חילוק שברים:

פשרה בין אסטרטגיות מומצאות לבין תשובות אלגוריתמיות

Dividing Fractions:

Reconciling Self-Generated Solutions with Algorithmic Answers

מאת: Marcela D. Perlwitz

הופיע ב:

Mathematics Teaching in the Middle School, Vol. 10 No. 6, Feb. 2005, pp. 278-283

תרגום: ברכה סגליס

במאמר זה אדון במספר מקרים מייצגים אשר התרחשו באחת מכיתות המתמטיקה בהן לימדתי מושגי חשבון בסיסיים. הנושאים המרכזיים כללו את מושגי המספר וערך המקום, מספרים שלמים ופעולות, שברים ופעולות ויסודות של תורת המספרים. גישת ההוראה שלי התמקדה בחקירות של התלמידים, הדגשת הפירושים העצמיים שלהם, וההסברים וההצדקות שלהם לתשובותיהם.
כדי לקדם חקירה אצל התלמידים, משימות ההוראה היו פתוחות וניתנו לרוב בתוך קונטקסט של פתרון בעיות. תלמידים עבדו בשיתוף בקבוצות קטנות או בזוגות, והציגו את תשובותיהם או פתרונותיהם לכל הקבוצה. כמורה, פעלתי כגורם מקדם ומנחה עבור הפתרונות המומצאים של התלמידים ועבור חילופי הרעיונות והמשא ומתן לחיפוש משמעות. המקרים הנדונים כאן, נבחרו מתוך סדרת שיעורים בנושא חילוק שברים.

אמונות וציפיות של תלמידים

תלמידי הביאו עימם לכיתה אמונות שהיו עקביות עם ניסיונם בעבר (Frank 1990) שבו לימוד מתמטיקה אופיין על ידי מציאה מהירה של "תשובות". כתוצאה מכך, הם חשבו שהתפקיד שלי כמורה הוא להעביר להם פרוצדורות, והתפקיד שלהם הוא להציב את האלגוריתמים או הכללים הנחוצים. כמו כן הם האמינו שיש רק דרך אחת לפתור בעיה. לפיכך, מה שתלמידי חשבו שהמורה מצפה מהתלמיד כעדות על הידע או ההבנה שלו, היה בסתירה לדגש שלי על פתרונות שהתלמידים ממציאים. יתרה מזאת, מאחר שהם נדרשו עכשיו לחשוב בעצמם, התברר שאין להם כמעט אמון ביכולתם לפתור בעיות ובהתחלה הם התנגדו לגישת ההוראה שלי. ההבנה המוגבלת של התלמידים בנושא שברים הגבירה את חוסר הביטחון שלהם.

חילוק שברים בהקשר של מדידת אורך

כדי לערוך לתלמידים היכרות עם פתרון בעיות העוסקות בחילוק שברים, הצגתי את המשימה הבאה. ציפיתי שהם יפתרו אותה תוך שימוש באסטרטגיות מומצאות.

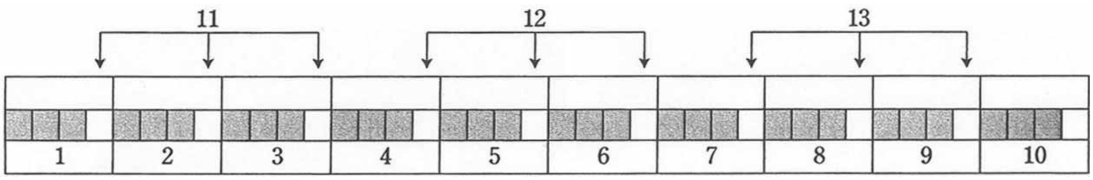
בכיתת התפירה של גב' סמית, התלמידים תופרים ציפיות לכריות עבור תצוגת הבית הפתוח. גב' סמית קנתה לכיתתה 10 יארד של בד עבור הפרויקט. עבור כל ציפית נדרש 3/4 יארד של בד. כמה ציפיות לכריות ניתן לגזור מבד זה?

תלמידים עבדו בזוגות כדי למצוא פתרונות לבעיה זו. לאחר זמן קצר, תלמידים אחדים ציינו שזוהי בעיה של חילוק ושאם ישתמשו בכלל של כפל בהופכי הם יקבלו את התשובה הנכונה. אבל, לאור הידיעה שמצפים מהם להסביר את התשובה שלהם, התלמידים לא יכלו פשוט להשתמש בכלל של כפל בהופכי מבלי שיסבירו ויצדיקו כיצד זה עובד. מאחר שאף תלמיד לא ידע את הבסיס לאלגוריתם זה, הם חיפשו דרכי פיתרון משלהם למציאת התשובה, כשרבים מהם משתמשים באלגוריתם כדי לבדוק את התשובה.

בעשותם זאת, הם נתקלו בחוסר התאמה בין התשובה שהתקבלה מהאלגוריתם הסטנדרטי, לבין זו שנבעה משימוש בשיטות משלהם. בעת שניסו להגיע לפשרה בין התשובות, תלמידים אחדים היו צריכים להתעמת עם חוסר ההבנה שלהם מהתשובה שקיבלו כאשר השתמשו באלגוריתם הסטנדרטי. הנה כמה מהפתרונות של התלמידים:

קריסטין: קודם ציירתי 10 חתיכות של בד באורך 1 יארד. אחרי זה הוצאתי 3/4 מכל חתיכה ונשארה חתיכת בד של 1/4 בכל חלק של 1 יארד (ראה **איור 1**). אחרי זה חיברתי את כל החתיכות של 1/4 כדי לראות כמה קבוצות של 3/4 אני יכולה לקבל. התשובה הסופית היא 13 ציפיות לכריות עם שארית של 1/4 חתיכה [הפסקה], או מה שחשבתי שהוא 13 1/4. כאשר הלכתי לבדוק את זה בשיטה הישנה של כפל בהופכי, התשובה היתה 13 1/3 [נראית נבוכה] אני לא מצליחה להבין למה.

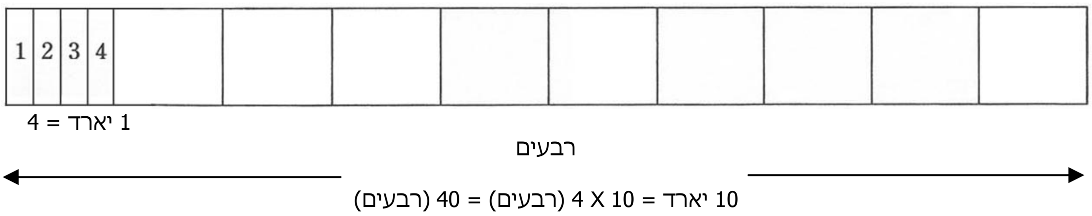
איור 1: ההדגמה של קריסטין



לאחר מכן קראתי לדוד. הוא צייר מלבן ארוך עם עשרה חלקים שווים כדי לייצג את ה- 10 יארד ובהמשך עשה חלוקת משנה, בחלק הראשון של המלבן, לארבעה מלבנים שווים (ראה **איור 2**).

דוד: אני יודע שיש לנו 4 רבעים בכל יארד. 40 = 4 X 10. ב- 10 יארד יש לנו 40 רבעים. עבור כל ציפית נדרש 3/4. שלוש עשרה פעמים 3 הם 39, אז אני יכול לעשות 13 קבוצות של 3 [רבעים]. נשאר לי 1/4 אחד של יארד. התשובה היא 13 1/4. אבל זה לא נכון. אם עושים 4/3 X 10 מקבלים 13 1/3. איך זה יכול להיות?

איור 2: ההדגמה של דוד



דוד וקריסטין הטילו ספק בפתרונות שהמציאו משום שהם נתנו אמון באלגוריתם. המיקוד שלהם בתשובה הנכונה האפיל על הפעילות העצמית שלהם, והם לא היו מסוגלים להבחין שהמספרים 13 ו- 1/4 התייחסו ליחידות בעלי אופי שונה. כתוצאה מכך, הם פשוט שמו את שתי היחידות זו בצד זו, ללא התחשבות בעובדה ש- 13 ציין את מספר הגזירות בגודל 3/4 יארד (או אורך הציפיות) מתוך 10 יארד, ואילו המספר 1/4 ציין את הבד שנותר באורך 1/4 יארד. הסבר זה היה הוכחה נוספת לכך שהתלמידים לא ידעו מה המשמעות של המספרים בתשובה שהם קיבלו באמצעות האלגוריתם.
ה- 13 1/3 שבאלגוריתם פרושו 13 1/3 ציפיות לכריות, או 13 אורכים שלמים של 3/4 יארד ועוד 1/3 של אורך נוסף (או 1/3 אורך של ציפית לכרית). תלמידים אחדים מחו ואמרו שהאחריות שלי כמורה שלהם היא להסביר את השוני שהתגלה. לאחר מכן, בטסי הצביעה כדי להציע את הפיתרון שלה.

בטסי: מה שעשיתי הוא לצייר 10 ריבועים זה ליד זה. אחרי זה חילקתי אותם לארבעה חלקים כל אחד (ראה **איור 3**) וספרתי כך: 3/4 לציפית אחת, 3/4 לציפית נוספת, 3/4 לעוד ציפית, זה 9/4.
[בזמן שדיברה, בטסי רשמה את את המספרים שלה בשני טורים וסימנה בציור בהתאמה, כפי שניתן לראות ב**איור 3**.]

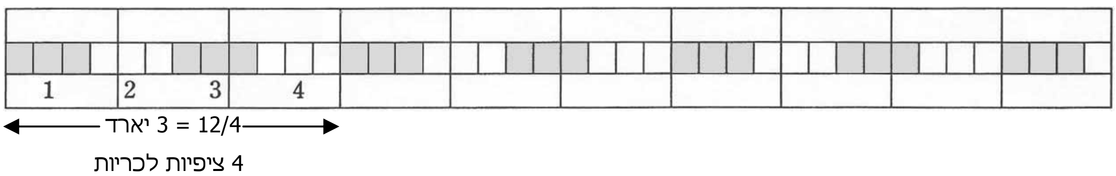
3/4 יארד	1 ציפית
6/4 יארד	2 ציפיות
9/4 יארד	3 ציפיות
12/4 = 3 יארד	4 ציפיות

כאשר ראיתי ש- 12/4 עושים 4 ציפיות והשתמשתי ב- 3 יארד, עשיתי חישוב שעם 6 יארד אני יכולה לעשות 8 ציפיות, עם 9 יארד אני יכולה לעשות 12 ציפיות. מהיארד האחרון, אני יכולה לקחת 3/4 ולעשות עוד ציפית ויישאר לי 1/4 יארד של בד [והיא המשיכה לרשום]

6 יארד	8 ציפית
9 יארד	12 ציפיות
9 3/4 יארד	13 ציפיות
1/4 יארד נשאר	

אני יכולה לעשות 13 ציפיות ונשאר 1/4 יארד. התשובה היא 13 ציפיות והבעיה פתורה.

איור 3: ההדגמה של בטסי



הפתרון של בטסי כלל חשיבה פרופורציונאלית, כפי שבאה לידי ביטוי בספירה הכפולה שלה של אורכי יארד ושל ציפיות לכריות, אשר היא תיעדה זה לצד זה בשני טורים. בטסי הראתה יכולת טובה יותר של הגדרת היחידה (unitize), משום שהיא היתה מסוגלת לקחת 3/4 כיחידת המדידה שלה עבור אורך הבד.

תלמידים אחדים הביעו בקול את אי הנחת שלהם מהתשובה של בטסי. אן דיברה כמעט במחאה.

אן: קיבלת רק 13? התשובה היא 13 1/3 משום שהנוסחה נכונה!

בטסי: השאלה היא "כמה ציפיות של 3/4 יארד אפשר לעשות?" ואפשר לעשות 13 ציפיות. אי אפשר לעשות ציפית נוספת רק מ- 1/4 יארד של בד. התשובה היא 13, הבעיה נפתרה!

שני תלמידים הנהנו בהסכמה, בעוד אחרים התעקשו על התשובה של 13 1/3. בנקודה זו הזכרתי לכיתה שהיו כעת שלוש תשובות לחשוב עליהן : 13, 13 1/3 ו- 13 1/4. תלמידים אחדים הצהירו פה אחד "הכפל בהופכי הוא התשובה הנכונה."

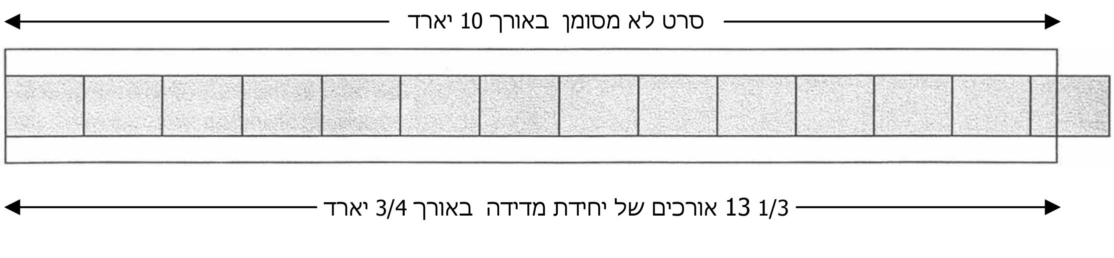
בטסי: אני יודעת איך לגזור בד. הבעיה נפתרה. השאלה היתה "כמה ציפיות אפשר לעשות?" מדוע אנחנו מתווכחים על החתיכה שנשארה? או שיש לך מספיק לעשות ציפית בשימוש של 3/4 יארד או שאין לך. רק בביה"ס צריך לתת תשובות עם מספרים מעורבים. במציאות זה לא תמיד הגיוני.

ההערה של בטסי לוותה בשתיקה. ואז אן התנדבה.

אן: לבטסי יש נקודה חשובה, אבל בכל זאת הייתי רוצה לדעת מדוע מקבלים שתי תשובות שונות, 13 1/4 נראה נכון, ספרתי כמה פעמים וקיבלתי אותו דבר, 13 1/4.

הטיעונים של בטסי ושל אן מעלים שתי סוגיות פדגוגיות חשובות וקשורות. מצד אחד, הצגת בעיות בתוך קונטקסט מסייע ללומד לחפש פתרונות בעלי משמעות, על פי תנאי המשימה. הפיתרון של בטסי מדגים יכולת זו, מאחר שתשובתה היא ההגיונית ביותר בקונטקסט הנתון. מצד שני, אנו רוצים שהתלמידים יתקדמו מעבר לקונטקסט ויהיו מסוגלים להכליל ולעבוד עם מספרים ביעילות. על פי השיקול האחרון גם הטיעון של אן לגיטימי. אכן, אם עלינו לדווח על המדידה של 10 יארד של בד תוך שימוש ביחידת מדידה באורך 3/4 יארד, התשובה תהיה 13 1/3 אורכים של יחידת המדידה. זה קורה משום שהחתיכה באורך 1/4 יארד תחושב במדידה כשבר 1/3 של יחידת המדידה באורך 3/4 יארד (ראה **איור 4**). בכל אופן, כמורה, רציתי שהתלמידים יפתרו לבד את הקונפליקט הקוגניטיבי שלהם.

איור 4: עשרה יארד של בד הנמדדים בעזרת יחידת מדידה באורך 3/4 יארד



מורה: או.קי. אני רוצה שתחשבו על כמה דברים. ראשית, מה שואלים בבעיה. שנית, חישבו מה מייצגים ה- 13 וה- 1/4 בפיתרון שלכם. מדוע שלא תעשו את המדידה בפגישה הבאה שלנו?

בשיעור הבא, לפני שהתחלנו למדוד, קריסטין פתחה את הדיון ושיתפה אותנו בחשיבה שלה. היא תיעדה את הפיתרון שלה במחברת הכיתה והתייחסה אליו בשעה שדיברה אל הכיתה.

קריסטין: לקח לי זמן להבין שאנחנו לא משתמשים ביחידת מדידה של יארד אחד כמכשיר המדידה שלנו. אנחנו הסתכלנו על 3/4 יארד כדי לראות כמה ציפיות לכריות באורך כזה יתקבלו מ-10 יארד. כשהסתכלתי על 1/4 בצורה כזו, זה באמת יהיה 1/3 האורך של ציפית לכרית. אני חושבת ש- 1/4 הוא 1/3 ביחס ל- 3/4.

תלמידים אחדים היו נבוכים בעקבות ההסבר של קריסטין. התגובה של פאולה ייצגה את המחשבות שלהם.

פאולה: אני לא מבינה איך 1/4 יכול להיות 1/3. מה היא אומרת?

פאולה, כנראה, לא היתה מסוגלת לעקוב אחר ההסבר של קריסטין. היא עדיין התקשתה להבין ש- 1/4 ו- 1/3 היו שברים בעלי יחידות שונות ומסגרת התייחסות אחרת. פאולה ותלמידים אחרים בכיתה לא הבינו ש- 1/4 יארד הוא 1/3 של 3/4 יארד. הם לא היו מסוגלים לשלב את היחידות השונות הקשורות למשימה. בנקודה זו, במקום לבקש מקריסטין להדגים זאת, ביקשתי מהתלמידים לעסוק בתהליך המדידה. נתתי לכל קבוצה קטנה סרט לבן לא מסומן באורך 10 יארד וסרט צבעוני לא מסומן באורך 3/4 יארד. המשימה היתה למדוד ולעקוב אחר תהליך המדידה כדי שיוכלו להסביר את התוצאה שלהם. אחרי שעבדו בקבוצה הקטנה, התלמידים דווחו לכיתה כולה. כדי להקל על ההדגמות שלהם, הדבקתי על הלוח את אחד הסרטים באורך 10 יארד, והתלמידים באו אל הלוח כדי להראות איך הם ביצעו את המדידה שלהם. הדיון כלל את חילופי הדברים הבאים:

פאולה: שמנו את החתיכה באורך 3/4 יארד על החתיכה באורך 10 יארד פעם אחרי פעם. עשינו סימן בכל מקום בו נגמרה החתיכה של 3/4 וכך הלאה. ספרנו 13 פעמים ונשארה לנו חתיכה.

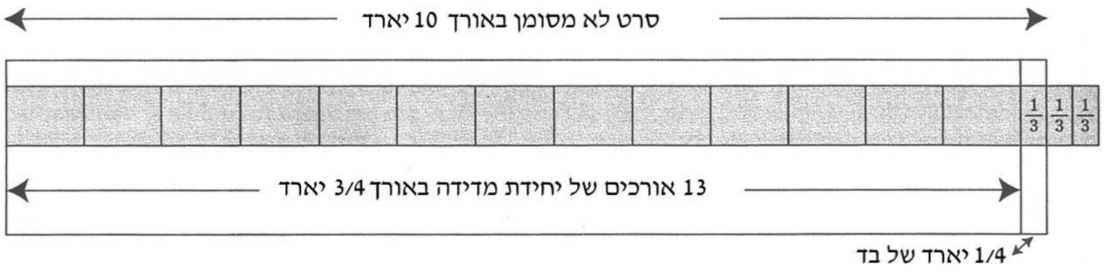
מורה: כיצד תדווחו על תוצאת המדידה שלכם?

פאולה: אן ואני דיברנו על זה ואנחנו לא בטוחות. נשאר 1/4 יארד של בד, אבל אנחנו עדיין לא יודעות בקשר ל- 1/3.

בטסי: עשינו אותו דבר, אבל קיפלנו את החלק הקצר של החתיכה [של סרט יחידת המדידה] במקום שבו נגמר לנו הבד, וזה 1/3 של יחידת המדידה [ראה **איור 5**].

קתי: סימנו כמה פעמים השארית נכנסה ביחידת המדידה. זה היה שלוש פעמים, אז משם מגיע ה- 1/3!

איור 5: בטסי וקתי מדגימות את הפיתרון שלהן על סרט באורך 10 יארד על הלוח



תלמידים אחרים הראו גם הם את ההבנה שלהם ש- 1/4 יארד של הבד הוא 1/3 מחתיכה של 3/4 יארד (או 1/3 האורך של ציפית לכרית), אבל תלמידים אחדים עדיין לא היו מסוגלים לראות את הקשר. עם זאת, אם לוקחים בחשבון את ההתנסויות שלהם בעבר בלימוד שברים ואת העובדה שזה היה השיעור השני בנושא חילוק שברים, הרי שההתקדמות של התלמידים בהבנת המשמעות של חילוק בשבר ראויה לציון.

דיון

כדאי לציין שהתלמידים לא פירשו בתחילה את בעיית הציפיות לכריות כבעיית חילוק. דוד היה הראשון להציע זאת, ואז פירוש זה התקבל על ידי הרוב. מאחר שאירוע זה התרחש ברבע האחרון של הסמסטר, תלמידי ידעו כבר שמציאת תשובה מספרית בלבד לא היתה מתקבלת. בכל זאת, כמה מהם לא סמכו על עצמם למצוא שיטות פיתרון משלהם והשתמשו רק באלגוריתם הסטנדרטי. בשעה שסבבתי בין הקבוצות הקטנות, חזרנו ודנו בציפייה שלי שהם ימצאו פתרונות משלהם ושאם הם רוצים להשתמש באלגוריתם, הם צריכים להיות מסוגלים להסביר כיצד הוא עובד. הזכרתי להם כמה רחוק הם הגיעו בהבנה שלהם על מספרים ועל היכולת שלהם לפתור בעיות, אז מדוע הם חוזרים להשתמש בכללים שהם לא מבינים?
לאחר שזה נאמר, הם התחילו לייצר שיטות פתרון משלהם והשתמשו באלגוריתם הסטנדרטי כדי לבדוק את התשובות שלהם. בזמן שבדקו, הם מצאו אי התאמה בין התשובה שלהם לבין התשובה המבוססת על האלגוריתם, והתגובה הראשונה שלהם היתה ספק עצמי. כפי שהראינו קודם, בשל חוסר ההבנה שלהם את התשובה של האלגוריתם הסטנדרטי, הם לא היו מסוגלים ליישב את אי ההתאמה וקראו לי לעשות זאת. במקום זאת, הפכתי את הקונפליקט שלהם למוקד הפעילות המתמטית. כדי לתמוך בפיתרון העצמי שלהם, נתתי להם לעסוק במדידה ממש. כאשר הם מדדו במסגרת הקבוצה, הם התחילו להתמקד על הקשר בין 1/4 היארד שנשאר וה- 1/3 בתשובה שהתבססה על האלגוריתם. הם לימדו זה את זה שמכיוון שיחידת המדידה היתה באורך 3/4 יארד, אז ה-1/4 יארד של בד שנשאר היה 1/3 של יחידת המדידה באורך 3/4 יארד. החלפת רעיונות ביניהם ותמיכה זה בלמידה של זה קידמה את היכולת של התלמידים ליישב את אי ההתאמה בין הפתרונות שהמציאו לבין התשובה שהתבססה על האלגוריתם. תלמידים אחדים נזקקו להתנסות נוספת במדידה ולתמיכה מחבריהם כדי ליחס את השבר של הבד שנשאר לשבר התואם של אורך יחידת המדידה.
בתום סדרת השיעורים בנושא שברים, התלמידים למדו את משמעות התשובה שקיבלו כאשר השתמשו בכלל של כפל בהופכי. עם זאת, לא כולם היו מסוגלים להסביר את הכלל. במקרה של חילוק מספר שלם בשבר, תלמידים שאימצו את שיטת הפתרון של דוד, היו מסוגלים להסביר כיצד

האלגוריתם הסטנדרטי עובד. עם זאת, קישור המדידות שלהם לאלגוריתם כשמחלקים שני שברים, התגלה כהרבה יותר קשה עבור התלמידים. למעשה, מעט מאוד תלמידים הגיעו לכך.

סיכום

למרות שהאירועים המתוארים כאן התרחשו בכיתת קולג', ההוראה והממצאים רלוונטיים להוראה בכיתות הביניים מאחר שהנושא של חילוק שברים נלמד בכיתות אלה. בנוסף, ההבנה המוגבלת של תלמידי בקולג' משקפת את המורכבות של מושגי השברים. מה שההתנסויות המתוארות כאן מלמדות אותנו, בסופו של דבר, הוא שאם לא נשים דגש רב יותר על ההבנה של תלמידים אודות מספרים ופעולות (NCTM 2000), אזי אנו עלולים להגביל במידה חמורה את סיכוייהם של תלמידינו ללמוד מתמטיקה עם הבנה. יתר על כן, לימוד לשם שליטה באלגוריתמים עלול להנציח את חוסר הביטחון של התלמידים ביכולת שלהם לחשוב ולנמק באופן מתמטי.

נראה היה שההתנסויות של תלמידי הובילו אותם להאמין שקבלת תשובות חשובה יותר מאשר החשיבה הכרוכה במציאת הפתרון. בתחילה, הם התנגדו מאוד לגישה שלי להוראה ולא רצו למצוא דרכי פיתרון משלהם. התעקשתי על החשיבות של מציאת ההיגיון האישי במתמטיקה והפגנתי כבוד כלפי החשיבה העצמית והמאמץ שלהם. תהליך זה של משא ומתן על הציפיות ההדדיות חזר ונשנה במהלך הסמסטר ונתן לי מידע על ההוראה שלי בשתי דרכים. ראשית, זה סיפק לי הזדמנות ללמוד אודות טיב ההבנה של תלמידי. שנית, הפכתי את ההבנה העכשווית של תלמידי להזדמנויות למידה בכך שהדרכתי אותם ליישב בעצמם את הקונפליקטים שלהם במקום להתערב ולתקן את התפיסות השגויות שלהם בעצמי. תפקיד הקונטקסט היה יקר לאין ערוך במאמצי התלמידים למצוא היגיון בתשובותיהם המספריות. משימת ההוראה שבחרתי להציג – חילוק של שברים – היה משובץ בתוך הקונטקסט של מדידת אורך, המתאים למשמעות של החילוק כחילוק להכלה (Measurement Division) אשר תלמידים לומדים במספרים שלמים (Lamon 1994). ההיכרות עם פירוש זה של החילוק והקונטקסט של מדידת בד, תמכו במאמצי התלמידים לפשר בין הפתרונות שהמציאו בעצמם לבין התשובה שקיבלו בשימוש באלגוריתם. בנוסף, הם הרוויחו ביטחון גובר ביכולתם להבין כיצד פיתרונות אלגוריתמיים מתקשרים לפתרונות שהם המציאו.

ביבליוגרפיה

Frank, Martha L. "What Myths about Mathematics Are Held and Conveyed by Teachers?" *Arithmetic Teacher* 37 (January 1990): 10-12.

Lamon, Susan J. "Ratio and Proportion: Cognitive Foundations In Unitizing and Norming." In *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics*, edited by Gershon Harel and Jery Confrey, pp. 89-120. Albany: N.Y.: State University of New York Press, 1994.

National Council Of Teachers Of Mathematics (NCTM). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: NCTM, 2000.