

# הבנת התפתחות החשיבה של תלמידים על מושג האורך

## Understanding the Development of Students'

### Thinking about Length

מאת : Michael T. Battista

הופיע ב: Teaching Children Mathematics , Vol. 13 No.3, Oct. 2006, pp. 140-146

תרגום : ברכה סגליס

אתגר חשוב בהוראת מתמטיקה הוא לעזור לתלמידים להגיע להבנה אמיתית של רעיונות מתמטיים. אחת הדרכים הבדוקות לעמוד באתגר זה הינה לבסס את ההוראה על מחקר אודות החשיבה המתמטית של תלמידים ( Bransford, Brown, and Cocking 1999; Fennema et al. ) (1996). למעשה, כדי להביא את התלמידים להבנה אמיתית ולחשיבה מתמטית בעלת עצמה, ההוראה צריכה להיות מונחית על ידי ידע מחקרי מפורט אודות הדרכים בהם תלמידים חושבים על רעיונות מתמטיים מסוימים. ידע כזה הינו קריטי כאשר בוחרים ויוצרים משימות הוראה, שואלים שאלות מתאימות, מנחים דיון כיתתי, מתאימים את ההוראה לילדים בעלי צרכים מיוחדים, מבינים את החשיבה של התלמידים, מעריכים את מידת ההתקדמות שלהם, ומאבחנים ומתקנים קשיי למידה של תלמידים.

מאמר זה מתאר משימות הערכה ומסגרת מושגית שבהן ניתן להשתמש, כדי להבין את החשיבה של תלמידי ביה"ס היסודי אודות מושג האורך. המשימות והמסגרת המושגית נוצרו בפרויקט שבו רואינו תלמידים רבים של ביה"ס היסודי, במטרה לחקור את ההבנה שלהם אודות נושאים שונים במתמטיקה של ביה"ס היסודי. פרויקט זה, שכונה – הערכה מונחית קוגניטיבית ( Cognitive Based Assessment – CBA), יצר ערכות של משימות הערכה ומסגרות מושגיות המבוססות על מחקר, כדי לתאר את דרכי החשיבה של תלמידים אודות מושגי ליבה במתמטיקה של ביה"ס היסודי (Battista 2001, 2004).

### מושג האורך: קריטי בחשיבותו, מטעה במידת מורכבותו

מושג האורך הוא קריטי בחשיבותו הן בחיי היומיום והן בגיאומטריה הפורמלית. בחיי היומיום, אנו משתמשים באורך כדי לתאר את גודלם של עצמים או את המרחק אליו הגענו. בגיאומטריה, אנו משתמשים באורך כדי להוסיף דיוק לתיאורים של צורות. לדוגמה, אנו מגדירים ריבוע כמרובע בעל ארבע זוויות ישרות וארבע צלעות בעלות אורך שווה. ללא מושג האורך, תיאורים רבים של עולם המרחב היו נעשים מעורפלים ולא מדויקים. למרות חשיבותו ולמרות שהוא נראה פשוט, מושג האורך יכול להיות קשה מאוד להבנה עבור ילדים. סיבה אחת לקושי זה היא שהשימוש היומיומי במילה **אורך** לעיתים קרובות אינו עקבי עם השימוש המתמטי. לדוגמה, מילון אוקספורד מגדיר **אורך** כך "הגודל הלינארי של כל דבר הנמדד

מקצה אל קצה" הבעיה עם הגדרה זו שהיא מעורפלת. מבחינה מתמטית אורך "חוט הברזל" המוצג באיור 1 הינו המרחק שנוסעת נקודה לאורך החוט מנקודה A לנקודה B. אבל ההגדרה של המילון מציעה למצוא את אורך החוט ע"י מתיחת קו ישר מנקודה A לנקודה B. למעשה, במצבים מסוימים, קו ישר זה הוא מה שצריך. לדוגמה, אם היו רוצים לשים חוט ברזל זה בתוך תיבה, קרוב לודאי שהיו בודקים את המרחק בין A ל- B.



מה שמסבך את המצב יותר הוא העובדה שמילים רבות המשמשות לתיאור אורך, משמשות גם לתיאור זמן. לדוגמה, אנו יכולים לשאול: "איזה זמן יותר ארוך? לנסוע במעלית או לעלות במדרגות?" ובהקשרים רבים זמן ואורך משולבים זה בזה. לדוגמה, קביעה איזה מסלול מהבית לביה"ס ארוך יותר זמן, הינה בעיה העוסקת בזמן, אבל כמות הזמן תלויה, במידת מה, באורך המסלולים (וכן במגבלות מהירות ועומס תנועה). כך, בהקשרים מסוימים, קשה לתלמידים צעירים להפריד בין המושגים של אורך ושל זמן. לבסוף, העובדה שניתן להתייחס לעצמים במרחב עפ"י סוגים שונים של גדלים ומימדים, מקשה על תלמידים צעירים לבנות לעצמם את מושג האורך. לדוגמה, כאשר מבוגר, המבין את מושג האורך, מתבקש לחשוב על האורך של תיבה צרה וארוכה, הוא יודע באיזה היבט מרחבי של התיבה עליו להתמקד. אבל ילד שאינו מבין את מושג האורך עלול להתקשות לדעת לאיזה גודל של התיבה במרחב עליו להתייחס, לאורך, לרוחב, להיקף, לחלל שבתוך התיבה, לשטח הפנים, לאלכסון, או לאיזה מושג כללי מעורפל של הגודל. כלומר, כדי "לראות" אורך נדרשת המשגה של האורך. לכן, השאלה הקריטית היא כיצד ילדים מפתחים המשגה של אורך? התשובה לשאלה זו מתגלה ע"י בחינה זהירה של החשיבה של תלמידים.

## רמות של תחכום בחשיבת תלמידים אודות אורך

ישנם שני סוגים בסיסיים שונים של חשיבה אודות אורך. **חשיבה ללא מדידה** אינה משתמשת במספרים. במקום זה היא עוסקת בשימוש בשיפוטים ויזואליים, השוואה ישירה, התאמה בין חלקים וטרנספורמציות. לדוגמה, תלמידים יכולים להשוות אורכים של עצמים ע"י הצבתם זה ליד זה – העצם שנראה בולט יותר מהשני נשפט כארוך יותר.

**חשיבה של מדידה** עוסקת בקביעת **מספר** יחידות האורך שמתאימות לאורכו של עצם מקצה אחד שלו עד הקצה השני, ללא מרווחים או חפיפה. התהליך של הצבה חוזרת של יחידת אורך מקצה אל קצה, לאורך אובייקט כלשהו, נקרא **חזרה על יחידת אורך** (unit-length iteration). יחידת האורך משמשת כיחידה או, ה"אחד" שיש למנות. ההנחה היא שיחידה זו נשארת קבועה במשך כל תהליך

המדידה. חשיבה של מדידה עוסקת לא רק בחזרה של יחידת אורך ובשימוש במכשירי מדידה, אלא גם בחישובים מנטליים על מדידות מספריות – לדוגמה, חיבור אורכי צלעות כדי למצוא היקף של מלבן, או להסיק שצלעות נגדיות של מלבן הן בעלות אורך שווה. למרות שתלמידים בדרך כלל מתחילים לפתח חשיבה ללא מדידה לפני החשיבה של מדידה, החשיבה ללא מדידה ממשיכה להתפתח גם אחרי שהחשיבה של מדידה מופיעה. יתר על כן, החשיבה המתוככמת ביותר אודות אורך עוסקת בשילוב חשיבה ללא מדידה עם חשיבה של מדידה.

אתאר כעת רמות של תחכום אצל תלמידים בהתפתחות החשיבה ללא מדידה והחשיבה של מדידה אודות אורך. רמות אלה, המופיעות ב**טבלה 1**, מתארות את הרמה הקוגניטיבית אליה הגיעו תלמידים במעברם מחשיבה לא פורמלית, קדם לימודית, לחשיבה מתמטית פורמלית אודות אורך.

**טבלה 1: רמות של תחכום בחשיבה של תלמידים אודות אורך**

מדידה	ללא מדידה
מ 0. שימוש במספרים ללא קשר לחזרה על יחידה.	ל 0. השוואה ויזואלית הוליסטית.
מ 1. חזרה לא מדויקת על יחידה.	ל 1. השוואה ע"י פירוק או הרכבה מחדש.
מ 2. חזרה מדויקת על יחידה.	1.1 ארגון החלקים מחדש לשם השוואה ישירה.
מ 3. ביצוע חישובים על חזרות על יחידה.	1.2 התאמת החלקים אחד לאחד.
מ 4. ביצוע חישובים על מדידות מספריות.	ל 2. השוואה באמצעות טרנספורמציות המבוססות על תכונות.

## חשיבה ללא מדידה אודות אורך

### חשיבה ללא מדידה רמה 0: השוואה ויזואלית הוליסטית

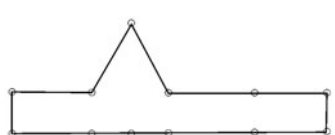
החשיבה של התלמידים אודות אורך מבוססת על ראייה והוליסטית. היא מבוססת על ראייה משום שהתלמידים מתמקדים רק במה שהם רואים ובאופן שבו הדברים נראים. היא הוליסטית משום שהתלמידים מתמקדים בצורות שלמות או בעצמים שלמים, ולא בודקים באופן שיטתי חלקים בתוך צורות. האסטרטגיות של התלמידים לא מדויקות ולעיתים קרובות לא ברורות. חוסר בהירות זה נובע לעיתים תכופות מן העובדה שהתלמידים לא הפרידו עדיין את מושג האורך ממושגים אחרים המופיעים כאשר עוסקים בהתנסויות הקשורות לאורך. לדוגמה, תלמידים יכולים לשפוט אורכים של מסלולים על סמך מידת הזמן או המאמץ שייקח, על פי דמיונם, ללכת לאורך מסלולים כאלה.

כאשר תלמידים מתחילים להיווכח באורך, הם משתמשים במגוון של אסטרטגיות ויזואליות-הוליסטיות. **בהשוואה ישירה**, תלמידים משווים את האורכים של שני עצמים על ידי הנחתם זה לצד זה. מעט יותר מתוככמת היא **השוואה לא-ישירה**, שבה שני עצמים שאינם ניתנים להשוואה ישירה, מושווים על ידי שימוש בעצם שלישי (כמו חוט, או המרחק בין האצבעות) שבאמצעותו "מתעדים" את האורך של אחד העצמים המקוריים ומשווים אותו באופן ישיר לעצם המקורי השני<sup>1</sup>. אסטרטגיות נוספות בהם תלמידים משתמשים ברמה זו הן, השוואת האורכים של עצמים

<sup>1</sup> בתוכנית הלימודים בישראל מצב זה נקרא: "השוואה ע"י מתווך".

ישרים ע"י בדיקת נקודות הקצה שלהם רק בצד אחד; הסתכלות רק בנקודות הקצה של עצמים שאינם ישרים והתעלמות ממה שקורה בין נקודות הקצה; וניסיון לדמיין עד כמה העצם יהיה ארוך, למשל חוט מפותל, אם יישרו אותו. (ראו דוגמאות באיור 2. המשימות מופיעות בנספח שבעמודים 11-12).

**איור 2: רמה ל 0 - השוואה ויזואלית הוליסטית**



**משימה 3.** כדי להשוות את אורכי שני המסלולים, ג'ואן (כיתה ב') ציירה קטעים המחברים את הקצוות השמאליים והקצוות הימניים של שני המסלולים ואמרה, "אני חושבת שהם בערך אותו דבר".

**משימה 3.** קארי (כיתה ד') אמרה שהחלקים הם באותו אורך משום שאם היו מיישרים את המסלול העליון, הוא היה "בדיוק באותו הקו" כמו המסלול התחתון.

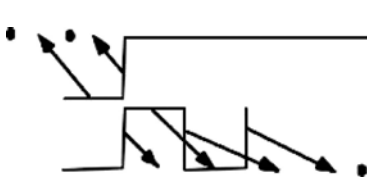
**משימה 4.** הת'ר (כיתה ה') אמרה שהמסלול התחתון ארוך יותר, "משום [עוברת על המסלול עם האצבע]..כאילו כשזה מגיע לחלקים האלה [עוברת לאורך הריבוע הראשון שבמסלול התחתון] יש לו ריבועים גדולים יותר, אז יקח לו יותר זמן לעבור".

**הערה:** המשימות המצוינות בכל האיורים מופיעות בנספח (עמודים 11-12)

**חשיבה ללא מדידה רמה 1: השוואה ע"י פירוק והרכבה מחדש**

1.1. **ארגון חלקי המסלול מחדש כדי ליצור מסלולים חדשים שניתן להשוות בהשוואה ישירה.** תלמידים מארגנים מחדש - באופן פיזי, בציור, או בדמיון - חלקים קטנים של המסלול, או את כל חלקיו, ואז עושים השוואה ישירה של החלקים שאורגנו מחדש כחלקים שלמים. (ראו איור 3).

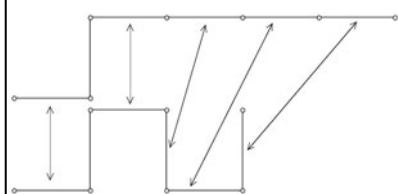
**איור 3: רמה ל 1, 1.1 - ארגון מחדש של חלקים לצורך השוואה ישירה**



**משימה 1.** כפי שמראים החיצים, קארל (כיתה ה') הסביר איך צריך ליישר את המסלולים, חלק אחרי חלק - "שים את זה כאן, את זה כאן..." כשהוא מראה לאן צריך להזיז כל קטע. הוא פספס קטע אחד במסלול התחתון והסיק שהמסלול העליון ארוך יותר.

**1.2 התאמת החלקים אחד לאחד.** תלמידים משווים שני מסלולים על ידי התאמת זוגות של חלקי המסלולים, אשר הם חושבים שיש להם אותו אורך. הם אינם עושים טרנספורמציה של מסלול אחד למסלול השני. רמה 1.2 מתוחכמת יותר מרמה 1.1, משום שברמה 1.1 התלמידים מסתמכים על מניפולציה ויזואלית והשוואה, ואילו ברמה 1.2 התלמידים מסיקים שאם החלקים בשני המסלולים זהים, אז אורכי המסלולים זהים. (ראו איור 4).

**איור 4: רמה ל 1, 1.2 – התאמת החלקים אחד לאחד**

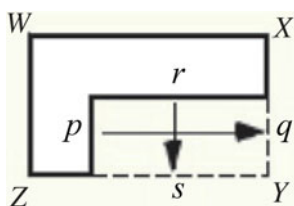


**משימה 1.** אריאנה (כיתה ג') טענה שלשני החוטים יש אותו אורך. היא השתמשה בידיה כדי להתאים קטעים בחוט התחתון עם קטעים בחוט העליון (החיצים מראים את הזוגות של הקטעים התואמים). עבור כל התאמה היא אמרה: "[קטע] זה הוא כמו [קטע] זה".

**חשיבה ללא מדידה רמה 2: השוואה באמצעות טרנספורמציות המבוססות על תכונות**

תלמידים משווים אורכי מסלולים באמצעות הזזה, סיבוב והיפוך של חלקי צורה באופנים המאפשרים להם להסיק, על סמך תכונות הצורה, שהצורה שעברה טרנספורמציה חופפת לצורה השנייה. (שתי צורות הן חופפות אם יש להן אותה צורה ואותו גודל בדיוק). על פי רוב התלמידים אינם מזכירים את תכונות הצורה, או את סוג הטרנספורמציה ("הזזה", "שיקוף" או "סיבוב"), אבל ברור שהחשיבה שלהם עקבית לתכונות וטרנספורמציות כאלה. שימו לב שההזזה, הסיבוב וההיפוך הם מיוחדים משום שהם משמרים אורך והתאמה - הגודל וצורת העצמים ששינו את מיקומם נשארים אותו דבר. ספציפית, כאשר עושים הזזה, היפוך או סיבוב בקטע של 4 ס"מ, מתקבל קטע של 4 ס"מ.

**איור 5: רמה ל 2 – השוואה באמצעות טרנספורמציות המבוססות על תכונות**



**משימה 11.** בעת השוואת היקף של הצורה משמאל להיקף של מלבן החופף למלבן WXYZ, מליסה (כיתה ח') אמרה: "אני חושבת שלשניהם (צורות A ו-B) יש אותו היקף. משום שאם אתה כאילו מזיז את זה לשם [מציירת חץ מקטע p, זה (קטע p) הוא באותו אורך כמו זה [מציירת את קטע q]. ואם מוחקים את זה [מקשקשת על קטע r ומציירת את קטע s כדי ליצור מלבן], אז זה יהיה כמו ההוא [מצביעה על צורה A]. וזה (צורה B) כאילו אותו דבר כמו ההוא (צורה A).

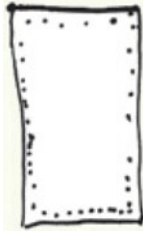
**באיור 5,** למרות שהחשיבה של מליסה אינה לגמרי מפורשת, בחינה מדוקדקת שלה מראה את מידת התחכום שלה. ה"מהלך" של מליסה לגבי קטע p, כדי ליצור את קטע q, הינה למעשה הזזה שלא רק שמשמרת את האורך של קטע p, אלא גם שומרת שקטע q יהיה מקביל לצלע WZ. מכיוון שהזזה זו משמרת אורך, מקבילות ומאונכות, מליסה יכולה להסיק באופן תקף שקטע q, ביחד עם הקטע האנכי שבדיוק מעליו, יוצרים את קטע XY, שהינו הצלע הימנית של המלבן WXYZ. באופן דומה, היא יכולה להגיע למסקנה התקפה שהזזת r ל-s יוצרת את קטע ZY, החלק התחתון של המלבן WXYZ. חשיבה כזו, בדרך כלל, אינה מופיעה עד שתלמידים עוסקים זמן ניכר בלימוד התכונות של צורות.

## חשיבה של מדידה אודות אורך

### מדידה רמה 0: שימוש במספרים ללא קשר לחזרה על יחידה

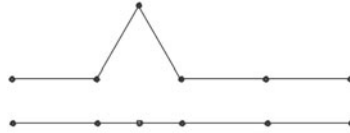
תלמידים משתמשים במנייה כדי למצוא אורכים; אולם המנייה שלהם אינה מייצגת את החזרה על יחידת אורך קבועה. לדוגמה, תלמידים יכולים לדקלם מספרים בשעה שהם מעבירים את אצבעותיהם ברצף לאורך מסלול. או שהם יכולים לספור נקודות לאורך מסלול, אבל נקודות אלה אינן מציינות באופן נכון יחידות אורך. (ראו איור 6)

#### איור 6: רמה מ 0 - שימוש במספרים ללא קשר לחזרה על יחידה



**משימה 9.** כאשר נשאלה כיצד היא ידעה שלמלבן שציירה היו מסביב 40 יחידות, ז'אן (כיתה ב') ציירה נקודות במרווחים לא קבועים לאורך הצד הפנימי של צלעות המלבן, כשהיא עוצרת כשהספירה שלה הגיעה ל-40. לא היה כל סימן לכך שז'אן השתמשה בנקודות כמציינות חזרות על יחידות אורך קבועות.

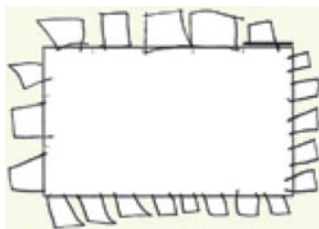
**משימה 3.** מייק (כיתה ד') אמר שהמסלולים יהיו באורך שווה, כי בכל אחד מהם יש 6 נקודות.



### מדידה רמה 1: חזרה לא מדויקת על יחידה

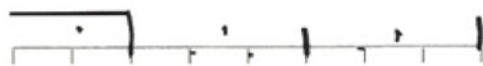
תלמידים מנסים לעשות חזרה, על מה שהם מחשיבים כיחידת אורך, לאורכו של עצם או מסלול. עם זאת, משום שהם אינם באמת יודעים מהי יחידת אורך, או שאינם מסוגלים להתאים יחידות חוזרות זו לזו באופן הולם, החזרה שלהם מכילה פערים, חפיפות, או יחידות באורכים שונים. תלמידים לעיתים קרובות, שוכחים מה היה גודל יחידת האורך בשעה שהם מונים אותה. ברמה זו, תלמידים עושים חזרה על שני סוגים שונים של יחידות. הסוג הראשון הינו צורה כמו ריבוע, מלבן, או קוביה. לעיתים קרובות תלמידים עושים חזרה על צורה כזו מבלי להבין כיצד היא מתאימה ליחידת אורך. במקרים אחרים, תלמידים עשויים "לראות" יחידת אורך בתוך צורה, אבל אין להם הפשטה מספקת של יחידת האורך, כך שיהיו מסוגלים לחשוב עליה ללא הצורה. הסוג השני של יחידה שתלמידים עושים עליה חזרה הינו קטע של קו המייצג יחידת אורך. במקרה כזה, התלמידים הצליחו לעשות הפשטה מספקת ולבודד יחידות אורך, כך שהם יכולים לעשות חזרה מפורשת על אותן יחידות, ולא ריבועים, מלבנים או בדידים. (איור 7).

## איור 7: רמה מ 1 - חזרה לא מדויקת על יחידה



**משימה 7.** ז'אן (כיתה א') ציירה וספרה "מקלות" מסביב למלבן כפי שמראה הציור, וקבלה תשובה של 21. שימו לב שהיא ציירה את מספר היחידות הנכון בצלע העליונה והשמאלית (שבהם היו סימנים מוחלשים שציינו את היחידות), אבל בצלע הימנית והתחתונה (בהן לא היו סימני יחידות) היא ציירה מספר שגוי של יחידות. הכישלון שלה בשמירה על אורך היחידה בולט מאוד.

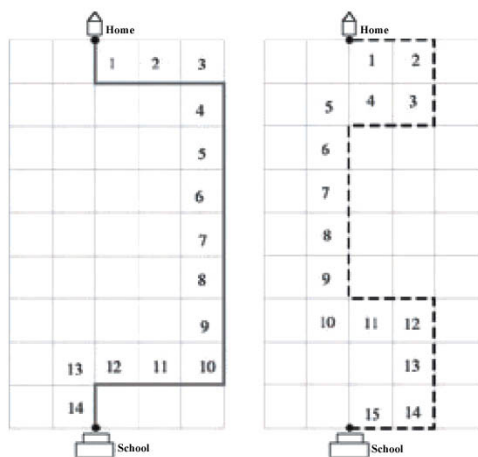
**משימה 5.** כשנשאלה כמה מקלות נדרשים כדי לכסות את המקל האפור, סו (כיתה ב') ציירה קטע מאונך מצידו הימני של המקל השחור עד לסימן המוחלש השלישי שעל המקל האפור ואמרה שהמקל השחור "לוקח שלושה סימנים מוחלשים". סו המשיכה לעבור מימין לשמאל וספרה "1,2,3" עבור הסימנים הרביעי, החמישי והשישי, סימנה את השישי "יש אחד". היא ספרה "1,2,3" עבור הסימנים השביעי, השמיני והתשיעי, ואמרה "יש אחד". כעת היא חזרה לתחילת המקל האפור, וכשהיא מצביעה על כל חלק שיצרה, ספרה "1,2,3". במשימה זו, סו עשתה טעות שתלמידים נוהגים לעשות. מלכתחילה, היא התמקדה על הסימנים



המוחלשים ביחס ליחידת האורך (המקל השחור). אולם לאחר מכן, במאמץ שלה לעשות חזרה על יחידת האורך על ידי ספירת הסימנים המוחלשים, היא התמקדה רק בסימנים המוחלשים ואיבדה את הקשר עם יחידת האורך.



**משימה 7.** ג'ון (כיתה ב') צייר קטעים מסביב למלבן, כשהוא יוצר וסופר 15 קטעים. למרות שעשה חזרה על יחידת אורך, הוא לא היה מסוגל להתאים בין היחידות באופן מספק ולשמר יחידת אורך קבועה.



**משימה 2.** כאשר נשאלה איזה מסלול מן הבית לבית ספר קצר יותר, שרון (כיתה ד') ספרה ריבועים 1-14 לאורך המסלול האפור, ולאחר מכן 1-15 ריבועים לאורך המסלול המקווקו. לאחר מכן היא אמרה: "אז הקו האפור קצר יותר משום שיש לו פחות ריבועים". כפי שרואים מהספירה שלה מסביב לפינות, שרון לא ספרה יחידות אורך במסלולים, אלא ריבועים שהופיעו לאורך המסלול. היא לא השתמשה בריבועים כייצוגים של יחידות האורך.

## מדידה רמה 2: חזרה מדויקת על יחידה

כאשר תלמידים עושים חזרה על יחידת אורך לאורכו של עצם, הם מתאימים באופן הולם את המיקום של כל יחידת אורך עם המיקום של היחידה שבאה אחריה, כדי למנוע מרווחים, חפיפה, או שינויים באורך היחידה. כמו ברמה הקודמת, תלמידים עושים חזרה על שני סוגי יחידות. בסוג הראשון היותר מתוחכם, התלמידים יצרו הפשטה מספקת ובידוד של היחידות כך שהם יכולים לעשות חזרה מפורשת על יחידות אלה. ואז, כאשר הם עושים חזרה על יחידות, הם מציירים קטעים בקווים ולא בריבועים, מלבנים או בדידים. בסוג השני והפחות מתוחכם, תלמידים משתמשים בצורות כמו ריבועים, מלבנים או קוביות. עם זאת, בניגוד למה שקורה ברמה הקודמת, ברמה 2 התלמידים עושים התאמה ברורה בין צורות אלה ליחידות אורך. כדי להמחיש את ההבדל בין שימוש בריבועים למדוד אורך ברמות 1 ו-2, התבוננו בספירת היחידות המופיעה באיור 8. בצד שמאל, כחשיבה טיפוסית של רמה 1, יש דוגמה של ספירת ריבועים כריבועים. הריבועים שנספרים אינם מתאימים כראוי ליחידות האורך היוצרות את המסלול. לעומת זאת, בצד ימין, באופן טיפוסי לרמת חשיבה 2, הריבועים שנספרים הם בהתאמה מדויקת עם יחידות האורך שיוצרות את המסלול (החיצים מצביעים על אורכי היחידות המתאימים לריבועים). למעשה, מכיוון שתלמידים החושבים ברמה 2 מתמקדים באופן ספציפי על האורך – ולא, למשל, על ריבועים כריבועים – הם אינם טועים באופן עקבי בשעה שהם סופרים יחידות מסביב לפינות (ראו איור 9).

**איור 8: רמות מ 1 ו-2 – ספירת יחידות**

רמה 1

רמה 2

**איור 9: רמה מ 2 – חזרה מדויקת על יחידה**

**משימה 6.** מרי (כיתה ד) ציירה מלבנים קטנים מסביב להיקף של המלבן הגדול בזמן שספרה מ-1 עד 16. כל מלבן שציירה היה באותו אורך והקצוות שלו תאמו את הנקודות שהיו נתונות על המלבן הגדול. כאשר נשאלה כיצד הגיעה ל-16, היא הגיבה, "אני חשבתי על זה [מצביעה על המקל הנתון], וניסיתי למדוד אותו במידה שההוא היה".

**משימה 6.** הת'ר (כיתה ג') אמרה: "זה [המקל השחור] הוא בערך באורך שבין שתי [נקודות] אלה כאן". לאחר מכן היא ציירה מסלול מסביב למלבן, בכל פעם קטע אחד, בין כל שתי נקודות בעלות מרחק שווה. היא התעלמה מהנקודות הנוספות שלמעלה ובצד ימין. הת'ר ספרה ומיספרה את הקטעים בשעה שציירה אותם, וקיבלה את התשובה 16.



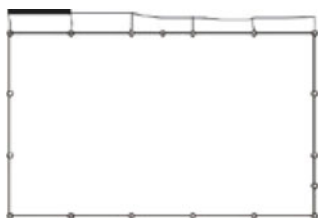
### מדידה רמה 3: ביצוע חישובים על חזרות

תלמידים קובעים חלק ממדידות האורך ללא ביצוע חזרה מפורשת על יחידות אורך. הם מתחילים בחזרה וספירה על יחידות אורך, ואחרי זה פועלים על התוצאות שקיבלו באופן מספרי ולוגי.

**פעולות לוגיות (הסקת מסקנות).** במשימה 6, מאראת, תלמיד כיתה ב', צייר 5 יחידות מלבניות לאורך החלק העליון של המלבן, ואז הצביע על הצלע התחתון של המלבן ואמר, "עד כאן 10". המורה שאלה אותו מדוע הוא לא ספר כלום למטה (ראו איור 10). מאראת, ללא ספק, יצר משמעות למדידה של הצלע התחתונה, לא ע"י חזרה על יחידות אלא על בסיס של תכונות המלבן (שלצלעות נגדיות יש אורך שווה). הוא החליף חזרה בהסקה.

**פעולות מספריות (חיבור, חיסור, כפל, חילוק של יחידות חוזרות או של מדידות מוסקות).** בהמשיכו עם אותה בעיה, אחרי שמאראת קבע את אורכי כל הצלעות של המלבן – 3,3,5,5 – הוא ביצע חישוב על המספרים וחיבר אותם כדי למצוא את ההיקף. (איור 11 מראה עבודה של תלמיד אחר).

#### איור 10: רמה 3 - פעולות לוגיות (הסקת מסקנות)



משימה 6. מאראת: "בגלל שאם זה היה 5 למעלה, אז זה יהיה 5 למטה, בגלל שזה אותו אורך..."  
מורה: "מה גרם לך לחשוב שהם הולכים להיות אותו דבר?"  
מאראת: "זה לא היה באמת כמו מלבן אם הם לא היו באותו אורך."

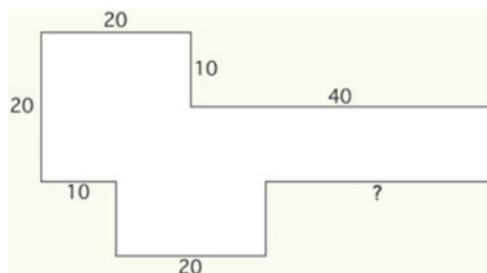
#### איור 11: רמה 3 – פעולות מספריות (חיבור)

**משימה 8.** בהינתן 4 בדידים צהובים לאורך קטע אלכסוני, מייק (כיתה ב') צייר 5 קטעים קטנים בצידו של הבדיד הצהוב ואמר, "חמש בכל אחד מהם", כשהוא מציין בזה שבדיד צהוב אורכו 5 ס"מ. הוא הסיר את הבדיד הצהוב הראשון מן הנייר, צייר עוד קטע אחד ליד הבדיד הצהוב השני, והסיר את כל הבדידים. הוא אמר, "עשרים, בדיוק כמו שחשבת". כאשר נשאל כיצד הגיע ל-20, הוא אמר, "אלה [הבדידים הצהובים] הם 5, ויש 4 מהם; ארבע חמשות שווה עשרים." לאחר שמייק עשה חזרה על 5 יחידות אורך בבדיד הצהוב הראשון, הוא הסיק שחזרות דומות על הבדידים האחרים יסתכמו ב-5 יחידות בכל אחת. ואז הוא עשה פעולה מספרית על המדידות שהסיק ע"י כפל של 5 ב-4.

### מדידה רמה 4: ביצוע חישובים על מדידות מספריות

תלמידים פועלים באופן מספרי או הסקי על מידות של אורך ללא ביצוע חזרה על יחידות אורך. הם מסיקים אודות האורך מסקנות ויזואליות המבוססות על תכונות ומורכבות, לעיתים קרובות ע"י ביצוע טרנספורמציות או על ידי שימוש בתכונות של צורות גיאומטריות. ברמה זו, הגבוהה ביותר של חשיבה על מדידות, תלמידים משלבים באופן מלא ומיישמים את התהליכים מרמה 2 ללא מדידה עם החשיבה שלהם על מדידה. ההבדל בין רמה 2 ללא מדידה ורמה 4 של מדידה, הוא שברמת מדידה 4 תלמידים מסיקים מסקנות אודות מדידות מספריות של העצמים ולא אודות העצמים עצמם. ברמה זו, החזרה נמצאת ברקע. זה נראה כאילו החזרה כבר בוצעה. (ראו איור 12).

### איור 12: רמה מ 4 – ביצוע פעולות על מדידות מספריות



**משימה 10.** פרד (כיתה ה'): הרוחב כאן הוא 20 ועוד 40 שווה 60. [מחבר את האורכים של שתי הצלעות העליונות במאוזן]. אז הצלע החסרה הוא 60-30, שווה 30. פרד הסיק מסקנות הנגזרות מהתכונות של צורות; הוא ביצע פעולות מספריות על מדידות תוך שימוש בחיבור ובחיסור.

**משימה 8.** קטי (כיתה ג'): "אני חושבת 20... בגלל שצריך 4 בדידים צהובים כדי למלא את כל הקו הזה ויש 5 ס"מ בכל בדיד. וחמש כפול ארבע הם עשרים." קטי השתמשה בהסקת מסקנות ובכפל, אבל לא בחזרה על יחידה.

## סיכום

מסגרת רמות התחכום שהוצגה במאמר זה מהווה שיטה בעלת שלמות מושגית המבוססת על מחקר והמאפשרת להבין את דרכי החשיבה של תלמידים על מושג האורך. ברגע שניתן ל"אתר" היכן נמצאים התלמידים במסגרת הרמות - במסלול שהם בונים לעצמם לגבי מושג האורך - יש לנו מושג הרבה יותר טוב לגבי האופן שבו הם לומדים על אורך – ובהתאם, כיצד יש ללמד אותם. הרמות עוזרות לנו גם להבין טוב יותר את הקשיים שבהם נתקלים תלמידים בשעה שהם מנסים להבין את מושג האורך ואת הצעדים הקטנים שרבים מהם חייבים לעשות כדי להגיע לשליטה של מושג קריטי זה. לכן, מסגרת הרמות הינה כלי חשוב לשיפור ההוראה וההערכה המעצבת, באותה מידה שהיא כלי יעיל לאבחון וטיפול בקשיים של תלמידים בלימוד מושג האורך.

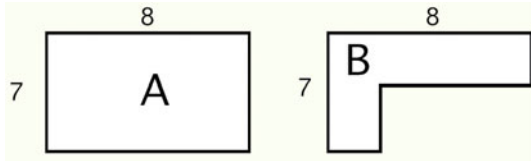
## ביבליוגרפיה

- Battista, Michael T. "The Development of a Cognition-Based Assessment System for Core Mathematics Concepts in Grades 1-5". Project Funded by the National Science Foundation, 2001.
- , "Applying cognition-Based Assessment to Elementary School Students' Development of Understanding of Area and Volume Measurement." *Mathematical Thinking and Learning* 6, no. 2 (2004): 185-204.
- Bransford, John D., Ann L. Brown, and Rodney R. Cocking. *How People Learn: Brain, Mind, Experience, and School*. Washington, DC: National Research Council, 1999.
- Fennema, Elizabeth, Thomas P. Carpenter, Megan L. Franke, Linda Levi, Victoria R. Jacobs, and Susan B. Empson. "A longitudinal Study of Learning to Use Children's Thinking in Mathematics Instruction." *Journal for Research in Mathematics Education* 27, no. 4 (1996): 403-434.



**משימה 11**

לאיזו צורה יש היקף ארוך יותר, או שלשניהם יש אותו ההיקף?

**משימה 10**

מצאו את אורך הצלעות החסרות.

