# התמודדות עם בעיות מילוליות

## Making the Most of Story Problems

מאת: Victoria R. Jacobs and Rebecca C. Ambrose

הופיע ב: Teaching Children Mathematics , 15 (5), Dec.2008- Jan.2009, pp. 260-266

תרגום: ברכה סגליס

***אם נכבד את דרכי הפיתרון של התלמידים נוכל להפיק תועלת מן העוצמה שבבעיות מילוליות. הקץ לרכבות דוהרות!***

בעיות מילוליות הינן מרכיב חשוב בתוכנית הלימודים במתמטיקה, יחד עם זאת מבוגרים רבים נזכרים בחלחלה בהתנסויות שלהם, כאשר הם משחזרים את הבעיות הקשות של רכבות דוהרות משיעורי האלגברה בביה"ס התיכון. לעומת זאת, מחקרים מראים שבעיות מילוליות יכולות להיות כלים רבי-עצמה לעיסוק של תלמידים צעירים במתמטיקה, ושתלמידים רבים נהנים למצוא את ההיגיון שבמצבים המתוארים בבעיות אלה (NCTM 2000; NRC 2001).

מתן כבוד לגישות השונות של התלמידים בפתרון בעיות מילוליות הוא בעל חשיבות מכרעת, וזאת כדי שהם יפתחו אסטרטגיות אשר הגיוניות עבורם ולא ישננו אסטרטגיות שאינם מבינים.

כדי לבדוק כיצד מורים יכולים להפיק תועלת מהעוצמה של בעיות מילוליות, בחרנו לחקור שיחות בין מורה לתלמיד במהלך ראיונות של פתרון בעיות מילוליות כאשר מורים לגיל הרך עבדו עם תלמידים באופן יחידני. הכישורים הנדרשים לראיון יעיל הם כמו אלה הנדרשים בכיתה: המורה צריכה לצפות, להקשיב, לשאול, לתכנן משימות המשך, וכדו'. מיקדנו את החקירה שלנו בראיונות אלה, משום שהם מאפשרים לבודד את השיחות בין המורה לתלמיד משאר ההיבטים של אקלים הכיתה.

## תמיכה והרחבה של חשיבה מתמטית

לאחר שניתחנו קטעי וידאו של ראיונות שנערכו ע"י 65 מורים אשר ראיינו 231 תלמידים שפתרו 1,018 בעיות מילוליות, זיהינו שמונה קטגוריות של מהלכי מורה (פעילויות מכוונות) אשר, בתזמון הנכון, קידמו ביעילות את השיחות המתמטיות. התייחסנו בנפרד א) למהלכים התומכים של המורה לפני שהתלמיד הגיע לתשובה נכונה, ו- ב) למהלכים המרחיבים של המורה לאחר שהתלמיד נתן תשובה נכונה. ברצוננו להבהיר ששמונה הקטגוריות של מהלכי מורה שאנו מציגים אינן מכוונות להיות רשימה שהמורה צריך לבצע לגבי כל בעיה מילולית. תחת זאת, אנו מתייחסים למהלכים אלה כאל ארגז כלים ממנו המורה יכול לבחור מה שנחוץ לו, אחרי שלקח בחשבון את הסיטואציה הספציפית ואת מטרות ההוראה. תוך כדי ההוראה, המהלכים היעילים ביותר עולים כתגובה למה שהילד אומר או עושה, ולכן, לא ניתנים לתכנון מראש. מאחר שזה אתגר גדול להגיב באופן אסטרטגי לחשיבה המתמטית של התלמיד, חשבנו ששמונה הקטגוריות שזיהינו, יסייעו למורה בקבלת ההחלטות המתאימות.

## לפני שניתנת תשובה נכונה...

כאשר תלמיד מתקשה בפתרון בעיה מילולית, או מגיע לתשובה שגויה, על המורה להחליט כיצד ומתי היא תתערב על מנת לקדם את התלמיד מבלי להשתלט על החשיבה שלו. תמיכה בחשיבה המתמטית של התלמיד דורשת מן המורה "להיכנס לראשו של התלמיד" (Ginsburg, 1997), עד כמה שניתן, כדי לקבוע מה יכול להיות מקור הקושי. ההשערה של המורה אודות דרך החשיבה של התלמיד מניעה את ההחלטות שתקבל. מכיוון ש"כניסה לראשו של התלמיד" אינה קלה, המורה צריכה להיות גמישה ומוכנה לנסות גישות תומכות שונות. בניתוח שלנו, זיהינו ארבע קטגוריות של מהלכים שמורים נוהגים לבצע כדי לתמוך בחשיבה של התלמיד לפני שהוא מגיע לתשובה הנכונה **(טבלה 1).**

**טבלה 1: מהלכים של מורה לתמיכה בחשיבה של התלמיד לפני מתן תשובה נכונה**

| קטגוריה | דוגמאות למהלכים של המורה |
|---|---|
| וודאי שהתלמיד מבין את הבעיה המילולית | ▪ בקשי ממנו להסביר מה הוא יודע על הבעיה.<br>▪ נסחי מחדש את הבעיה או עשי לה עיבוד.<br>▪ השתמשי בתוכן מוכר או אישי עבור הבעיה. |
| שני את המתמטיקה שבבעיה כך שתתאים לרמת ההבנה של התלמיד | ▪ שני את הבעיה למספרים קלים יותר.<br>▪ שני את הבעיה למבנה מתמטי קל יותר. |
| חקרי מה התלמיד כבר עשה | ▪ בקשי ממנו להסביר אסטרטגיה חלקית או שגויה.<br>▪ שאלי שאלות ספציפיות שחוקרות כיצד מה שכבר עשה קשור לכמויות וליחסים שבבעיה. |
| הזכירי לתלמיד להשתמש באסטרטגיות אחרות | ▪ הציעי לו לשקול שימוש באמצעי המחשה אחר.<br>▪ הציעי לו לשקול שימוש באסטרטגיה אחרת.<br>▪ הזכירי לו אסטרטגיות רלבנטיות שבהם השתמש קודם. |

### וודאי שהתלמיד מבין את הבעיה המילולית

מורה יכולה לספק תמיכה בעוזרה לתלמיד לפתח הבנה של הבעיה המילולית שעליו לפתור. מהלכי מורה טיפוסיים כוללים קריאה חוזרת של הבעיה מספר פעמים ושאילת התלמיד אודות כמויות מסוימות שבבעיה. (כגון, "כמה כלבים יש בפארק?"). במקום לחזור ולקרוא ניתן לשנות כיוון ולבקש מן התלמיד להסביר את הבעיה המילולית במילים שלו. כאשר היא מקשיבה לתלמיד המתאר את הבעיה המילולית כולה, המורה יכולה לדעת באופן מדויק מה התלמיד מבין ומה אינו מבין.
ניסוח מחדש, או עיבוד של הבעיה, יכול גם כן לעזור לתלמיד. לעיתים קרובות, עיבוד כזה מתבטא בשימוש בתוכן מוכר יותר או אישי, כך שהתלמיד וחבריו הם דמויות בסיפור. לדוגמא, ילדה בגן נתבקשה לפתור את הבעיה המילולית הבאה:

> למורה יש שנים-עשר עפרונות ושלוש סלסילות. אם היא רוצה לשים אותו מספר של עפרונות בכל סלסילה, כמה עפרונות עליה לשים בכל אחת מהן?

הילדה הכינה ערימה של חמש-עשרה קוביות וניסתה שוב ושוב לארגן אותם אחרת. בתגובה, הגננת, גב' רינודלס, החליטה לעבד את הבעיה המילולית ולהפוך אותה לאישית יותר עבור הילדה:

> תני לי לשנות קצת את הסיפור. בואי ננסה את זה. לגב' רינולדס יש שלוש סלסילות. יש לי שלוש סלסילות. ויש לי ביד שנים-עשר עפרונות, ואני אומרת: "אני צריכה לעשות משהו עם העפרונות האלה. אני לא יכולה להסתובב איתם ביד כל היום. מה אני אעשה עם העפרונות האלה? אני יודעת, אני אשים כמה עפרונות בכל סלסילה כדי שהילדים יוכלו לגשת ולקחת אותם". אבל אז אני חושבת, "כדאי שאשים אותו מספר של עפרונות בכל סלסילה, כי אם אני אשים שני עפרונות בסלסילה אחת ועשרה עפרונות בסלסילה אחרת, זה לא יהיה הוגן. אז אני צריכה לשים אותו מספר של עפרונות בכל סלסילה". כמה עפרונות אני אשים בכל סלסילה כך שבכל הסלסילות יהיה אותו מספר של עפרונות?

סיפור מעובד זה לא גרם לשינוי המבנה המתמטי של הבעיה, אבל הפך אותו ליותר מציאותי עבור הילדה, ובאמת כעת היא פתרה את הבעיה נכון על ידי יצירת שלוש ערמות של ארבע קוביות תוך כדי ניסוי וטעייה. עיבוד הסיפור שבבעיה המילולית נראה מנוגד לאינטואיציה משום שהוא סותר את הגישה המסורתית של עזרה לתלמיד לזהות את מילות המפתח או את המידע הלא רלבנטי שבבעיה. אבל, כאשר משתמשים בעיבוד כדי להפוך את הבעיה למשמעותית יותר, התלמידים עשויים להימנע משימוש בגישות טכניות לפתרון בעיות ובמקום זה לנסות למצוא את ההיגיון שבסיטואציה של הבעיה המילולית.

**שני את המתמטיקה שבבעיה כך שתתאים לרמת ההבנה של התלמיד**

כאשר תלמידים אינם מבינים את הבעיה, גם לאחר שנוסחה מחדש או עברה עיבוד, אזי מה שיכול להועיל הוא שינוי הבעיה עצמה. סוג אחד של שינוי הוא שימוש במספרים קלים יותר. במיוחד, שימוש במספרים קטנים יותר או ידידותיים יותר (כגון, עשרות שלמות) יכול לעזור לתלמידים להגיע למתמטיקה שבבסיס הבעיה. לאחר שהבינו את ההיגיון שבבעיה פשוטה יותר, תלמידים בדרך כלל רוכשים ביטחון ומסוגלים, במקרים רבים, להבין את ההיגיון של הבעיה המקורית.

באופן דומה, מכיוון שמחקרים מראים שלילדים יש קושי רב יותר בסוגי מבנים מסוימים של בעיות מילוליות מאשר באחרים, דרך אחרת לעשות שינוי היא להשתמש במבנה מתמטי קל יותר (Carpenter et al., 1999). לדוגמה, תלמיד בכיתה א' נתבקש לפתור את הבעיה הבאה:

> שנים עשר עכברים גרים בבית. תשעה מהם גרים בקומה העליונה. כמה עכברים גרים בקומה התחתונה?

מכיוון שלבעיות חלק-שלם מסוג זה אין פעולה אקטיבית של צרוף או הפרדה, ילדים לעיתים לא מבינים את הקשר שבין הכמויות. התלמיד הכין ערימה של תשע קוביות וערימה של שנים-עשר קוביות וצרף אותם כדי לקבל עשרים ואחד. לאחר מספר ניסיונות כושלים לסייע לתלמיד להבין את הבעיה, המורה החליטה לשנות את הבעיה ולכלול בה פעולת הפרדה מפורשת.

המורה הסבירה: "תשעה מהעכברים האלה עולים לקומה העליונה כדי לצפות בטלוויזיה". בתגובה, התלמיד הפריד כמות של תשעה מתוך הערמה של השנים-עשר ונשארה לו קבוצה של שלושה. שינוי זה במבנה המתמטי של הבעיה עזר לא רק לפתור את הבעיה נכון. בכך שהמורה נתנה לו גישה לבעיה קלה יותר אך קשורה, היא יצרה הזדמנויות לשיחות על הכמויות והקשרים המתמטיים בשתי הבעיות. כך, בעזרת שאלות המשך מיומנות, המורה השתמשה בהבנה של התלמיד את הבעיה השנייה כדי לעזור לו להבין את הבעיה המקורית, ובאופן כללי יותר, בעיות עם מבנה של חלק-שלם.

**חקרי מה התלמיד כבר עשה**

כאשר תלמידים מתמודדים עם בעיה מילולית, הם יכולים לפעמים לגלות מה השתבש, אם מעודדים אותם להסביר את האסטרטגיות החלקיות או השגויות שלהם. שאלות כלליות מסוג: "האם תוכל להסביר לי איך פתרת?" או "מה הדבר הראשון שעשית?" יכולות לעזור להתחלת השיחות, אך בהמשך המורה נדרש לשאול שאלות המבררות בפרטי פרטים על האסטרטגיה של התלמיד, וזאת לא ניתן לתכנן מראש. לדוגמה, תלמיד בכיתה א' התבקש לפתור את הבעיה המילולית הבאה:

לחתול אחד יש ארבע רגליים. כמה רגליים יש לשבעה חתולים?

התלמיד **(ת)** הוציא שבע דסקיות בצורת דובונים. הוא התייחס לדובונים כאילו שיש להם שתי ידיים ושתי רגליים, ולכן, ספר רק שתי רגליים בכל דובון, כשהוא עונה "ארבע-עשרה". המורה **(מ)** הבינה שהבלבול שלו נובע מן הדסקיות שבחר לייצוג הבעיה ולכן הציגה שאלות שנועדו להבהיר כיצד מה שעשה קשור לתוכן של הבעיה:

**(מ):** כמה רגליים יש לדובון.

**(ת):** שתיים.

**(מ):** כמה רגליים יש לחתול.

**(ת):** ארבע.

**(מ):** כמה רגליים ספרת? כמה רגליים ספרת לכל אחד?

**(ת):** שתיים.

**(מ):** האם זו כמות הרגליים שיש לחתולים?

**(ת):** לא, לחתולים יש ארבע ולדובים יש שתיים.

**(מ):** בסדר, האם תוכל לעשות זאת שוב בשבילי?

**(ת):** קודם אני לוקח חתול אחד (מניח דסקית אחת של דובון), ואז אני לוקח דוב (מניח עוד דסקית אחת של דובון), ולחתול הזה יש ארבע רגליים ולדוב יש שתי רגליים.

**(מ):** האם יש בסיפור דובים?

**(ת):** לא, יש חתולים.

דיאלוג זה נמשך זמן מה לפני שהתלמיד פתר את הבעיה נכון על ידי ספירה של ארבע רגליים על כל דובון ולאחר מכן על ידי שימוש באמצעי המחשה אחר. התמיכה שהמורה נתנה התחילה ממה שהתלמיד כבר עשה, ובאמצעות שאלות ספציפיות, היא עזרה לו להבין כיצד האסטרטגיה הראשונית שלו היתה קשורה (ולא קשורה) לבעיה. שימו לב שהיא לא היתה יכולה לתכנן מראש שיחה כזאת, משום שהיא נבעה מתוך ההתבוננות הזהירה שלה בדרך שבה התלמיד השתמש בדסקיות של הדובונים.

**הזכירי לתלמיד להשתמש באסטרטגיות אחרות**

לפעמים תלמידים הולכים לאיבוד באסטרטגיה מסוימת, ובמקום לנטוש אותה לטובת אסטרטגיה יעילה יותר, הם מתעקשים להשתמש בה באופן לא יעיל. המורה יכולה לעזור בכך שתעורר אותם לחשוב בצורה גמישה יותר ולנסות גישות חלופיות. לפעמים, מה שמועיל הוא להציע לתלמיד להשתמש באמצעי המחשה מסוים או להזכיר לתלמיד אודות אסטרטגיה שכבר השתמש בה בעבר. לדוגמה, תלמיד בכיתה

א׳ התבקש לפתור את הבעיה הבאה:

בואו נדמיין שיצאנו לפיקניק וארבעה שחפים באו ונעמדו על שולחנות הפיקניק. ואז עוד שבעה שחפים באו לשולחנות הפיקניק. כמה שחפים יש על שולחנות הפיקניק?

התלמיד ספר בהתחלה עד ארבע, כשהוא מרים בכל פעם אצבע אחת. לאחר מכן הוא הוריד אצבעות אלה. לאחר מכן, הוא ספר עד שבע כשהוא מרים בכל פעם אצבע אחת. בשלב זה התלמיד היה מבולבל, כשהוא בוהה באצבעות שלו. המורה הציעה: ״רוצה לנסות את זה עם קוביות?״ התלמיד יצר מיד ערימה של ארבע קוביות וערימה של שבע קוביות ואז ספר שוב את כולם וקיבל את התשובה אחת-עשרה. ברגע שהוא התחיל לעבוד עם הקוביות הוא היה בטוח בעצמו ועבד ביעילות. המורה לא אמרה לתלמיד כיצד לפתור את הבעיה, אבל עודדה אותו לשקול שימוש באמצעי המחשה שהתאים יותר לייצוג של שתי הקבוצות. לתלמיד לא היו מספיק אצבעות כדי להראות גם את ארבע וגם את שבע באותו הזמן. תמיכה זו שיקפה את ההבנה של המורה לגבי אסטרטגיות הייצוג הישיר של תלמידים שבהן הם מייצגים תחילה את שתי הקבוצות לפני שהם מאחדים אותן.

### ...אחרי שניתנת תשובה נכונה

פתרון נכון של בעיה מילולית תוך שימוש באסטרטגיה הגיונית ובת-תוקף הינו מאמץ מתמטי חשוב. עם זאת, מנקודת המבט שלנו, יש לראות בעיות מילוליות בהקשר של השיחות המתמטיות שהן מעוררות, ואלה לא מסתיימות כאשר מגיעים לתשובה נכונה. במקום זה, המורה יכולה להעלות שאלות נוספות כדי לעזור לתלמידים להעמיק את ההבנה שלהם אחרי שסיימו את העבודה ולקשר זאת לרעיונות מתמטיים אחרים. זיהינו ארבע קטגוריות של מהלכים בהם מורים משתמשים בדרך כלל כדי להרחיב את החשיבה של התלמידים אחרי שהם הגיעו לתשובה נכונה **(טבלה 2)**.

**טבלה 2: מהלכים של מורה להרחבת החשיבה של התלמיד אחרי מתן תשובה נכונה**

| קטגוריה | דוגמאות למהלכים של המורה |
|---|---|
| עודדי רפלקציה אודות האסטרטגיה בה התלמיד השתמש. | ▪ בקשי ממנו להסביר את האסטרטגיה שלו.<br>▪ שאלי שאלות ספציפיות המבהירות כיצד פרטי האסטרטגיה שלו קשורים לכמויות וליחסים המתמטיים שבבעיה. |
| עודדי את התלמיד לחקור אסטרטגיות נוספות ואת הקשרים ביניהם. | ▪ בקשי ממנו לנסות אסטרטגיה אחרת כלשהיא.<br>▪ בקשי ממנו לנסות אסטרטגיה אחרת הקשורה לאסטרטגיה הראשונית שלו בדרכים מכוונות (כגון, ספירה יעילה יותר, או הפשטה של מה שעשה עם אמצעי המחשה).<br>▪ בקשי ממנו להשוות בין אסטרטגיות (שווה ושונה). |
| קשרי בין החשיבה של התלמיד לכתיבה הסימבולית של התרגיל. | ▪ בקשי ממנו לכתוב תרגיל המתאים לבעיה המילולית.<br>▪ בקשי ממנו לערוך רישום של האסטרטגיה שבה עבד. |
| הכיני בעיות המשך הקשורות לבעיה שהתלמיד זה עתה סיים. | ▪ בקשי ממנו לפתור אותה בעיה, או בעיה דומה, עם מספרים יותר מאתגרים.<br>▪ בקשי ממנו לפתור אותה בעיה, או בעיה דומה, עם מספרים שנבחרו במכוון כדי לעודד שימוש באסטרטגיות מתוחכמות יותר. |

**עודדי רפלקציה אודות האסטרטגיה שהתלמיד זה עתה סיים**

לאחר שתלמיד פתר נכון בעיה מילולית, המורה יכולה לבקש ממנו הסבר לגבי דרך הפיתרון או הבהרה מדוע שימוש באסטרטגיה מסוימת מתאים מבחינה הגיונית לכמויות וליחסים המתמטיים המבוטאים בבעיה. הסבר בקול של רעיונות אלה יכול לחזק את ההבנה של התלמיד ולפתוח למורה צוהר אל הבנה זו. שוב, מה שקובע הוא תשומת הלב לפרטים. בדומה לשאלות התומכות שנועדו לגלות את האסטרטגיות החלקיות או השגויות של התלמיד, שאלות ההרחבה של המורים היו הכי יעילות כאשר היו ספציפיות ובתגובה לפרטים שהתלמיד כבר אמר או עשה. לדוגמה, תלמיד בכיתה ב׳ התבקש לפתור את הבעיה המילולית הבאה:

> הבוקר היו לי כמה סוכריות. אחרי זה נתתי לך חמש סוכריות. כעת נשארו לי שש סוכריות. כמה סוכריות היו לי בבוקר לפני שנתתי לך כמה מהן?

התלמיד פתר בעיה זו בזריזות בראשו והסביר, ״חמש ועוד חמש, אם שמת אחת בצד, הם עשר, ואז עוד אחת זה אחת-עשרה, אז היו לך אחת-עשרה.״ תלמידים נותנים לעיתים קרובות תשובות נכונות לבעיות בעלות מבנה זה, שבה הקבוצה ההתחלתית אינה ידועה, מבלי להבין באמת מה הם מוצאים. במקרה זה המורה בדקה את החשיבה של התלמיד בהקשר לסוגיה זו:

**(מ):** אז איך ידעת לחבר אותם ביחד?

**(ת):** אני לא יודע, אני פשוט חיברתי אותם, נראה לי.

**(מ):** ובכן חשוב על כך. מדוע זה הגיוני לעשות כך עבור בעיה זו?

התלמיד חשב על שאלה זו במשך זמן מה ולבסוף השתמש בקוביות כדי להציג את הסיפור ולשכנע את עצמו (ואת המורה) שאחת-עשרה זו התשובה הנכונה וההגיונית בהקשר לבעיה שניתנה. בכך שביקשה ממנו לחזור ולחשוב על האסטרטגיה שלו, המורה וידאה שהוא מבין את ההיגיון שבמתמטיקה.

**עודדי את התלמיד לחקור אסטרטגיות נוספות ואת הקשרים ביניהם**

תלמידים צריכים הזדמנויות לא רק לפתור בעיות מילוליות, אלא גם לחקור את הקשרים המתמטיים בין אסטרטגיות שונות לפתרון אותה הבעיה. גישה אחת היא לבקש מהם לפתור את אותה הבעיה בדרך נוספת כרצונם. גישה אחרת היא לבקש מהם לפתור באסטרטגיה נוספת הקשורה לאסטרטגיה הקודמת שבה פתרו, אך בדרכים מכוונות. לדוגמה, תלמידה בכיתה ג׳ אשר השתמשה בבדידי כוח-עשר כדי לייצג 12 עמודים שבכל אחד מהם 10 מילים להכתבה, הכינה 12 בדידי עשרות אבל ספרה בהם את האחדות עד 120! המורה בנתה על אסטרטגיה זו אך ביקשה ממנה לפתור זאת שנית על ידי ספירת הבדידים בדרך אחרת. התלמידה נענתה וספרה בעשרות ואף אמרה לאחר מכן שהאסטרטגיה השנייה קלה יותר.

דרך נוספת שבה המורה יכולה באופן מכוון לבנות על האסטרטגיה הראשונה היא לבקש אסטרטגיה מנטלית שהינה הפשטה של העבודה שנעשתה עם אמצעי ההמחשה. לדוגמה, תלמיד בכיתה ג׳ התבקש לפתור את הבעיה המילולית הבאה:

במגרש המשחקים יש 247 בנות ו- 138 בנים. כמה ילדים יש במגרש המשחקים?

בהתחלה התלמיד ייצג את שתי הכמויות עם בדידי כוח-עשר (משטחים של מאה, מקלות של עשר וקוביות של אחד). הוא איחד את משטחי המאה (3), את מקלות העשר (7), איחד חלק מהאחדות ליצירת 10 והמיר אותן במקל של עשרת, כך שהיו לו בסה״כ 8 עשרות, ולבסוף ספר את האחדות שנשארו (5) וקיבל כתשובה 385. לאחר מכן המורה שאלה, ״אם תפעל בדיוק כמו שפעלת עכשיו עם הבדידים, האם תוכל לפתור את הבעיה בראש? התלמיד התבונן במספרים וביצע באופן מופשט מה שעשה קודם עם הבדידים. הוא הסביר שהוא יכול לחבר 100 עם 200 ולקבל 300 ואז לחבר 30 עם 40 ולקבל 70. לאחר מכן הוא צרף 2 מתוך ה- 7 ל- 8 כדי לקבל עוד עשרת, ביחד 80, ונשארו לו 5 אחדות, אז התשובה היא 385. כאשר הוא ביצע אסטרטגיה זו התלמיד ביטא בקול את הרעיון המתמטי של שתי האסטרטגיות: מחברים יחידות דומות ואם צריך, מקבצים (כגון, מפרקים את 7 ל- 5 ול- 2 כדי שיהיה אפשר לחבר את 2 ל- 8 וליצור עשרת חדשה).

באמצעות התנסויות עם אסטרטגיות שונות, תלמידים רוכשים את היכולת והגמישות לשנות אסטרטגיות כאשר הם לא מצליחים לפתור בדרך מסוימת. המורה יכולה גם להשתמש באסטרטגיות שונות כדי להבליט רעיונות מתמטיים, כאשר היא מבקשת מן התלמידים להשוות בין האסטרטגיות ולומר במה הן דומות ובמה הן שונות זו מזו. לפעמים המורה יכולה לבקש מהתלמיד להשוות בין אסטרטגיה שהצליחה לבין אסטרטגיה שלא הצליחה, ובמקרים רבים, התלמיד יגלה בעצמו את הסיבה לכך שהאסטרטגיה הקודמת נכשלה.

**קשרי בין החשיבה של התלמיד לכתיבה הסימבולית של התרגיל**

כאשר תלמיד פותר בעיה מילולית באמצעות ציור, אמצעי המחשה, או חישוב בראש, הוא לא בהכרח משתמש בכתיבה סימבולית. המורה יכולה לעודד את התלמידים לקשר בין העבודה שלהם לבין הסמלים המתמטיים בכך שתבקש מהם לכתוב תרגיל שמתאים לבעיה, או לתעד את האסטרטגיה שבה השתמשו כדי לפתור את הבעיה. למרות שיותר מקובל לבקש מן התלמיד לכתוב תרגיל שמתאים לבעיה, הרי שלבקש ממנו לתעד את האסטרטגיה שבה השתמש יכולה להיות עוצמה רבה. ילדים צעירים מתחילים לרוב לתעד את האסטרטגיות שלהם בדרכים לא מקובלות הכוללות ערבוב של סמלים מתמטיים וציורים. הם עשויים לצייר את אמצעי ההמחשה שבהם השתמשו ולהוסיף מספרים לחלק מן הציורים. עם הזמן, תיעודי הילדים נעשים יותר ויותר מופשטים עד שהם סימבוליים לגמרי.

יצירה עצמית של ייצוג סימבולי לאסטרטגיה שביצע, יכולה לעזור לתלמיד לפתח משמעות ל- ומיומנות ב- סמלים מתמטיים, משום שהייצוג הסימבולי שרשמו מקושר להבנה שלהם את הבעיה המילולית.

לדוגמה, תלמיד בכיתה ב׳ פתר את הבעיה אודות מספר הרגליים שיש לשבעה חתולים בכך שהניח תחילה שבעה ריבועים (חתולים). לאחר מכן הוא הזיז הצידה שני ריבועים ואמר, ״ארבע ועוד ארבע הם שמונה״. אחרי זה הזיז הצידה עוד ריבוע ואמר, ״שמונה ועוד ארבע שווה שתים-עשרה״. הוא המשיך להזיז ריבוע אחד בכל פעם עד שהשתמש בכולם, כשבכל פעם הוא מוסיף ארבע לסכום הכולל. כאשר נתבקש לכתוב תרגיל שיתאר מה שעשה, הוא כתב כך:

$$4+4 \longrightarrow 8+4 \longrightarrow 12+4 \longrightarrow 16+4 \longrightarrow 20+4 \longrightarrow 24+4 \longrightarrow 28$$

בניגוד לתרגיל שמתאים לבעיה המילולית ( $7 \times 4 = 28$ ), הייצוג הסימבולי של תלמיד זה הראה כיצד הוא חשב ופתר אותה. שימו לב שהשימוש שלו בחיצים במקום בסימן השוויון מנע את השימוש השגוי של סימן השוויון בין ביטויים.

בקשה מן התלמידים לקשר בין אסטרטגיות לכתיבה הסימבולית חשובה כדי שהתלמידים יראו את המתמטיקה שנעשית בכתיבה על הנייר כמקושרת לפתרון בעיות מילוליות. יתר על כן, ברגע שתלמידים מרגישים בנוח עם הכתיבה הסימבולית, אזי הכתיבה עצמה יכולה להיות כלי לפתרון בעיות ולרפלקציה.

הערת אזהרה: יתכן שבהתחלה המורה תצטרך לעזור לתלמיד ברישום כל צעד באסטרטגיה שלו, כדי שלא ישמיט חלקים. עם זאת, המורה צריכה לעמוד על המשמר ולוודא שהיא עוזרת לו לתעד את החשיבה **שלו** ולא את דרך החשיבה שלה לגבי פתרון הבעיה.

**הכיני בעיות המשך הקשורות לבעיה שהתלמיד זה עתה סיים**

הכנה מדוקדקת של בעיות המשך לפי רצף, נותנת פתח להזדמנויות נדירות עבור דיונים מתמטיים. אם כי אנו מבינים את החשיבות של התרגול, אנו מציעים משהו שהוא יותר מסתם פתרון של בעיות מילוליות נוספות. אנו דוגלים בכך שתוך כדי ההוראה, המורה תשקול את ההבנה העכשווית של התלמיד ובהתאם תשנה את הבעיה הראשונית כדי ליצור בעיה חדשה שתאתגר יותר את התלמיד או שתעודד אותו להשתמש באסטרטגיות יותר מתוחכמות. לדוגמה, תלמיד בכיתה א׳ התבקש לפתור את הבעיה המילולית הבאה:

אישה אינדיאנית ליקטה תירס. היו לה תשעה סלים.
היא שמה עשרה קלחי תירס בכל סל.
כמה קלחי תירס היו לה בסה"כ?


כל הזכויות שמורות ל-Rebecca C. Ambrose

התלמיד ענה מיד, "תשעים" והסביר כיצד ספר, "עשרה, אחד" כשהוא מרים עשר אצבעות ומיד לאחר מכן אצבע אחת. "עשרים, שניים" כשהוא שוב מרים עשר אצבעות ומיד לאחר מכן שתי אצבעות. הוא המשיך דפוס זה של ספירה ושימוש באצבעות: "שלושים, שלושה; ארבעים, ארבעה; חמישים, חמישה; ששים, ששה; שבעים, שבעה; שמונים, שמונה; תשעים, תשעה".

בעקבות כך המורה החליטה להרחיב את השימוש של התלמיד בעשרות, בכך שהציגה לפניו בעיה קשורה וביקשה ממנו להתייחס לקשר בין שתי הבעיות:

**(מ):** אז ככה הגעת לתשעים. ומה אם היו לה תשעה סלים אבל היא שמה אחד-עשר קלחי תירס בכל סל במקום עשרה? *(התלמיד חושב זמן מה)*. האם היית יכול להשתמש במה שכבר עשית בבעיה הקודמת, או שהיית צריך להתחיל הכל מהתחלה? עדיין יש לאינדיאנית תשעה סלים, ועדיין יש עשרה קלחי תירס בכל סל, אבל היא שמה עוד קלח תירס אחד, כך שיש בכל סל כעת אחד-עשר.

**(ת):** אה... הבנתי. אז יש כבר עשרה בכל סל , אז זה תשעים. אז אני סופר עד תשע, עוד תשע אחד, התכוונתי תשע אחדות. אני הולך להוסיף עוד תשע אחדות. אז יש כבר תשעים, אז תשעים ואחת, תשעים ושתיים, תשעים ושלוש, תשעים וארבע, תשעים וחמש, תשעים ושש, תשעים ושבע, תשעים ושמונה, תשעים ותשע.

בעזרת בחירה אסטרטגית של המספרים והסבת תשומת לבו של התלמיד לקשר שבין הבעיות, המורה הצליחה להרחיב את ההבנה של התלמיד אודות המבנה העשרוני, בכך שעזרה לו לזהות ולהשתמש בעשר שבמספר אחת-עשרה.

## סיכום

הפרויקט שלנו מבוסס על עבודה קודמת בנוגע לשאלות של מורים (ראו לדוגמה אצל, (Mewborn and Huberty, 1999; Stenmark, 1991), אשר סיפקה עבורנו רשימות של שאלות פוטנציאליות. רשימות אלה יכולות לשמש נקודות התחלה טובות לעורר את החשיבה של התלמידים, אך אנו מקווים ששמונה הקטגוריות שלנו למהלכי המורה (ארבע שנועדו לתמוך בחשיבה של התלמיד וארבע שנועדו להרחיב אותה) יכולות לסייע למורים לבצע התאמה אישית של השאלות כדי להפיק את המרב מהבעיות המילוליות. מהלכים אלה לא תמיד מובילים לתשובות נכונות, ואנו חוזרים ואומרים שאין הכוונה להשתמש בכל שמונה המהלכים בכל סיטואציה. יחד עם זאת, ביחד הם יוצרים ארגז כלים ממנו המורים יכולים לבחור באמצעים שיעזרו לתלמידים לפתור בעיות מילוליות ולחקור קשרים בין רעיונות מתמטיים.

עיסוק בדיונים מתמטיים אודות בעיות מילוליות מאתגר. אנו מציעים שלושה קווים מנחים אחרונים:

- ***עוררי והגיבי לתגובות של התלמיד.*** מהלכי המורה היעילים ביותר אינם ניתנים לתכנון מראש. תחת זאת, הם צריכים להתרחש בתגובה לפעולה או רעיון ספציפי של התלמיד. לכן, המומחיות איננה בתכנון הנעשה לפני שהתלמיד הגיע, אלא יותר בזריעת שיחות, מציאת המתמטיקה שבהערות ובפעולות של התלמידים, וקבלת החלטות בו ברגע כיצד לתמוך ולהרחיב את החשיבה של התלמיד.

- **שימי לב לפרטים באסטרטגיה ובדיבור של התלמיד.** המחקר אודות מסלולי ההתפתחות של תלמידים מראה שהבדלים עדינים בין אסטרטגיות ודיבורים של תלמידים יכולים לשקף הבחנות חשובות בהבנה המתמטית שלהם (NRC 2001). המורה יכולה לבצע התאמה אישית של ההוראה על בסיס הבחנות אלה, ובכך שהיא מתייחסת לפרטים בהסברים ובהערות של התלמיד היא גם משדרת לו שהיא מכבדת את הרעיונות שלו.
- **אל תסיימי תמיד את הדיון אחרי שניתנה תשובה נכונה.** למידה חשובה יכולה להתרחש אחרי שהתלמיד נתן תשובה נכונה, אם המורה תבקש ממנו להתבטא בבהירות, לעשות רפלקציה ולבנות על האסטרטגיות הראשוניות שלו.

## ביבליוגרפיה


Carpenter, Thomas P. Elizabeth Fennema, Megan L. Franke, Linda Levi, and Susan Empson. *Children's Mathematics: Cognitively Guided Instruction.* Portsmouth, N.H.: Heinemann, 1999.

Ginsburg, Herbert P. *Entering the Child's Mind: The Clinical Interview in Psychological Research and Practice.* New York: Cambridge University Press, 1997.

Newborn, Denise S., and Patricia D. Huberty. "Questioning Your Way to the Standard." *Teaching Children Mathematics* 6 (December 1999): 226-27, 243-46.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM, 2000.

National Research Council (NRC). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics.* Washington, DC: National Academy Press. 2001.

Stenmark, Jean K., ed. *Assessment Alternatives in Mathematics: An Overview of Assessment Techniques That Promote Learning* . Reston, VA: NCTM, 1991.