A. (1998). On two metaphors for learning and the dangers of choosing just one. *Educational Researcher*, 27, 4-13.

Skemp, R.R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.

Stephan, M., Cobb, P., Gravemeijer, K. & McClain, K. (1998, April). *Supporting student's learning in social context*. Paper presented at the meeting of the American Educational Research Association, San Diego.

Treffers, A. (1987), *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics education*: *The Wiskobas Project*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Treffers, A. & de Moor, E. (1990). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs*, deel 2 (Proof in the national program for school arithmetic, level 2). Tilburg, The Netherlands: Zwijsen.

Van Galen, F. & van den Heuvel-Panhuizen, M. (1997). Number tools. In: National Center for Research in Mathematical Sciences Education & Freudenthal Institute (Eds.), *Mathematics in context: A connected curriculum for grades 5-8* (Vol. 1, pp. 28-55). Chicago: Encyclopedia Britannica Educational Corporation.

Van Hiele, P.M. (1973). *Begrip en inzicht* (Understanding and insight). Purmerend, The Netherlands: Muusses.

Van Parreren, C.F. (1981). *Onderwijsproceskunde* (Educational process theory). Groningen, The Netherlands: Woltrers-Noordhoff.

Whitney, H. (1985). Mathematical reasoning: Early grades. Unpublished paper, Princeton, NJ.