לימוד גיאומטריה: גילויים אחדים הנובעים מכתיבת מורים

Learning Geometry: Some Insights Drawn from Teacher Writing

מאת: Deborah Schifter

מתוך: Teaching Children Mathematics, Vol. 5, No. 5, February 1999, pp. 360-366

תרגום: מיכל סוקניק

יום אחד קיבל כל אחד מתלמידי כיתה ב׳ של המורה ג׳ניפר רוט מעטפה. היא הכילה שתים עשרה צורות - סוגים שונים של משולשים ומרובעים - גזורות מנייר קרטון. רוט נתנה לתלמידיה את ההוראות הבאות: ״התבוננו בצורות אלה ונסו למצוא דרכים אחדות למיין אותן לקבוצות. עבדו לבד במשך כמה דקות, ולאחר מכן שוחחו עם שכנכם לגבי מה שהחלטתם״.

כשהילדים החלו לעבוד, היו כאלה שלא יכלו לחכות מבלי לשוחח על הצורות עם חבריהם, אולם אחרים רוקנו בשקט את מעטפותיהם והחלו להזיז את צורותיהם על פני השולחן. לאחר כמה דקות החלה רוט להקשיב לשיחות התלמידים כשהיא עוצרת אותן לעיתים קרובות כדי לשאול שאלות.

דנה וקייסי קיבצו יחד ריבוע, מעוין ומלבן - שצלעותיו לא היו שוות בדיוק, אבל כמעט שוות. דנה הסבירה: ״אנחנו חושבים על איך שהדברים שווים. את רואה, הצורות האלה הן כולן שוות״. קייסי הוסיפה: ״אותו אורך, כמו ריבוע״. רוט רשמה לעצמה את שימוש הבנות בשפה – ״הצורות כולן שוות״, שמשמעותו היא שהצורות הן שוות צלעות - ואז הנהנה בראשה והמשיכה הלאה.

אולה העירה שהמקבילית יכולה לבוא עם הטרפז. ״את רואה, זה מתאים כאן״, היא אמרה כשהניחה צורה אחת על השנייה כדי להראות כיצד הזוויות היו שוות.

כשעצרה ליד שולחנם של לאה וקווין, ראתה רוט שהם חילקו את הצורות שלהם לשתי קבוצות, ״משולש״, ו-״לא משולש״. תחת הכותרת ״לא משולש״ הם שמו ריבוע, מלבן ומקבילית. תחת ״משולש״ היו שלושה משולשים שונים וטרפז. הסידור השגוי של הטרפז הפתיע את רוט, משום שבשיעור מתמטיקה האחרון שלהם, היה להם דיון ארוך לגבי ההגדרה של **משולש**: ״למשולש יש שלוש צלעות ושלוש נקודות״. רוט שאלה את לאה וקווין מדוע הם סידרו את הטרפז ביחד עם המשולשים. הילדים היססו, וההסברים שלהם לא היו ברורים, אך הנקודה העיקרית שלהם היתה שהם **הרגישו** שזה כמו משולש. לאה אמרה, בהצביעה על הטרפז: ״זה נראה כמו משולש שהחלק העליון שלו חתוך״.

מיון צורות על פי "גשטלט" או על פי תכונות

למרות שגם אנו איננו יכולים להיות מופתעים מן הרעיון של לאה וקווין, שטרפז צריך להיות מסווג כמשולש, המחקר בעשרות השנים האחרונות מציין שחשיבתם אינה יחודית. למעשה, התצפיות בילדים אלה עולות בקנה אחד עם ממצאי החוקרים. הילדים מזהים בתחילה צורות על פי ה״גשטלט״, המראה הכללי שלהן. בתיאור הצורה הם משתמשים לרוב באב-טיפוסים וויזואליים, לדוגמה: משולשים נראים כמו ״כובעים של מכשפה״. הם לא שמים לב לתכונות גיאומטריות או

לתכונות האופייניות לסוג הצורות המיוצגות. במהלך הבנתם הגיאומטרית המתפתחת, הילדים חייבים להתנסות ב״שינוי״ בחשיבתם - יש חוקרים המתארים זאת כקפיצה לרמה מושגית חדשה – עליהם לזהות ולאפיין צורות על ידי תכונותיהן. רמות אלה הן השתיים הראשונות מתוך חמש, שתוארו על ידי פייר ואן-הילה ודינה ואן-הילה גלדוף. (לדיון נוסף, ראו Clements and Battista 1992, ו- Crowley 1987).

בכיתתה של רוט, נראה שכמה ילדים עברו את השינוי הזה. דנה וקייסי זיהו את התכונה של ״צלעות באורך שווה״ ובדקו לאלו מרובעים יש תכונה זו. אולה החלה להסתכל על זוויות כשציינה שהמקבילית והטרפז במעטפה שלה יכולים להיות יחד משום שהם ״מתאימים״. ג׳יק, ילד נוסף, החל לחשוב על זוויות ישרות בכך שזיהה אלו צורות יכולות להתאים לפינה של הדף שלו.

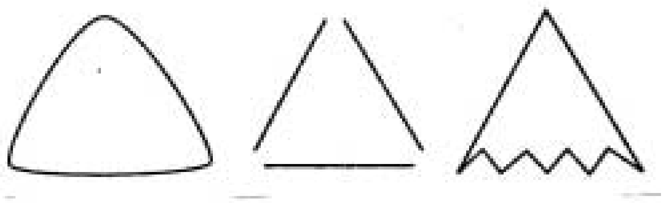
לאה וקווין עדיין לא עברו את השינוי הזה. למרות שהכיתה דיברה על כך שלמשולשים יש ״שלוש צלעות ושלוש נקודות״, הם עדיין שמו לב לאופי דמוי המשולש של הטרפז, במקום לתכונות שלו. למרות שחבריהם לכיתה של לאה וקווין כבר עברו קדימה לחשוב במונחים של תכונות, הרי ששני ילדים אלה לא נחשבים כתלמידי כיתה ב׳ איטיים באופן חריג.

ללורי סנפורד, עמיתה של רוט בבית ספר אחר, היתה התנסות דומה כשביקשה מתלמידי כיתה ב׳ שלה לחשוב על משולשים. למרות שגם הם כבר דנו בהגדרה של **משולש**, הרי שכאשר נתנו להם אוסף של צורות מצוירות, חלק מהילדים טען שכל הצורות שבציור 1a הן משולשים. לעומת זאת, מאחר שהתחושה שלהם לגבי משולש היתה של צורה המזכירה כובע של מכשפה, הם טענו שהצורות המופיעות בציור 1b **אינן** משולשים.

רעיונות אלה נפוצים לא רק בקרב תלמידי כיתה ב׳. ישנה עדות לכך שלעיתים קרובות הם קיימים הרבה מעבר לכיתות בית הספר היסודי (Clements and Battista ,1992).

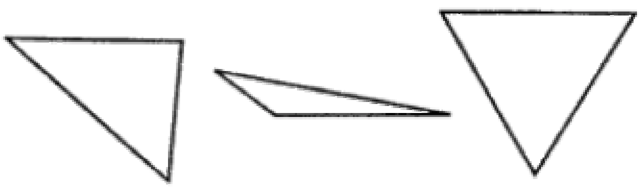
ציור 1

ילדים מכיתה ב׳ האמינו שצורות אלה הן משולשים



(a)

ילדים מכיתה ב׳ לא האמינו שצורות אלה הן משולשים



(b)

בדיקת חשיבת הילדים בקונטקסט של השיעורים

מחקר על ההבנות הגיאומטריות של ילדים עודד התבוננות בנושאים אלה, אך איננו יודעים הרבה לגבי מה שקורה לאורך זמן בכיתות שבהן תלמידים לומדים רעיונות גיאומטריים. למעשה, מאחר שבמשך שנים רבות, מעט מאוד גיאומטריה נלמדה לפני בית הספר התיכון, רוב המחקר מיידע אותנו רק לגבי התוצאות של הזנחה זו. לפיכך, כתחום בפני עצמו, יש לנו הרבה מה ללמוד: מהן הדרכים שבהן ההבנות הגיאומטריות של ילדים באות לידי ביטוי בקונטקסט של הכיתה? אלו סוגים של שיעורים ודיונים עוזרים לילדים לפתח קווי מחשבה מתוחכמים יותר? כיצד נראית ההתקדמות כשהרעיונות נחקרים לאורך זמן?

לאור העובדה שתוכניות הוראה בארצות הברית מתחילות רק עתה לכלול יחידות משמעותיות בגיאומטריה בכיתות היסוד, חשוב במיוחד שמורים יתבקשו לתת אינפורמציה לגבי שאלות אלה. אחרי הכל, המורים נמצאים עם תלמידיהם כל יום, שמים לב להתפתחות הרעיונות שלהם ומתאמצים למצוא כיצד לעזור לתלמידיהם להתקדם הלאה.

לצורך מטרה זו, תוכנן פרוייקט בן ארבע שנים (1993 - 1997) של התפתחות מקצועית ומחקר, הנקרא "ללמד לרעיונות גדולים" (Teaching to the Big Ideas - TBI), מטרתו היא לקבץ ביחד את הרעיונות של מורים וחוקרים לטיפול ברעיונות הגדולים של המתמטיקה, העולים בקונטקסט הכיתתי, באופן שבו מורים פותחים את הוראתם לרעיונות התלמידים (Schifter, Russell, and Bastable, in press). פרוייקט זה נערך בשיתוף פעולה בין המרכז להתפתחות ההוראה במרכז להתפתחות חינוכית, סדנה למורים בקולג' מאונט הוליוק, המרכז למתמטיקה ב- TERC וארבעה עשר בתי ספר במסצ'וסטס.

פרוייקט ה- TBI העסיק שלושים ושישה מורים של בית הספר היסודי בתוכנית אינטנסיבית במסגרות של השתלמויות קיץ, מפגשים דו-שבועיים אחרי בית הספר , וביקורים דו-שבועיים בכיתות. במהלך התוכנית חקרו המשתתפים תוכן מתמטי ועשו רפלקציה על אופי המתמטיקה, כיצד היא נלמדת וההשלכות לגבי ההוראה של עצמם בעקבות הבנות חדשות לגבי נושאים גדולים אלה. הפרוייקט חקר את חשיבת התלמידים שהתגלתה בכיתותיהם בזמן שהמורים שינו את הוראתם. במהלך השנה הרביעית של הפרוייקט, הנחו המורים השתלמויות עבור עמיתים בבית ספרם, המבוססות על תוכנית לימודים להתפתחות מקצועית, שנוצרה בפרוייקט (1998, Schifter, Bastable, and Russell).

הפרוייקט פיתח עבור מחקריו שיטה של "כתיבת אפיזודות". מורים כתבו על אפיזודות מההוראה שלהם פעמיים בשנה הראשונה, וכמשימה חודשית קבועה בשנה השנייה ובשנה השלישית. המשימה היתה לכתוב חיבור באורך שניים עד חמישה עמודים, שתיאר אספקט מסוים של החשיבה המתמטית של תלמיד אחד או יותר, תוך שימוש בשכתובים של השיחה בכיתה או בדוגמאות של עבודות כתובות של תלמידים. הכוונה היתה, שדרך האוסף של האפיזודות, המייצג שלושים ושש כיתות מהגן ועד כיתה ו', הפרוייקט יוכל לזהות נושאים קוגניטיביים משותפים ולעקוב אחר התפתחות של רעיונות מעבר לכיתות. הטקסט המלא של דוגמה של אפיזודה כזו מצורף כנספח.

הסצנות הכיתתיות שלהלן באות מתוך כתיבה זו. הן מדגימות כיצד ממצאי מחקר כלליים לגבי ההתפתחות של הבנה גיאומטרית בכיתות הנמוכות, מופיעים בפרטים של הכיתה. אפיזודות אחרות, הבאות מכיתות אחרות, מרחיבות את ההבנה שלנו בנושאים העולים כשהילדים ממשיכים את הלימוד שלהם העוסק בתכונות של צורות גיאומטריות, לכיתות הגבוהות יותר של בית הספר היסודי.

מורות מדגימות את האתגרים

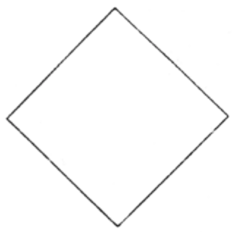
לתלמידי כיתה ד׳ של ג׳ודי בישוף היו רעיונות רבים הדומים לאלה של תלמידי כיתה ב׳ של סנפורד.

כשגם הם חשבו שצורות כמו אלה בציור 1b אינם משולשים, הקדישה בישוף זמן להרחיב את הבנתם. כאשר התלמידים הגדירו משולשים כצורות עם ״שלוש פינות ושלוש צלעות והפינות חייבות להיפגש והקווים חייבים להיות ישרים״, הם למדו שמשולשים יכולים להיות מוטים, מהופכים, מתוחים או מכווצים, ועדיין להישאר משולשים.

כשהתלמידים הבינו, הם המשיכו לצורות אחרות. הגדרת הריבוע, על פי דיווחה של בישוף, היוותה בעיה גדולה יותר. הילדים התחילו די טוב: ״לריבוע יש ארבע פינות ו׳צלעות שוות׳״ - כלומר לכל הצלעות יש אותו אורך. אבל עד כמה היו תלמידיה גמישים ביישום ההגדרה שלהם? כדי לבדוק זאת, בישוף ציירה על הלוח את הצורה המופיעה בציור 2. ״כן״, הסכימו התלמידים, ״זהו ריבוע נטוי הצידה״. כמו במשולשים, המיקום של הריבוע אינו חשוב - הוא יכול להיות מסובב, או ״נטוי הצידה״, או ״עקום״, ועדיין להישאר ריבוע.

ציור 2

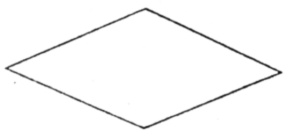
תלמידי כיתה ד׳ של ג׳ודי בישוף קראו לצורה זו ריבוע



לאחר מכן ניסתה בישוף צורה נוספת: מעוין מוארך, כפי שמופיע בציור 3. אך לתדהמתה, כל התלמידים בכיתתה הסכימו לכך שגם צורה זו היתה ריבוע. ״זה רק ריבוע עם פינות ׳חדות׳״, הם אמרו. ״לריבוע רגיל יש פינות ׳שטוחות׳״. צורה זו היתה ״ריבוע מעוך.״

ציור 3

תלמידי כיתה ד׳ קראו גם לצורה זו ריבוע



במבוכתה ביקשה בישוף מכל תלמיד לצייר ריבוע. כשכולם ציירו "ריבועים רגילים, עם פינות שטוחות", היא שאלה אותם, "מדוע אתם חושבים שכל אחד צייר ריבוע 'רגיל'"? "ככה למדנו על ריבועים בכיתות הנמוכות יותר", הם הסבירו. "אבל עכשיו אנחנו יודעים שישנם סוגים שונים של ריבועים".

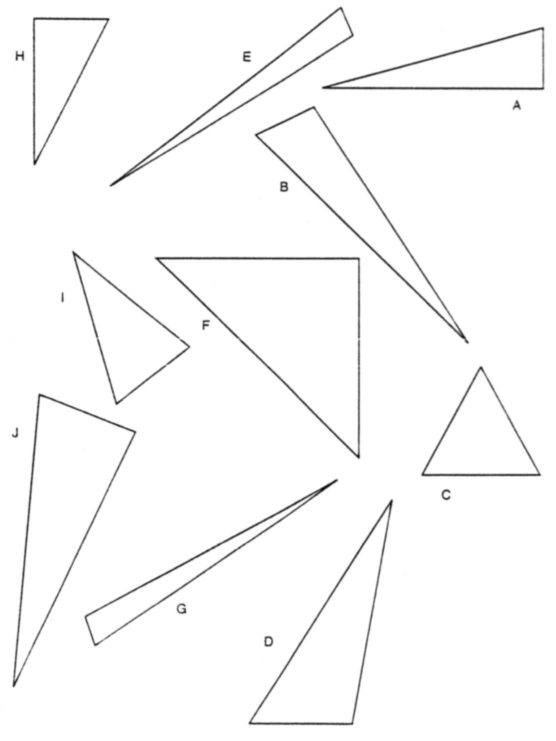
מנקודת מבטם של תלמידיה, השיעורים של בישוף הפכו את רעיונותיהם לגבי משולשים - תרתי משמע. משולש יכול להיות הפוך ועדיין להיות משולש. משולש יכול להיות "מעוך" ועדיין להיות משולש. ריבוע יכול להיות הפוך ועדיין להיות ריבוע. ולכן, באופן אנלוגי, מדוע אי אפשר שריבוע יהיה מעוך ועדיין יהיה ריבוע? ילדים אלה עדיין לא היו מודעים לכך שבשונה מהזוויות של משולש, הזוויות של הריבוע אינן יכולות להשתנות, על פי ההגדרה. בישוף ידעה מה צריך לעשות בשיעוריה הבאים.

כפי שאפיזודה זו מראה, המעבר ממיון צורות המבוסס על גשטלט, ללימוד התכונות, הינו תהליך מורכב. אפילו כשהתלמידים מתחילים להבין שעליהם להסתכל על מספר הצלעות, אורכי הצלעות והזוויות של מצולע, הם צריכים לשים לב להבדלים קלים ולדקויות. יתר על כן, כפי שדוריס פלין מתארת באפיזודה הבאה, מעבר מ"רמה" אחת לבאה אחריה אינו בא כצעד חד וסופי. במקום זאת, למשך תקופה ארוכה, הילדים מתנדנדים בין תפיסות ישנות וחדשות.

בדומה לסנפורד ולבישוף, פלין מתעדת את היום בו היא גילתה שלתלמידי כיתה ג' שלה היה דימוי מאוד מסוים לגבי מה שיכול להיות משולש. כשקיבלו אוסף של משולשים שונים המצוירים על הלוח (ראו ציור 4), כל עשרים וחמישה תלמידיה הסכימו ש"רק אחת מהן [צורה C] היא משולש".

ציור 4

תלמידי כיתה ג' טענו שרק אחת מצורות אלה, צורה C, היא משולש



פלין שאלה את הכיתה: "מה לגבי הצורות האחרות האלה"? וכך היא כותבת על הדרך בה הגיבו:

"לא", אמרה סוזן. "אפשר אולי לחשוב שחלק מהאחרים הם גם כן משולשים. אבל אם את חושבת שהם משולשים **אמיתיים**, אז את טועה". הכיתה היתה מאוד להוטה לומר את כל הסיבות ולהסביר מדוע הם לא היו משולשים **אמיתיים**. הם היו מחודדים מדי, ארוכים מדי, משופעים מדי, שונים מדי, והכי גרוע: הילדים שפטו על פי אי הנחת שלהם מהתכונה שנקראה בפיהם "בכיוון הלא נכון".
נדרש לילדים די הרבה זמן כדי לנסות לומר מה גרם לצורה להיות משולש. לבסוף, הגענו למשפט: "שלוש צלעות ושלוש פינות שנראה **נכון**". בשלב זה פנינו לספר הלימוד במתמטיקה שבארון ובדקנו את המילון שבו כדי למצוא הגדרה למשולש. בספר הלימוד של Addison-Wesley היה כתוב: 'צורה במישור עם שלושה קטעים כצלעות'. שמחתי לראות בספר ציור שנראה כמו אחד המשולשים על הלוח שלי [ראו ציור 4, צורה D].
עכשיו הילדים היו תוססים. אם כל מה שצריך זה שלוש צלעות, הכיתה היתה מוכנה לקבל גם את קבוצת המשולשים שחלקם התחתון היה "במקום הנכון". בהדרגה, ובמהלך דיונים נוספים, הכיתה בדקה כל צורה והגיעה להסכמה שכולן מתאימות לכללים, כך שכולן חייבות להיות משולשים. היתה אווירה של תדהמה. חלק מהילדים נראו גאים בעצמם על כך שגילו משהו חדש. קטי אפילו אמרה משהו כמו: "מי היה יכול לתאר לעצמו שדברים כאלה יהיו משולשים"?

ודאי נחשוב שדיון מקיף שכזה לגבי משולשים היה צריך להטמיע היטב מושגים חדשים בראשי התלמידים בכיתתה של פלין - הרי הילדים עצמם הכירו בכך שהם למדו משהו חשוב ויכלו לתאר כמה מפתיע זה היה. אולם כמה שבועות מאוחר יותר, פלין גילתה שהנושא עדיין לא נטמע:

כאשר שוחחתי עם אחד מתלמידי היותר טובים במתמטיקה, הוא אמר על משולש ש"הוא יכול להיות משולש, אם הצלעות היו זזות קצת". מייד חשבתי: עצור, אנחנו כבר 'כיסינו' זאת! עכשיו תהיתי מה הכיתה באמת הרוויחה מכך שנועצנו בספר ומצאנו את ההגדרה האמיתית.
כמה שבועות לאחר מכן, שמתי שמונה משולשים שונים על הלוח, וביקשתי מכולם לרשום, מבלי שאחרים יראו, מה הם חושבים לגבי הצורות. לא אמרתי כלל את המילה **משולש**. התוצאות הראו שתלמידים רבים לא זזו מחשיבתם הקודמת. המשולש הסטנדרטי המוכר, שווה הצלעות, עם הבסיס למטה, היה משולש.לגבי אלה המכוונים בכל כיוון אחר חוץ מאשר כלפי מעלה, הם טענו ש"אפשר היה לתקן" אותם כך שיהיו משולשים, אם הם לא היו ארוכים מדי, מחודדים מדי, או 'מוזרים מידי'". הוסבר לי ש"מוזר מדי זה כאשר יש לו יותר מדי חוסר שיווי משקל או הבדל גדול מדי בין הגודל של הצלעות".

עד כמה ששיעורה הקודם של פלין היה פעיל והתמקד בתלמידים, ההבנות שנראה שהיו לתלמידים בסוף השיעור באותו יום לא נשארו קבועות. האם הם שכחו? האם היו מבולבלים? או האם פלין העריכה לא נכון את הבנתם באותו השיעור?

כשאנו נחשפים לתגליתה של פלין, אנו ודאי מצפים שהיא תהיה מלאה חששות. האם תלמידיה אינם מסוגלים ללמוד? האם ההוראה שלה לא היתה אפקטיבית? או האם היה זה משהו אחר? למעשה, פלין לא חששה, היא היתה סקרנית. "מה היה קשה לתלמידים ברעיונות אלה"? היא תהתה, ובמקום להרהר בשאלה זו לבדה, היא הפנתה אותה ישירות למקור:

סיפרתי לכיתה שאני מקדישה שנים בניסיון לגלות כיצד תלמידים לומדים רעיונות במתמטיקה. תמיד ניסיתי להגיע לשורש של הרעיונות הקשים עבור ילדים ולשאלה מדוע רעיונות אלה הם קשים. הופתעתי מכך שהשיחה נטתה לעלות לרמה גבוהה יותר ושהילדים היו להוטים לחשוב יחד איתי על שאלתי. לין היתה מסוגלת לומר שזה היה באמת קשה לחשוב על המשולשים השונים כעל משולשים, משום שהיא הרגישה כאילו ידעה דרך אחת הכי טוב, והיא ידעה זאת כל חייה. וואו! קטי אמרה שחשה שהיא ממש צריכה לפרוץ את החשיבה הקודמת שלה ולתת לרעיונות חדשים להיכנס לראשה. שוב וואו! אחרים דיברו ברצון על הצורך להסתכל באמת במבט חדש על דברים. חלק אמרו שצריך להזיז דברים ישנים הצידה כך שיהיה מקום לדברים חדשים שמגלים. כמה ציינו ש"המשולש 'הרגיל' אולי תמיד יראה כמו 'יותר משולש' מאשר חלק מהמשולשים האחרים". אני חושבת שהם צודקים.

ילדים צעירים אלה תיארו בבירור את ההתנסות שלהם בחוסר איזון (disequilibrium). דרושה עבודה קשה על מנת "לפרוץ מתוך" דרכי חשיבה ישנות, כדי ש"יהיה מקום לדברים חדשים שמגלים". המילים שלהם עוזרות לנו להבין מדוע כמה שיעורים מתוכננים היטב, המתמקדים בתלמיד, לא יכולים להבטיח שהתלמידים יעברו בצורה חלקה וסופית מגישה של גשטלט למיון צורות גיאומטריות, למיון על ידי תכונות.

כתיבת אפיזודות: שיטה לאיחוד למידה של מורים

למרות שאפיזודות אלה מדגימות חלק מהאתגרים העומדים בפני המורים כשעוסקים בגיאומטריה בכיתות של בית הספר היסודי, אין הן צריכות לרפות ידיים. הילדים המתוארים כאן הם בעלי חשיבה טובה, המעורבים באופן פעיל ברעיונות הנדונים. הם מסייעים למוריהם לזהות את הנושאים המתמטיים הדורשים תשומת לב - היכן צריך להשקיע מאמץ. לפיכך, סיפורים אלה עוזרים לתכנן הוראת מתמטיקה המוציאה מהתלמידים את רעיונותיהם, ובונה על רעיונות אלה על מנת לפתח קונספציות חזקות ויציבות יותר.

אפיזודות אלה גם מדגימות כמה חשוב עבור המורים למצוא שיטות לאחד את מה שהם לומדים מההוראה שלהם עצמם. באמצעות השלמת התמונה לגבי מה שנדרש כדי לסייע לתלמידים לקדם את הבנתם הגיאומטרית, המורים יכולים להיות מוכנים טוב יותר לתמוך בתהליך הזה. ההכרה במורכבות של הנושא, יכולה גם להביא לכך שיהיו למורים דימויים מגוונים יותר לגבי מה שגורם להתקדמות.

כתיבת אפיזודות אינה באה להחליף צורות קונבנציונליות יותר של מחקר. איסוף ועיבוד נוקשה וסיסטמטי של נתונים הינו הכרחי. יחד עם זאת, כהשלמה לעבודה כזו, כתיבת אפיזודות על ידי מורים - עם דגש מיוחד על הקונספציות המתמטיות של תלמידים - יכולה לתרום לבסיס הידע של התחום ולסייע לגשר על פני הפער שבין מחקר ויישום.

המשתתפים בפרוייקט TBI נוכחו לדעת שכתיבת אפיזודות מתאימה במיוחד למורים בכיתות. מתוך הכרה בכך שזה גוזל זמן - מצרך יקר בחייהם של מורים רבים - מורים אחדים דימו זאת להיצמדות למשטר של התעמלות. ברגע שמחליטים על המחויבות, ההתעמלות מביאה סיפוק ושווה את המאמץ. מורים מדווחים על כך שהם מעריכים את התירוץ לפנות את ראשם מדאגותיהם הרבות, בזמן שהם מתרכזים למשך שעה בחלק קטן בלבד של היום בסוגיות - מה כל ילד אמר? למה הוא התכוון בזאת? מה הרעיון שהילדה עוסקת בו? והם מוצאים שכתיבת אפיזודות מכוונת את האוזן. הם נעשים מקשיבים טובים יותר, וכתוצאה מכך תלמידיהם הופכים להיות מתדיינים מתמטיים חושבים יותר. האפיזודות המוצגות במאמר זה תורמות לתמונה המתגלה של ילדים המפתחים הבנה של גיאומטריה, וסוגי ההוראה שיכולים לתמוך בה. קבצים אחרים של אפיזודות שנוצרו בפרוייקט TBI, מדגימים את התפתחות ההבנה של תלמידים בתחומים כגון ערך מקום וחישובים, משמעות הפעולות במספרים שלמים ובשברים, מדידות, ייצוג נתונים וחשיבה אלגברית ראשונית - (Schifter, in press; Schifter, Bastable and Russel 1998) Bastable and Schifter, in press; (Scifter and O'Brian 1997; Sweeney 1998). הם מציעים התחלה. נותר הרבה מה לעשות.

נספח

דוגמה לאפיזודה מכיתה ד'

התלמידים מתבוננים בנייר שעליו משורטטים תשעה מרובעים (ראו ציור 5). אני מבקשת מהם לחשוב על הצורות, לשוחח עם שכניהם ולהחליט אלו צורות לדעתם הם ריבועים ואלו לדעתם הם מלבנים. במסגרת התכנון שלי לעבודתי עם קבוצה זו של שמונה תלמידי כיתה ד', החלטתי להתחיל בפעילות זו, שתכריח את התלמידים ליצור הגדרות הן למלבנים והן לריבועים. קיוויתי לקרוא תיגר על ההגדרות הנוכחיות, הפשטניות שלהם, אלו שנשאו איתם במשך כמה שנים. ניבאתי, ומאוד קיוויתי, שהסתכלות מקרוב על מרובעים תעלה נושאים אחרים, עשירים יותר, כמו שטח, היקף, זוויות ויחסים בין מרובעים שונים. נושאים אלו ואחרים החלו לעלות מיד.

ג'וש: "אני רואה אחד שהוא מלבן וריבוע ביחד". (הוא מצביע על צורה F, מלבן שזוגות צלעותיו קרובות באורכן, כך שנראה דומה לריבוע).

אדם: "מה זה D? זה לא ריבוע ולא מלבן".

בריאן: "האם B הוא ריבוע 'כי הוא לא ישר'"? (B הוא למעשה ריבוע המצוייר מעט בשיפוע על הנייר).

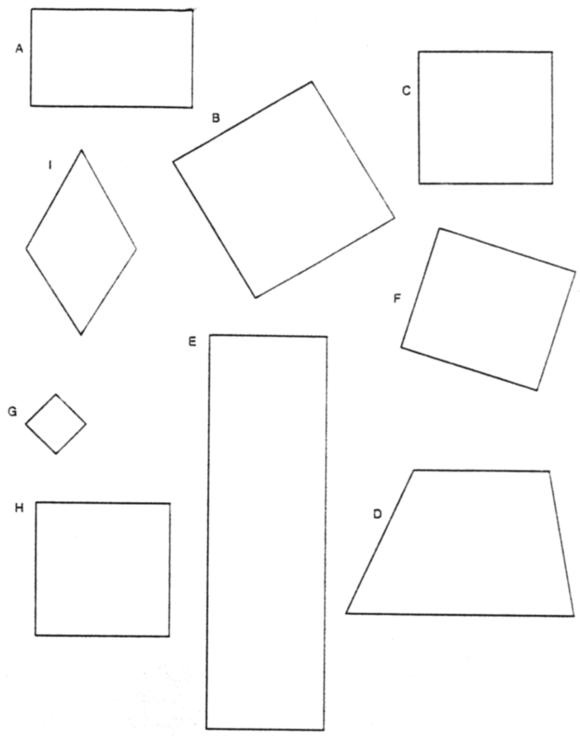
המורה: "מה אתה חושב"?

בריאן: "כן! (הוא מסובב את הנייר שלו כדי ליישר את הריבוע ומאשר את תשובתו בביטחון).

לאחר חמש דקות של עבודה בלבד, מישהו הודיע: "סיימתי"! כצפוי, קולות נוספים הצטרפו. הצעתי שהם יקדישו כמה דקות לבדיקת הרעיונות שלהם ולשיחה עם האחרים לגבי הצורות. לשמחתי, ההתמקדות מחדש עוזרת, ואני שומעת דיונים נוספים לגבי המרובעים.

ציור 5

ילדים בכיתה ד' דנו בעמוד זה של מרובעים



בעוד העבודה נמשכת, ג'וליאנה מציינת בקול רם: "D הוא לא ריבוע ולא מלבן". זה נראה לי מעניין שהיא חוזרת על מה שאדם אמר קודם, אך זה נשמע כאילו היא כרגע הגיעה למסקנה זו. כנראה שלא היתה מוכנה לחשוב על הערתו של אדם קודם לכן בשיעור. לעומת זאת, נראה שג'וש חשב על D מאז שאדם העלה את הרעיון. הוא אמר: "אני חושב שזה מלבן כי כל הצלעות שונות". אני מצליחה להשחיל באמצע שאלה, למרות שהשיחה פתאום עוברת במהירות: "למה אתה מתכוון, ג'וש, כשאתה אומר שכל הצלעות הן שונות"? "הצלע הזו שונה מהצלע הזו, ששונה מהצלע הזו, ששונה מהצלע הזו" הוא מסביר בהצביעו על כל אחת מצלעות הטרפז.

בריאן: "אני מדדתי את D בעפרון שלי, ושלושת הצלעות האלה הן באותו אורך (הוא מצביע על הצלע העליונה ושתי הצלעות שבצדדים), אבל זו (התחתונה) היא הרבה יותר ארוכה". (הוא מחזיק את האגודל והאצבע שלו במרווח של אינץ' בערך).

אמילי: "התחתונה היא הרבה יותר ארוכה. בערך באינץ'".

שיחה זו מדרבנת את שאר הקבוצה, וילדים מבקשים סרגלים. יש דיון קצר בשאלות האם לעגל, איזה קווים הם שברים ואיזה אינצ'ים שלמים, וכמה מדויקות צריכות להיות המדידות. ציפיתי שרוב הנושאים האלה יעלו, אבל החלטתי מראש שאני לא אמשיך אותם הפעם, אז אני נותנת להם לעבור.

המורה: (לאחר זמן מה של מדידות ושיחות) "מה מצאתם לגבי D" ?

אדם: "הצלע השמאלית היא ארוכה יותר ומשופעת יותר, והצלע הימנית קצרה יותר וישרה יותר".
בריאן: "החלק העליון הוא ½ 1 אינץ', והתחתון ½ 2 אינץ'".
ג'וליאנה: "זה לא ריבוע ולא מלבן".
המורה: "ג'וליאנה, זו אותה טענה שאמרת קודם. כיצד את כל כך בטוחה בזאת"? (היא מניעה את ראשה כאילו אינה מסוגלת להסביר, לא כאילו היא אינה בטוחה).
קריס: "הצלע השמאלית היא ¾ 1 אינץ', והצלע הימנית היא 5/8 1 אינץ' (הוא קם ומראה לכל ילד איפה יש 5/8 על הסרגל).

אנו בודקים את האינפורמציה של קריס עם התאור של אדם, כדי לראות אם הם תומכים זה בזה. הם אומנם תומכים, והתלמידים מרוצים מכך, מהנהנים ומחייכים.
למרות שהתלמידים מצאו הרבה מידע לגבי הטרפז, יש צורך לכוון עכשיו מחדש את הדיון. אני רוצה לחזור לתוכניתי המקורית לאותו יום, אז אני מנסה לעודד את ההשוואה של צורה D למלבן. אני שואלת: "למי יש הגדרה עבור מלבן?"

אמילי: "הצלעות הימנית והשמאלית הן ארוכות יותר ושוות. הצלעות העליונה והתחתונה הן קצרות יותר ושוות".
ג'וש: (חוזר על הגדרתה של אמילי, ומשווה אותה עם D): "ל D אין צלעות שהן שוות, אז זה לא יכול להיות מלבן".

כל הילדים מביעים הסכמה עם ג'וש, בצורה מילולית או פיזית. שניים מהם חוזרים על הערתו של ג'וש במילים שלהם, ואז נראה שזה הזמן להמשיך. אני מרימה את הדף עם המרובעים ואומרת" "ההגדרה של אמילי למלבן מביאה אותי לחשוב על צורה E. האם זה מלבן"? E הוא מלבן צר ומאונך. התלמידים מסכימים. "אז מה זה E אם אני מחזיקה אותו ככה"? אני מסובבת את הנייר כך ש- E הוא אופקי. כמה מהתלמידים בוהים בי בפה נפול, כאילו הם המומים ומאוד מבולבלים. שלושה מהם נדים בראשם ואומרים: "לא, זה לא יכול להיות מלבן ככה." גם אני מופתעת. ציפיתי שלתלמידי כיתה ד' יהיה ברור השימור של צורה על אף האוריינטציה שלה.

התחלתי להרגיש בטוחה יותר לגבי השארת התלמידים בנקודה של בלבול לזמן מה, אז אני מחליטה לעצור כאן להיום. אני מזמינה את הילדים לשוחח עם האחרים לגבי מלבנים ולחשוב כיצד הם יקראו ל- E כשהוא מוטה הצידה.

ביבליוגרפיה

Bastable, Virginia, and Deborah Schifter. “Classroom Stories: Examples of Elementary Students Engaged in Early Algebra”. In *Employing Children’s Natural Powers to Build Algebraic Reasoning in the Content of Elementary Mathematics*, edited by James Kaput, In press.

Clements, Douglas and Michael Battista. “Geometry and Spatial Sense.” In *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, edited by Douglas A. Grouws, 420-64. New York: Macmillan Publishing Co., 1992.

Crowley, Mary. “The van Hiele Model of the Development of Geometric Thought.” In. *Learning and Teaching Geometry. K-12*, 1987 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), edited by Mary M. Lindquist and Albert P. Shulte, 1-8. Reston, Va. : NCTM, 1987.

Schifter, Deborah. “Reasoning about Operations: Early Algebraic Thinking, Grades K through 6.” In *Developing Mathematical Reasoning*, K-12, 1999 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), edited by Lee Stiff and Frances Curio. Reston, Va. : NCTM, in press.

Schifter, Deborah, Virginia Bastable, and Susan Jo Russell. *Developing Mathematical Ideas*. White Plains, N.Y.: Dale Seymour Publications, 1998.

Schifter, Deborah and Deborah O’Brian, “Interpreting the *Standards*: Translating Principles into Practice.” *Teaching Children Mathematics* 4 (December 1997): 202-5.

Schifter, Deborah, Susan Jo Russell, and Virginia Bastable. “Teaching to the Big Ideas. In *The Diagnostic Teacher: Revitalizing Professional Development*, edited by Mildred Solomon, New York: Teachers College Press, in press.

Sweeney, Elizabeth. “Investigating Jack’s Thinking.” *Changing Minds* 13 (Spring 1998).