

הוראת הכפל לשם שליטה

Teaching For Mastery of Multiplication

מאת: Ann H. Wallace and Susan P. Gurganus

הופיע ב: Teaching Children Mathematics, Vol. 12 No. 1, Aug. 2005, pp. 26-33

תרגום: ברכה סגליס

כאשר נכנסים לכיתה ה' של גבי הנד, רואים תלמידים העובדים על חישובים של כפל במספרים רב-ספרתיים באמצעות האלגוריתם של הכפל הארוך. תלמידים אחדים הדביקו על שולחנם את לוח הכפל והם מתבוננים בו עבור כל אחת מעובדות הכפל - אפילו עבור העובדות של כפולות האפס וכפולות האחד. בכיתתו של מר סמית הנמצאת ממול, תלמידים עובדים על אלגוריתמים מאותו הסוג, אבל ישנם תלמידים המונים דסקיות לתוך צלחות נייר. בהמשך המסדרון, בכיתתה של גבי ווילאמס, התלמידים המתקשים לבצע אותם אלגוריתמים מסמנים קווים ומונים אותם בקבוצות. בכל אחת מן הכיתות הללו יש תלמידים אחדים שלא שולטים בעובדות הכפל והם נאבקים עם מטלות המבוססות על הבנה ועל רהיטות. לחלק מאותם תלמידים יש ליקויי למידה מובחנים הדורשים התאמת ההוראה. למרות שמושגי הכפל הוצגו להם בכיתה ב' והם נדרשו לשנן את עובדות הכפל בכיתה ג', תלמידים אלה עדיין תלויים בעזרים חיצוניים כדי לבצע חישובים. מדוע תלמידים אינם שולטים עדיין בעובדות הכפל בכיתות היסוד הגבוהות ואפילו בחטיבת הביניים? כיצד צריך להציג לתלמידים את עובדות הכפל? אילו אסטרטגיות יעילות ללימוד העובדות שהכי קשה לזכור?

מדוע צריך לשלוט בעובדות הכפל?

במסמך העקרונות והסטנדרטים של ה-NCTM ישנה הדגשה רבה על הצורך ברהיטות חישובית. הם מציינים ש- "פיתוח רהיטות, דורש איזון וקישור בין הבנה מושגית ובקיאות חישובית" (NCTM 2000, p. 35). שינון טכני של עובדות היסוד איננו רהיטות. רהיטות של עובדות הכפל כוללת את ההבנה העמוקה של מושגים ושימוש גמיש וזמין של כישורי חישוב במגוון רחב של יישומים. מדוע תלמידים צריכים ללמוד את עובדות הכפל? משום שתלמידים ללא ידע מבוסס של עובדות אלה, או יכולת לחשב אותם, נמצאים בנחיתות עמוקה בהמשך לימודי המתמטיקה שלהם. תלמידים ללא רהיטות של עובדות הכפל עסוקים זמן רב יותר במציאת תשובות שגרתיות ופחות זמן בעיסוק ביישומים בעלי משמעות רבה יותר. תלמידים שיודעים את עובדות הכפל מסתמכים על מושגים בסיסיים אלה, וכתוצאה מכך התפתחותם המתמטית בהמשך יוצאת נשכרת. במשך שנים, "ללמוד לחשב" - נתפס כמילוי הנחיות המורה ותרגול עד לשליפה מהירה. לאור המציאות החינוכית אין פלא שהדגש הוא על חישובי נייר ועיפרון. מורים מחויבים למבחנים סטנדרטיים שבהם הדגש העיקרי הוא יכולות החישוב של התלמידים. האווירה העכשווית של מתן חשיבות רבה למבחנים אלה, עלולה לאלץ מורים לפרק את המתמטיקה למיומנויות מבודדות. אבל, אם מלמדים מיומנויות כמו עובדות הכפל להבנה מושגית תחילה, ומקשרים אותם למושגים מתמטיים נוספים ולמשמעויות בחיי היומיום, אז למעשה תלמידים מצליחים יותר במבחנים הסטנדרטיים וגם ביישומים מתמטיים

מורכבים יותר (Campbell and Robles 1997). לבסוף, הוראת עובדות הכפל ביעילות מקדמת גם הבנה מושגית עמוקה יותר. לדוגמה, תלמידים הלומדים עובדות מבודדות, עלולים לא להבין שלכפל יש משמעות כפלית, וחוסר ידע זה מגביל את יכולתם לפתור בעיות מילוליות¹. אתגר מושגי חשוב בעת לימוד הכפל הוא עזרה לתלמידים להבין שלכפל יש מספר משמעויות והוא איננו רק רצף של עובדות מבודדות. חשוב במיוחד לתת לתלמידים להתנסות עם המשמעויות השונות של הכפל, במצבים של קונטקסט (סיפורים חשבוניים ובעיות מילוליות). בסעיפים הבאים נדון בסוגים שונים של בעיות כפל.

חיבור חוזר (הקבצה וחלוקה)

מספר מוגדר של פריטים מסודר באופן חוזר (מקובץ) מספר פעמים מסוים (איור 1). הקבוצות קיימות בו-זמנית, כלומר אף פריט לא נמצא ביותר מקבוצה אחת. אחד הגורמים מתאר את מספר הפריטים בכל קבוצה, הגורם השני מתאר את מספר הקבוצות. המכפלה היא מספר הפריטים הכלולים בכל הקבוצות. (אם סידור הפריטים הוא בטורים ושורות, מכנים זאת בשם **מערך**).



סקאלר (Scalar)²

כמות מסוימת (גודל ספציפי או מספר פריטים) מופיעה מספר נתון של פעמים (הכופל הסקלארי, ראה איור 2). המכפלה היא כפולה של הכמות המקורית. הכופל הסקלארי מבטא קשר בין הכמות המקורית והמכפלה, אבל הכופל הסקלארי איננו כמות מוחשית.



¹ הערות המתרגמת:

המאמר "קשיים בהבנת המבנה הכפלי" דן בנושא זה בהרחבה.

² הכוונה לבעיות פי

קצב (Rate)

ערך או מרחק מקושרים ליחידה (ראה איור 3). המכפלה היא סכום הערכים או המרחק הקשורים לכל היחידות. מכיוון שבעיה כזו עוסקת במספר יחידות נמדדות, ניתן לייצג אותה באמצעות ישר המספרים.



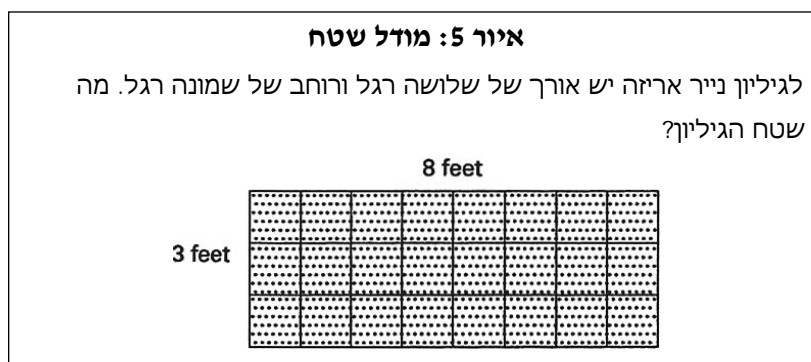
מכפלה קרטזית

קיימות שתי קבוצות זרות והגודל של כל קבוצה ידוע (ראו איור 4). כל אחד מהפריטים בקבוצה האחת מזווג לכל אחד מהפריטים בקבוצה השנייה. הזוגות אינם מופיעים בו-זמנית. המכפלה מציינת את מספר הזוגות האפשריים. איור 4 מראה זיווגים של מנות עיקריות (M) עם מנות משניות (S).



שטח

אזור מלבני מוגדר במונחים של יחידות לאורך ולרוחב (ראה איור 5). המכפלה היא מספר היחידות הרבועיות שבאזור כולו.



מדוע ישנם תלמידים הנכשלים בלימוד העובדות?

הבנת הרקע והאופי של קשיי התלמיד בלימוד עובדות הכפל יכולה לספק כיוונים לדרכי התערבות. תלמידים רבים לא נחשפו להוראה מעמיקה ולתוכנית לימודים המבוססת על סטנדרטים. תלמידים אלה למדו אולי אצל מורים שאינם מכירים את הסטנדרטים של ה-NCTM או שאינם מלמדים את הכפל בגישה של לימוד להבנה. תלמיד שלא חווה הוראה המבוססת על הסטנדרטים, יציג חוסר הבנה של מושגי היסוד ושל הקשרים ביניהם, חוסר גמישות בעבודה עם אלגוריתמים ובפתרון בעיות, ומעט או חוסר חשיפה לתחומי יישום קשורים כמו גיאומטריה ומדידות.

מורים רבים לחינוך מיוחד קיבלו בשלב הכשרתם להוראה, הכשרה מועטה ומצומצמת בהוראת מתמטיקה. מצב זה מתחיל להשתנות בעקבות חוק החינוך לטיפול בתלמידים עם לקווי למידה (Individuals with Disabilities Education Act 1997). תלמידים שמשפחתם עברה דירה לעיתים קרובות, או שתפקיד ההורה המחנך התחלף אצלם, נמצאים גם כן בסיכון גבוה ליצירת פערים לימודיים הפוגעים בהבנה.

ל-5% עד 8% מהילדים יש קשיים מתמטיים ספציפיים (Fuchs & Fuchs 2003). סוג הקשיים שונה במידה רבה מילד לילד. כמה ממאפייני הלמידה היותר שכיחים, אשר משפיעים על רהיטות בכפל, כוללים שימוש באסטרטגיות ופרוצדורות פחות מפותחות, נטייה לבצע טעויות חישוב רבות ללא יכולת בקרה, וקושי רב יותר לשלוף מידע מהזיכרון, מאשר אצל התלמידים ללא קשיי למידה (Geary 2003). תלמידים שחסרות להם אסטרטגיות קוגניטיביות, עושים על מוריהם רושם של מי שמוותרים ולא משתדלים, עצלנים, או בעלי יכולת נמוכה יותר מיתר התלמידים.

לחלק מן התלמידים עם קשיי למידה במתמטיקה יש קושי בזיכרון או בשפה אשר משפיעים באופן ישיר על כישורים מתמטיים. שליפה מהירה של עובדות מתמטיות שנרכשו כבר, קשורה לזיכרון העבודה של התלמיד, ליכולת שליפה סמנטית, וליכולת לדכא מידע לא-רלבנטי (Geary 2003). מחקרים שבהם השתמשו בטכניקות של Constant Time Delay³, הראו שגם תלמידים עם קשיי למידה במתמטיקה יכולים לפתח רהיטות של העובדות ולשמר יכולת זו לאורך זמן (Koscinski and Hoy 1993). לתלמידים עם קשיים בשפה יכולות להיות גם כן בעיות במתמטיקה, במיוחד עם מונחים מתמטיים שיש להם משמעות נוספת מחוץ למתמטיקה, כמו: *difference, product, factor, set, multiple*.

(Rubenstein and Thompson 2002)⁴. תלמידים כאלה זקוקים להוראה של המונחים המתמטיים, בצורה יותר מפורשת, המקושרת יותר לחומרים מתמטיים ולדוגמאות. ילדים אחרים פיתחו אולי הרגלי למידה לא יעילים. תלמידים עם קשיי למידה ספציפיים נוטים להיות פסיביים, לא עוסקים בלמידה ועם מעט מאוד אסטרטגיות מטה-קוגניטיביות. לעיתים נדירות הם מציבים לעצמם מטרות למידה או עושים בקרה על עבודתם. אם לא ילמדו אותם באופן מפורש כיצד לעבוד עם חומרי למידה בעלי משמעות, כיצד לקשר בין מושגים מתמטיים, וכיצד ללמוד באופן יעיל את עובדות היסוד – תלמידים אלה יישארו תלויים בלוחות פעולה (כמו לוח הכפל) ובמחשבון במשך כל לימודיהם בחטיבה ובתיכון.

³ לפי הבנת, הכוונה לטכניקה בת שני שלבים. בשלב הראשון: מבריקים לתלמיד מספר פעמים את התרגיל ומיד לאחריו את התשובה. בשלב השני: מבריקים את התרגיל, ממתנינים פרק זמן קבוע, ואז מבריקים את התשובה, בהנחה שבמרווח הזמן הזה התלמיד ישלף את התשובה.

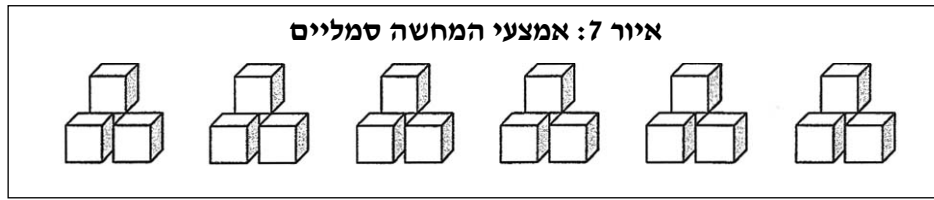
⁴ דוגמאות בעברית למונחים מתמטיים בעלי משמעות נוספת מחוץ למתמטיקה: אלכסון, שכית, גורם, יחס וכדו'.⁴

כיצד צריך ללמד את עובדות הכפל?

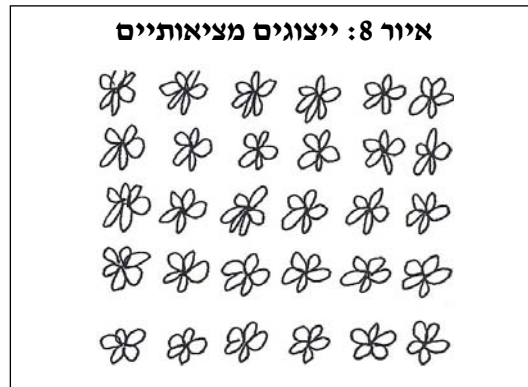
הוראת הכפל מתחילה לעיתים קרובות עם עובדות ה-0 וה-1, כנראה משום שהן הכי קלות ללמידה, ומסתיימות עם עובדות ה-9 משום שהן נחשבות לקשות ביותר. מורים תומכים במבנה זה משום שבספרי הלימוד זהו הרצף המקובל. במהלך השיעורים המורים מציגים לתלמידים את סולמות הכפל בין 0 ל-9 לפי הסדר, בכל שיעור כפולה אחת, ומצפים מהתלמידים לשנן את כל העובדות לפי הסולמות. בדיקה של ספרי לימוד לכיתה ג' הראתה שהגישה להוראת עובדות הכפל דומה בכל הספרים והשתנתה מעט מאוד במהלך השנים (Addison-Wesley 1973; Houghton Mifflin 2002). על פי רוב הם לומדים בפרק החמישי או השישי של ספר הלימוד, ורק אחרי לימוד הנושא של חיבור וחיסור במספרים רב-ספרתיים. כמו כן, ספרי הלימוד מלמדים את הכפל בנפרד, במקום לקשר אותו לחיבור או לפעולת החילוק ההפוכה לו. הסדר האופייני להצגת עובדות הכפל הוא המספרים 5 ומטה (בסדר כלשהו), ואחרי זה כפל של 6, 7, 8, ו-9 (על פי רוב בסדר זה). דפי התרגול של התלמיד מלאים בתרגילי חישוב מבודדים. רק אחרי ש"כיסו" את כל העובדות, ספרי הלימוד ממליצים למורים לשלב יישומים של כפל ופתרון בעיות. למרות ששיטת "ספר הלימוד" להוראת כפל עשויה לקדם מיומנות חישובית, היא חסרה את ההבנה המושגית הנחוצה כדי שתלמידים ירכשו רהיטות חישובית. ישנן עדויות ההולכות ומתרבות, הכוללות מחקר על תלמידים עם קשיי למידה מובהקים, המעידות שרצף ההוראה היעיל ביותר להוראת עובדות הכפל הוא כדלהלן:

- הצגת המושגים באמצעות סיטואציות בעיה וקישור מושגים חדשים לידע קודם.
 - מתן התנסויות קונקרטיות וייצוגים חזי קונקרטיים לפני שעוברים רק לסימון הפורמלי.
 - הוראה מפורשת של הכללים.
 - מתן תרגול מעורב (Fuson 2003; Mercer and Miller 1992b).
- המורה מתבקש להתחיל את הוראת הכפל על ידי הצגה של בעיה מציאותית העוסקת בחיבור חוזר, כמו חיבור מחירי הצבעים בחנות של בית הספר. השיעורים הראשונים צריכים להיות מלאים במגוון של חומרי המחשה שהתלמיד יכול לתפעל. אפשר לבקש מהתלמיד להעביר ארבעה צבעים לכל אחד מחמשת חברי קבוצתו (ראו **איור 6**). כמה צבעים נדרשים? שימוש בצבעים כאמצעי המחשה, מאפשר לתלמיד לספור אותם בקבוצות של ארבעה, או למנות אותם אחד-אחד, אם נחוץ. על סמך הבנתם בעיה כזו, התלמידים לומדים להחליף את העצמים המציאותיים בעצמים סמליים, כמו קוביות. לדוגמה, "אבא שלי אפה 3 עוגיות עבור כל אחד מ-6 החברים שלי. כמה עוגיות הוא אפה?" התלמידים משתמשים בקוביות כדי לייצג את העוגיות, במקום להשתמש בעוגיות ממש. הם עדיין יכולים להציג את הבעיה באופן מוחשי, על ידי מתן שלוש קוביות לכל אחד מששת החברים ולאחר מכן לקבוע שהכמות הכוללת של ה"עוגיות" היא שמונה עשרה (ראו **איור 7**).





בחלק הבא של רצף ההוראה מעודדים תלמידים לצייר. התלמיד מתבקש לקבוע כמה פרחים יש בגינה, אם יש בה 6 שורות ובכל שורה יש 5 פרחים. כדי לייצג את הגינה, התלמיד מצייר מערך של שש על חמש, המסתכם בשלושים פרחים (ראו איור 8). ציורים נוספים יכולים להכיל קוביות או רישום קווים (tallies) בתוך עגולים (ראו איור 9).



באמצעות עבודה על כפל תוך שימוש במגוון של מודלים וייצוגים, התלמידים מתחילים לפתח אסטרטגיות חשיבה שעוזרות להם למצוא את התשובות לעובדות בסיסיות. שימוש באסטרטגיות בתרגילים קלים יכולה לסייע להם ללמוד את העובדות הקשות יותר. לדוגמה, כדי לפתור את התרגיל 7×8 , תלמידה אחת בכיתה ג' בחרה ל"פלג" את 7×8 ל- 2×8 ועוד 5×8 . היא אמרה, "יותר קל לי לעשות כפול 2 וכפול 5". אחרי זה היא קבעה ש- $2 \times 8 = 16$ ו- $5 \times 8 = 40$. היא חיברה $16 + 40 = 56$. תלמיד אחר באותה כיתה בחר ל"פלג" את 8 ל- $4 + 4$. הוא זכר ש- $7 \times 4 = 28$, אז הוא חיבר 28 ל- 28 וקיבל את התשובה הנכונה 56.

אסטרטגיית חשיבה נוספת בה תלמידים משתמשים נקראת **ספירה בדילוגים**. היא נעשית על ידי ספירה בדילוגים של הגורם השני בתרגיל כפל, כמספר הפעמים שמציין הגורם הראשון של התרגיל. לדוגמה, ניתן למצוא את התשובה לתרגיל 3×4 על ידי ספירה בדילוגים 4, 8, 12. שיטה זו מתבססת על משמעות הכפל משום שהיא משלבת את מושג הגורמים⁵ ומקדמת את ההבנה שספירה בדילוגים של 4 שלוש פעמים, היא כמו מנייה של שלוש קבוצות של 4. אסטרטגיות לא פורמליות אלה נותנות לילדים משאבים יעילים לפיתוח הבנה עמוקה יותר של מושגים מתמטיים ויכולת טובה יותר להשתמש בעובדות במצבי יישום.

רק אחרי שהתלמידים התנסו במצבי כפל עם עצמים קונקרטיים ועם ייצוגים, ניתן להקדיש זמן לתרגול ושינון של עובדות הכפל הנחוצים כדי להגיע לשליפה מהירה ולדיוק. תלמידים עם ליקויי למידה

צריכים עשרות חזרות לכל עובדת כפל, לכן המורים צריכים לספק הזדמנויות לתרגול מגוון ומעניין, הכולל משחקים, כרטיסי הברקה, קוביות משחק, וכן מחשבוניס ותרגול בעזרת מחשב⁶ לדוגמה, מורה בכיתה ג' משתמשת ב"כרטיסי מיקוד" כדי לעזור לתלמידיה לקשר בין מודל של מערך לעובדות הכפל. "התאמה" תכלול כרטיס אחד המציג עובדת כפל, למשל 3×4 , לייצוג שלו כמלבן של 3×4 משבצות ללא מספרים. הסדרה *Strategic Math Series* של (Mercer and Miller, 1992a), מספקת פעילויות עם קוביות משחק ותיעודים של המכפלות.

ישנם אתרים המציעים משחקים אינטראקטיביים כמו: "משחק הגורמים"⁷ המופיע באתר

<http://illuminations.nctm.org/ActivitySearch.aspx>

אתר ה-NCTM <http://illuminations.nctm.org> מציע גם משאבי למידה, כמו "משחק המכפלות", הניתן להדפסה.

חשוב, ללא ספק, שתלמידים ישננו את עובדות הכפל, אבל שינון זה חייב להיות מבוסס על הבנה של הפעולות⁸ ועל אסטרטגיות חשיבה (Fuson 2003). אם מאלצים את התלמידים לשנן את העובדות לפני שהם עברו את התהליך של התפתחות המושגים, הם רוכשים ידע ללא משמעות או שימוש ולעיתים קרובות מפתחים חוסר אהדה למקצוע המתמטיקה.

איך נתגבר על הקושי ללמד נושא קשה זה?

עבור תלמידים בעלי הבנה טובה של מושגי הכפל, רהיטות בחלק מן העובדות וקושי עם העובדות האחרות, אנו ממליצים לאתר את העובדות הבעייתיות בעזרת בדיקה משולבת. המורה צריכה לשתף את התלמיד בתוצאות הבדיקה על ידי צביעת העובדות הידועות (הנשלפות) על גבי לוח הכפל, ובכך לגלות לאילו עובדות נדרש מאמץ רב יותר. **טבלה 1** מראה לוח כפל שבו צבועות העובדות הקלות יותר. על פי הניסיון שלנו, תלמידים מופתעים לגלות כמה הרבה עובדות הם כבר יודעים וכמה מעט עוד נשאר ללמוד.

ודאו שיש הבנה איתנה של התכונות. ה"כללים" החשובים ביותר בכפל הם כללי הכפל באפס, באחד וחוק החילוף, אשר מתמטיקאים מכנים: תכונות הכפל של אפס, זהות, וקומוטטיביות.

אנו מוצאים שילדים מבינים את המונח "הכלל של כפל באחד", או שכל מספר כפול אחד הוא אותו מספר, במקום לשנן את התכונה הפורמלית של זהות. תלמידים אחדים יתבלבלו בין כללי החיבור וכללי הכפל באפס ובאחד. חשוב שהתלמידים יבינו את ההבדל בין "אפס ועוד מספר הוא אותו מספר" לבין "אפס פעמים מספר זה אפס – אין קבוצות או שאין כלום בכל קבוצה". שימוש באמצעי המחשה ביחד עם הסברים מפורשים הניתנים על ידי התלמיד עצמו והמורה, יכולים לגשר על אי-הבנה זו. כאשר תלמידים באמת מבינים כללים אלה, הם מתחילים לאתגר זה את זה עם תרגילים במספרים גדולים כמו "1,234,567 כפול אחד" או "5,500,000 כפול אפס".

תכונת החילוף, ש- x כפול y זה אותו דבר כמו y כפול x , חשובה גם לצורך חישובים בחילוק ולביטויים אלגבריים. כאשר אנו מלמדים את עובדות הכפל, אנו נוהגים ללמד שהביטוי הראשון הוא מספר הקבוצות והביטוי השני הוא מספר העצמים בכל קבוצה. המכפלה היא סך כל העצמים שבכל הקבוצות. באופן כזה, הביטוי הראשון שונה בכינוי שלו מן הביטוי השני. כאשר מחליפים בין הביטויים,

⁶ המאמר "משחקי כפל: כיצד הכנו אותם והשתמשנו בהם" דן בנושא זה בהרחבה.

⁷ ביישומון: "משחק הגורמים" יש הנחיות בעברית כיצד לשחק במשחק זה.

⁸ ניתן להבין מכך שכל מה שנכתב במאמר מכוון גם לפעולת החילוק ולעובדות החילוק.

זה משנה את המספר שמייצג את הקבוצות ואת המספר שמייצג את גודל הקבוצה, אבל לא את סך כל מספר העצמים. כדי לעזור לתלמידים להבין זאת, יש לעשות השוואה בין שתי ההקבוצות ולייצג את הכפל בדרכים נוספות⁹

טבלה 1: עובדות כפל ידועות משוערות

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

עודדו תרגול מגוון לשם רהיטות. כפי שנאמר בקטע הקודם, תלמידים צריכים תרגול חוזר ומגוון כדי לרכוש רהיטות בעובדות הכפל. מחקרים תומכים בפיתוח ושימור רהיטות זו באמצעות שימוש במילים רומזות (mnemonics) (Greene 1999), תרגול באמצעות מחשב (Irish 2002), טכניקות של Constant Staging, (Koscinski and Hoy 1993) Time Delay, ותרגולים של העתק / כסה / השווה¹⁰ (Stading, Williams, and McLaughlin 1996). יש לעודד את התלמידים להציב לעצמם מטרות למידה ולערוך רישום של מידת ההתקדמות שלהם.

למדו את התלמידים לחשוב באופן אסטרטגי. לתלמידים עם הבנה עמוקה של הכפל יש יתרון כאשר הם נתקלים בעובדת כפל שאינם זוכרים. האסטרטגיות השכיחות ביותר לשחזור עובדה נשכחת הן: חיבור חוזר של מספרים, חיבור קבוצות, הכפלה פי 2 של עובדה ידועה, וחסור מעובדת עוגן ידועה (Erenberg 1995). תלמידים עם ליקויי למידה במתמטיקה נוטים פחות להשתמש בגישות שיטתיות ומסתמכים יותר על ניחוש, אבל ניתן ללמד אסטרטגיות יעילות לילדים עם גישות לא בשלות.

⁹ מודל המערך ממחיש בצורה ברורה את חוק החילוף, כי הקבוצות מסודרות בטורים ובשורות.
¹⁰ הכוונה לשיטה שבה רושמים את התרגיל עם התשובה, מכסים את התשובה וכותבים אותה מהזיכרון, ואז מגלים את התשובה ומשווים לתשובה שנכתבה מהזיכרון. ניתן להכין טור של מספר תרגילים ולתרגל אותם בו זמנית.

חיבור חוזר של מספרים והכפלה פי 2 של עובדה ידועה הן אסטרטגיות המבוססות על מושג הכפל כחיבור חוזר של גורמים. חיבור מעובדת עוגן, מתבסס גם כן על עובדות ידועות, אך מפחית את מספר הצעדים הנדרשים. לדוגמה, אם תלמיד נשאל כמה זה 9×7 והוא יודע ש- $70 = 10 \times 7$, אז 9×7 צריך להיות $70 - 7$, שהם 63. תלמידים עם ליקויי למידה במתמטיקה מתקשים ביותר עם כפולות הארבע, שש, שבע, שמונה ותשע (Erenberg 1995). עבור כפולות ה-6 עד 9 יש עוד שיטה על בסיס מושגי בשם "כפל אצבעות" המתוארת ע"י Barney (1970). ניתן לראות שיטה זו גם באתר www.cofc.edu/wallacegurganus. מניסיוננו, תלמידים הרוכשים אסטרטגיות שחוזר נהנים ללמוד אותן לתלמידים אחרים, ובכך הם משפרים את ההבנה המושגית של עצמם.

הערות סיכום

לימוד לשליטה של עובדות הכפל אינו עוד שינון מכני של עובדות היסוד. יצירת הקשר בין הבנה מושגית לרהיטות חישובית חשוב עבור כל התלמידים, לא רק עבור התלמידים המתקשים. למידה באמצעות הבנה עוזרת לתלמידים לעשות קשרים מעבר למגוון של סיטואציות בעיה. מורים למתמטיקה, מורים לחינוך מיוחד ומומחים להוראה מתקנת, יכולים לסייע בצורה פעילה לכל התלמידים לרכוש רהיטות בכפל בכך שיבצעו הערכה של ההבנה המושגית והרהיטות של התלמיד, ילמדו אותו להבנה מעבר לסוגים שונים של בעיות, ויעודדו אותו להשתמש באסטרטגיות אישיות כדי ללמוד את העובדות ולפתח אוטומציה. לתלמידים השולטים בעובדות הכפל יש עמדה חיובית יותר אודות יכולתם המתמטית וכלפי התנסויות מתמטיות בעתיד. הוראה לשם הבנה פלוס הוראת אסטרטגיות הינה נוסחה להצלחה.

ביבליוגרפיה

- Addison-Wesley Publishing Company. *Investigating School Mathematics*, Level 3. Menlo Park, Calif.: Addison-Wesley, 1973.
- Barney, Leroy. "Your Fingers Can Multiply!" *Instructor* (April 1970): 129-30.
- Campbell, Patricia F., and Josepha Robles. "Project IMPACT: Increasing Mathematical Power of all Children and Teachers." In *Reflecting on our Work: NSF Teacher Enhancement in K-6 Mathematics*, edited by Susan N. Friel and George W. Bright, pp. 179-86. Lanham, Md.: University Press of America, 1997.
- Erenberg, Shana R. "An Investigation of the Heuristic Strategies Used by Students With and Without Learning Disabilities in Their Acquisition of the Basic Facts of Multiplication." *Learning Disabilities: A Multidisciplinary Journal* 6 (1995): 9-12.
- Fuchs, Lynn S., and Douglas Fuchs. "Enhancing the Mathematical Problem Solving of Students with Mathematical Disabilities." In *Handbook of Learning Disabilities*, edited by H. Lee Swanson, Karen R. Harris, and Steve Graham, pp. 306-22. New York: The Guilford Press, 2003.

- Fuson, Karen C. "Toward Computational Fluency in Multidigit Multiplication and Division." *Teaching Children Mathematics* 9 (February 2003): 300-305.
- Geary, David C. "Learning Disabilities in Arithmetic: Problem-Solving Differences and Cognitive Deficits." In *Handbook of Learning Disabilities*, edited by H. Lee Swanson, Karin R. Harris, and Steve Graham, pp. 199-212. New York: The Guilford Press, 2003.
- Greene, Gary. "Mnemonic Multiplication Fact Instruction for Students with Learning Disabilities." *Learning Disabilities Research and Practice* 14 (1999): 141-48.
- Houghton Mifflin Company. *Houghton Mifflin Mathematics*, Level 3. Boston: Houghton Mifflin, 2002.
- Irish, Cheryl. "Using Peg and Keyword Mnemonics and Computer-Assisted Instruction to Enhance Basic Multiplication Performance in Elementary Students with Learning and Cognitive Disabilities." *Journal of Special Education Technology* 17 (2002): 29-40.
- Koscinski, Susan T., and Cheri Hoy. "Teaching Multiplication Facts to Students with Learning Disabilities: The Promise of Constant Time Delay Procedures." *Learning Disabilities Research & Practice* 8 (1993): 260-63.
- Mercer, Cecil D., and Susan P. Miller. *Strategic Math Series: Multiplication Facts 0 to 81*. Lawrence, Kan.: Edge Enterprises, (1992a).
- _____. "Teaching Students with Learning Problems in Math to Acquire, Understand, and Apply Basic Math Facts." *Remedial and Special Education* 13 (3) (1992b): 19-35, 61.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: NCTM, 2000.
- Rubenstein, Rheta N., and Denisse R. Thompson. "Understanding and Supporting Children's Mathematical Vocabulary Development." *Teaching Children Mathematics* 9 (October 2002): 107-12.
- Stading, Mary, R.L. Williams, and T.F. McLaughlin. "Effects of a Copy, Cover, and Compare Procedure on Multiplication Facts Mastery with a Third-Grade Girl with Learning Disabilities in a Home Setting." *Education and Treatment of Children* 19 (1996): 425-34.