

ישר המספרים הריק: כלי שימושי או רק עוד פרוצדורה

The Empty Number Line:

A Useful Tool or just Another Procedure?

מאת : Janette Bobis

הופיע ב: Teaching Children Mathematics , Vol. 13 No.8, April. 2007, pp. 410-413

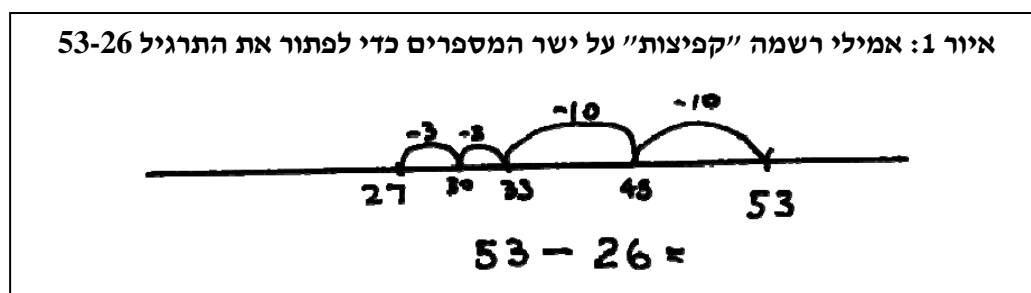
תרגום : ברכה סגליס

בשיעורי הבית שניתנו בכיתה ד' הופיעה ההוראה הבאה: "השתמשו בישר המספרים הריק כדי לפתור את התרגיל הבא". תגובתה של אמילי בת התשע היתה: "לא צריכים להגיד לי באיזה אסטרטגיה להשתמש. צריך לאפשר לי להחליט בעצמי!" אמילי מצאה שקל לה יותר לפתור תרגילים מסוימים בחיבור וחסור של מספרים דו-ספרתיים על ידי פירוקם לעשרות ואחדות, ולא ע"י שימוש באסטרטגיה של רישום על ישר המספרים.

לאחרונה הוכנסה ב- New South Wales שבאוסטרליה תוכנית לימודים חדשה במתמטיקה לביה"ס היסודי (Board of Studies 2002). מסמך זה מבטא נטייה בינלאומית להדגיש פיתוח אסטרטגיות מנטליות בכיתות היסוד המוקדמות (לדוגמה NCTM 2000). כמו כן הוא קבע שיש לדחות את מועד ההוראה של האלגוריתמים המקובלים לחישובים בארבע הפעולות, והציג "כלים" חדשים להוראה. אחד הכלים האלה היה ישר המספרים הריק. מאמר זה נובע מההחלטה של פְּתִי אמילי ושלי לחקור את המקורות ואת היתרונות הפוטנציאליים שבשימוש בישר המספרים הריק.

מהו ישר המספרים הריק?

ישר המספרים הריק – ישר מספרים שאין עליו מספרים או סימנים – הינו ייצוג חזותי שנועד לרישום ולשיתוף האסטרטגיות של תלמידים בשעה שהם עושים חישובים בראש (NSW Department of Education and Training 2002). התלמידים מתחילים עם ישר מספרים ריק ומסמנים עליו רק את המספרים הנחוצים להם עבור החישובים שהם עושים. לדוגמה, איור 1 מראה את האסטרטגיה של אמילי לפתרון התרגיל 53-26 כפי שהיא רשמה אותה על ישר המספרים הריק.



מדוע כדאי להשתמש בישר המספרים הריק?

השימוש המתועד הראשון שמצאנו התרחש בהולנד בשנות ה-70. על פי Gravemeijer (1994), ישר המספרים הריק פותח ככלי "חדש" כדי לעזור לתלמידים להתגבר על קשיים הקשורים בשימוש הנפוץ בחומרים של בסיס עשר באופן "פרוצדורלי בלבד", כאשר הם מדגימים את האלגוריתמים המקובלים של פתרון תרגילים בכתב במאונך. הניסיונות הראשונים עם ישר המספרים הריק לא הצליחו כפי שציפו, אולי כי הוא הוצג בהקשר של מדידה. כמו כן, בשל הדמיון שלו לסרגל מדידה רגיל, שבו יש סימנים קבועים ושווים, התלמידים הרגישו חוסר ביטחון כאשר קבעו את מיקום המספרים בקירוב על ישר שאין עליו סימנים כלל. עם זאת, Treffers (1991) ו-Beishuizen (2001) מצאו שתלמידים יכלו להשתמש בהצלחה בישר המספרים הריק כדי לרשום ולהפיק משמעות ממגוון של אסטרטגיות פיתרון לתרגילי חיבור וחסור של מספרים דו-ספרתיים. ישר המספרים הריק מקובל כיום ברחבי הולנד ככלי דידקטי חשוב לעבודה עם מספרים עד 100 ויותר (Van den Heuvel-Panhuizen, 2001).

היתרונות שבשימוש בישר המספרים הריק, כפי שמציין Gravemeijer (1994), כוללים –

- הצורך בייצוג ליניארי עבור המספרים;
- הקשר ההדוק שבין דרכי החישוב המנטליים האינטואיטיביים של ילדים צעירים לבין ישר המספרים הריק;
- הפוטנציאל שלו לקדם את התפתחותם של אסטרטגיות חישוב מתקדמות יותר אצל ילדים.

ברור שחומרים של בסיס עשר, כמו "בדידי כוח 10" (Dienes blocks) הינם הטובים ביותר כאשר עוסקים בכמויות ובבעיות ממשיות. אבל, ייצוגים ליניאריים, כמו ישר המספרים הריק, הינם הטובים ביותר להדגמת מרחק או מדידה. הקשרים ההדוקים שבין ישר המספרים הריק לבין דרכי החישוב המנטליים האינטואיטיביים של ילדים צעירים, ניכרים באופן שבו ילדים, כאשר הם מנסים לפתור תרגילים עד 100, נוטים באופן טבעי להתמקד תחילה באסטרטגיות ספירה – ספירת הכל, ספירת המשך, או ספירה לאחור. תלמידים בעלי יכולת חישוב מנטלית טובה יותר, משתמשים בשילוב של אסטרטגיות ספירה (בד"כ בגושים של 10) עם אסטרטגיות הפרדה. בהפרדה, תלמידים "מפרקים" מספרים באופן גמיש, כדי להפוך אותם למספרים שנוח יותר לחשב בראש. אסטרטגיות אלה דומות לקפיצות על ישר המספרים הריק. שימו לב, שכדי לפתור את התרגיל 26-53 (איור 1), אמילי השתמשה בשילוב של ספירה לאחור בגושים של 10 ופירוק ה-6 ל-2 קבוצות של 3, כדי להשלים לעשרת בקלות רבה יותר.

הפוטנציאל של ישר המספרים הריק לקדם את ההתפתחות של אסטרטגיות מתקדמות יותר, נובע מהשימוש של התלמידים בישר כדי לרשום את אסטרטגיות החישוב שלהם, ובכך לחשוף בפני תלמידים אחרים (וגם לעצמם) את תהליכי החשיבה שלהם. באופן כזה, ניתן לראות לא רק את רמת החשיבה, אלא גם את טעויות החשיבה שעלולות להתרחש. בהתאם, ניתן לקבל החלטות הוראה כדי לסייע בפיתוח אסטרטגיות יעילות יותר. כתוצאה מכך, זה רק הגיוני שרישום ויזואלי כזה של אסטרטגיות החשיבה של ילדים, יכול לספק גירוי לדיונים כיתתיים ולשיתוף באסטרטגיות מנטליות. תלמידים יכולים להסביר את האסטרטגיות שלהם ע"י כך ש"יראו"

אותם לאחרים. עובדה זו הופכת את ישר המספרים הריק לכלי רב עוצמה לקידום השיח המתמטי בכיתה.

רבים מהיתרונות שבשימוש בישר המספרים הריק מקבלים תמיכה מדבריה של אמילי, היום בכיתה ד', אשר נחשפה לכלי זה בהיותה בכיתה ג'. כיום היא מחשיבה את ישר המספרים הריק ככלי ש"קל יותר ללמוד ולזכור מאשר את השיטות לחישוב עם ניר ועיפרון" משום ש"אני יכולה לרשום את האסטרטגיה שאני חושבת עליה ולא מה שאני חושבת שהמורה רוצה". בנוסף, היא מסבירה, "אם את עושה שגיאה, יותר קל לגלות אותה". מנקודת המבט של אמילי, ישר המספרים הריק קל יותר לשימוש מפני ש-

- היא מבינה כיצד הוא עובד (הוא מייצג את החשיבה שלה);
- הוא מראה את הרישום של כל צעד בחשיבה שלה;
- הוא מאפשר לה לגלות טעויות;
- הוא מאפשר לה לחשוב מה לעשות בצעד הבא, כאשר החישוב הנדרש קשה מדי לביצוע רק "עם הראש".

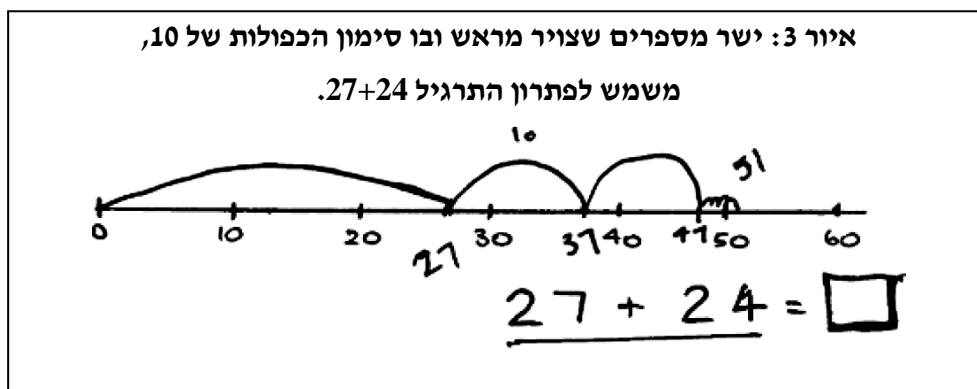
הצגת ישר המספרים הריק

לפני שמציגים לתלמידים את ישר המספרים הריק, הם צריכים להכיר ייצוג ליניארי של המספר – ישר מספרים עם מספרים. Buys (2001), ממליץ להציג תחילה את ישר המספרים הריק באמצעות רשראות של חרוזים, שצבעם משתנה לסירוגין עבור כל 10 חרוזים. למרות שהמורה של אמילי לא נקטה בגישה מסוימת זו, היא השתמשה בסוג אחר של ישר מספרים שתמך בייצוג הליניארי של המספר ועזר לאמילי ולעמיתיה לכיתה להגיע להבנה. **איור 2** מראה ישר מספרים שבו מופיעים רק המספרים 0 ו-100. אמילי התבקשה להזיז את האטב שהיה מהודק לישר המספרים, למקום המתאים למספר שציינה המורה או תלמיד אחר. אחרי שהיא מיקמה את האטב במקום שלפי הערכתה נמצא המספר המבוקש, אמילי הפכה את הישר ובצידו השני נתגלה ישר מספרים מלא יותר (ראו **איור 2ב**). כעת היא יכלה לבדוק באיזו מידה ההערכה שלה היתה קרובה למספר המבוקש.



לפני שמבקשים מן התלמידים להשתמש בישר המספרים הריק לרישום אסטרטגיות מנטליות מורכבות של חיבור וחסור מספרים דו-ספרתיים, יש לבסס כישורי ספירה וידע מסוימים. שתי אסטרטגיות חיוניות שתלמידים חייבים להבין ולהשתמש ביעילות לפני שהם יכולים להשתמש בישר המספרים הריק המתקדם יותר, כוללות: (א) ספירה בעשרות, הן בעשרות שלמות (10, 20, 30...) והן ביניהן (14, 24, 34...), ו- (ב) דילוגים מעל עשרות (באמצעות השלמה ל-10). ספירה בעשרות, הן בעשרות שלמות והן ביניהן, מאפשרת לתלמיד להתחיל מכל מספר ולספור קדימה או אחורה בכפולות של 10. כאשר מציגים בפני הילדים בפעם הראשונה מיומנות זו, הם יכולים להיעזר באמצעי המחשה, כמו שרשראות של חרוזים, או חבילות של 10 מקלות ארטיק, תוך כדי רישום תוצאות הספירה שלהם בלוח מאה ריק, או כקפיצות על ישר המספרים הריק. השלמה ל-10 דורשת מהילדים להיות מסוגלים לפרק מספרים בגמישות. לדוגמה, כדי לפתור את הבעיה $8 + 5$, המספר הראשון נשאר כמו שהוא ואילו המספר השני, ה-5, מפורק (למשל ל-2 ול-3), ונוסף למספר הראשון בחלקים. התהליך נעשה קל יותר, אם חלק של ה-5 (ה-2), נוסף ל-8 ויוצר 10, לפני שמוסיפים את החלק השני (ה-3). כך $8 + 2 = 10$ ולאחר מכן $10 + 3 = 13$. ניתן ליישם אותה אסטרטגיה כאשר משלימים ל-10 בעשרות גבוהות יותר, למשל, $38 + 5 = (38 + 2) + 3 = 40 + 3 = 43$.

לאחר שהם לומדים את האסטרטגיות לספירה בעשרות ולהשלמה ל-10, ניתן לחשוף את התלמידים ל- **אסטרטגיית הקפיצות** (או האסטרטגיה הסדרתית) לחישוב תרגילי חיבור וחסור במספרים דו-ספרתיים. המאפיין הבסיסי של אסטרטגיה זו הוא שמספר אחד נשאר כמו שהוא ואילו את המספר השני מוסיפים או מפחיתים בגושים של עשרות ושל יחידות. עם זאת, כאשר נדרשים לחשב תרגיל כמו 29-66, לעיתים יותר יעיל להשתמש ב- **אסטרטגיית הפיצוי**, למשל להפחית 30 ואז להוסיף 1 $66 - 29 = (66 - 30) + 1$. למטרות הוראה ומעקב, דורשים מן התלמידים לרשום על ישר המספרים הריק, רק את המספרים הרלבנטיים לחישוב שעשו. ככל שהאסטרטגיות שלהם מתקדמות יותר, מספר הקפיצות יורד. אמילי זוכרת התנסות מבלבלת שהיתה לה בכיתה ג', כאשר היא קיבלה ישר מספרים מסומן מראש, שהתחיל ב-0, ושכפולות ה-10 היו רשומות עליו (ראו **איור 3**). בהיותה עדיין בתחילת ההתנסות בשימוש בישר המספרים הריק, אמילי חשבה שהיא צריכה להתחיל במספר הראשון שמסומן על הישר, ב-0. התוצאה היתה ביצוע חסר משמעות "דמוי פרוצדורה" של קפיצות מיותרות.



לפיכך, למרות היותו כלי רב עוצמה לפיתוח חישובים מנטליים אצל ילדים צעירים, ישר המספרים הריק ואסטרטגיית הקפיצות הקשורה אליו צריכים להיות מוצגים בפני התלמידים באופן מחושב ועם דוגמאות נבחרות מתאימות. שימוש שאינו הולם יכול לגרום לביצוע של אסטרטגיה פחות מתקדמת, או ללימוד פרוצדורה ללא משמעות. מחקר עדכני של Van den Heuvel-Panhuizen (בהכנה) מתייחס באופן דומה להצגה ולשימוש נכון בישר המספרים הריק בבתי הספר בהולנד.

אסטרטגיה בסיסית אחרת לחישובים מנטליים של חיבור וחסור מספרים דו-ספרתיים, נקראת **אסטרטגיית הפיצול** (split strategy). אסטרטגייה זו כרוכה בפיצול המספר לעשרות וליחידות וטיפול בכל אחד מהם בנפרד. אמילי התייחסה לאסטרטגיית הפיצול כשיטה טובה ("קלה") יותר לפתרון שני תרגילים בשיעורי הבית שלה: $42+26$, ו- $56+32$, משום ש- "הספרות ביחידות לא מסתכמות מעבר לעשר". לפיכך, כדי לחשב $42+26$, אמילי ביצעה שתי פעולות חיבור: $40+20=60$ ו- $2+6=8$, ואז צרפה את העשרות והיחידות וקיבלה 68. לא היה שום צורך ברישום כתוב משום שהמספרים היו פשוטים דיים כדי לחשב לגמרי "בראש שלה".

סיכום

כמורים, עלינו להיות מודעים לכך שתלמידים ישנו את השימוש שלהם באסטרטגיות בהתאם למספרים שבתרגיל. היישום הנוקשה של כלי אחד, או פרוצדורה אחת, יגביל באופן חמור את היכולת שלהם להשתמש באסטרטגיות מנטליות באופן גמיש ושוטף. לפיכך, יש לאפשר לתלמידים לפתח מגוון של אסטרטגיות וכלים ייצוגיים בדרכם לרהיטות. במשך הזמן, יש לאפשר לתלמידים גם לקבל החלטות לגבי האסטרטגיה שבה ישתמשו ולעמוד מאחורי ההחלטה שלהם (accountability).

ישר המספרים הריק הוכנס לתוכנית הלימודים שלנו, כדי לעזור לתלמידים להתרחק מתפעול חסר משמעות של אלגוריתמים בהם משתמשים רק בנייר ועיפרון. אך עלינו להיזהר שלא נאמץ באופן דומה ולא בכוונה, גישה של "פרוצדורה בלבד" לחישובים המנטליים. פיתוח אסטרטגיות חישוב מנטליות עלול להיחשף לאותם קשיים בהם אנו נתקלים בהוראת האלגוריתמים המקובלים של נייר ועיפרון, אלא אם כן נלמד להקשיב למבקרים הגדולים ביותר שלנו – התלמידים שלנו – ונאפשר להם להחליט בעצמם לגבי האסטרטגיה הטובה ביותר לשימוש.

ביבליוגרפיה

- Beishuizen, Meindert. "Different Approaches to Mastering Mental Calculation Processes." In *Principles and Practices in Arithmetic Teaching*, edited by Julie Anghileri, pp. 119-130. London: Open University Press, 2001.
- Board of Studies, New South Wales. *Mathematics K-6*. Sydney; Board of Studies, 2002.
- Buys, Kees. "Progressive Mathematization: Sketch of a learning Strand." In *Principles and Practices in Arithmetic Teaching*, edited by Julie Anghileri, pp. 107-118. London: Open University Press, 2001.
- Gravemeijer, Keeno. "Educational Development and Educational Research in Mathematics Education." *Journal for Research in Mathematics Education* 25 (1994): 443-471.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM, 2000.
- New South Wales (NSW) Department of Education and Training. *Developing Efficient Numeracy Strategies Stage 2*. Sydney: NSW Department of Education and Training, 2002.
- Treffers, Adri. "Didactical Background of a Mathematics Program for Primary Education." In *Realistic Mathematics Education in Primary School*, edited by L. Streefland, pp. 21-57. Utrecht: Centrum voor Didactiek van Wiskunde en Netuurwetenschappen, 1991.
- Van den Heuvel-Panhuizen, Marja, ed. *Children Learn Mathematics: A Learning-Teaching Trajectory with Intermediate Attainment Targets for Calculation with Whole Numbers in Primary School*. Utrecht: Freudenthal Institute, University/SLO, 2001.
- _____. "Learning from 'Didactikids' - An Impetus for Revisiting the Empty Number Line." *Mathematics Education Research Journal* (forthcoming).