דפוסים גיאומטריים – התייחסות וניתוח

A Framework for Analyzing Geometric Pattern Tasks

מאת: Susan N. Friel and Kimberly A. Markworth

הופיע ב: Mathematics Teaching in the Middle School, 15 (1), August 2009, pp. 24-33
תרגום: ברכה סגליס

מורים יכולים להשתמש בדפוסים גיאומטריים
כדי לקדם את ההבנה של התלמידים אודות יחסים אלגבריים.

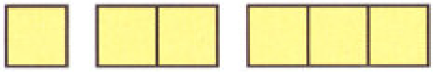
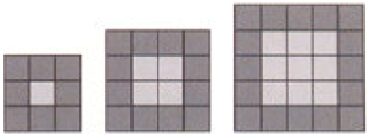
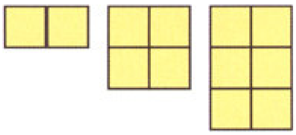
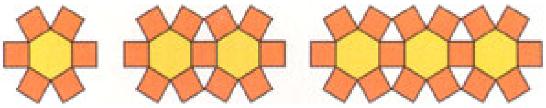
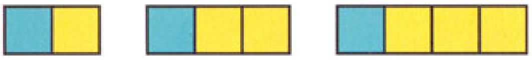
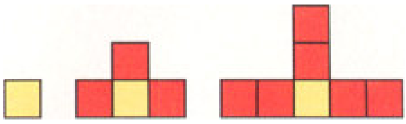
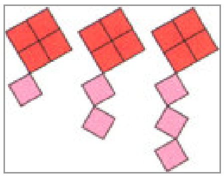
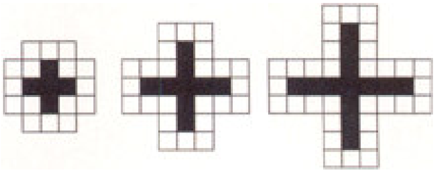
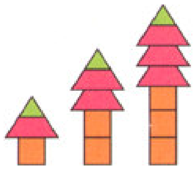
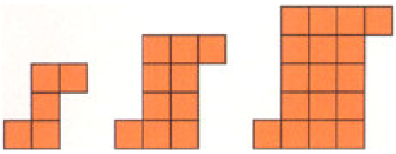
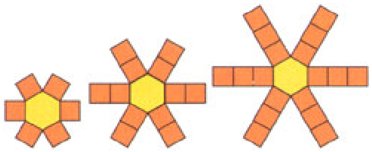
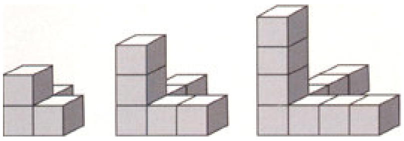
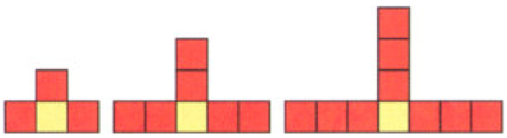
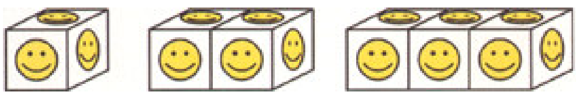
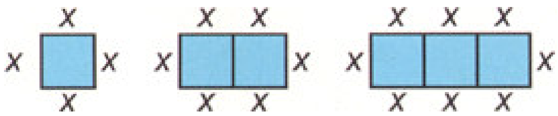
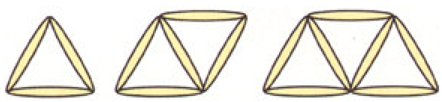
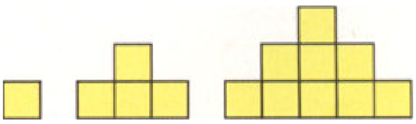
כיום רווחת ההבנה שטיפוח חשיבה אלגברית הינו מרכיב חשוב בלימודי המתמטיקה בכיתות הגבוהות של ביה"ס היסודי. אך מהי הכוונה בחשיבה אלגברית? Blanton and Kaput (2005), מתארים אותה כ"תהליך שבו התלמידים מכלילים רעיונות מתמטיים מתוך אוסף של מקרים פרטיים, מבססים הכללות אלו באמצעות טיעונים אותם הם מעלים במהלך השיח, ומבטאים אותן [את ההכללות] בדרכים ההולמות את גילם " (עמ' 413). חשיבה אלגברית מתבטאת באופנים שונים, שבאמצעותה התלמידים חוקרים, בין היתר, דפוסים הניתנים להכללה ומבטאים אותם ביחסים אלגבריים. ניתן לבטא יחסים הטבועים בדפוסים מספריים או גיאומטריים (ויזואליים) באמצעות מילים, טבלאות, גרפים, וסמלים. תלמידים יכולים ליצור ולהסביר הכללות אודות דפוסים ולהשתמש ביחסים שגילו על מנת להעלות השערות.

Driscoll (1999) מדגיש את החשיבות של יצירת כללים כדי לייצג יחסים אלגבריים: "מרכיב קריטי בחשיבה אלגברית הוא היכולת לזהות דפוסים ולארגן מחדש נתונים על מנת לייצג מצבים שבהם קלט מתייחס לפלט באמצעות יחסים אלגבריים המוגדרים היטב" (עמ' 2). עבודה עם דפוסים כרוכה בחקירה ובביטוי של מצבים שיש בהם חוקיות.

בכיתות היסוד, תלמידים חוקרים דפוסים החוזרים על עצמם. בתוכנית הלימודים של כיתות הביניים, יש נוכחות רבה יותר לדפוסים ההולכים וגדלים. עוצמה רבה יש למשימות, אשר מבקשות מן התלמידים לייחס מספרים לדפוסים ויזואליים (שנוצרו על ידי צורות גיאומטריות), לגלות את החוקיות שהם מקיימים ולנסח הכללות מתאימות.

בחקירות שלנו של משימות עם דפוסים ההולכים וגדלים, פיתחנו מסגרת המאפשרת לאפיין את המהות והמורכבות של משימות כאלה. אנו מעוניינים במיוחד בדפוסים ויזואליים המבוססים על דגמים גיאומטריים. בחקירת דפוסים גיאומטריים (ראו **איורים 1-18**), הדגש הוא על השימוש בחשיבה אינדוקטיבית כדי לנתח רצפים של רמזים חזותיים או מספריים, כאשר הרמזים המספריים מתאימים לסדר מסוים (Rivera and Becker 2005). "חשיבה אינדוקטיבית של דפוסים מספריים משתמשת במושגים ובפעולות אלגבריים, בעוד שחשיבה אינדוקטיבית של דפוסים ויזואליים מסתמכת על יחסים שניתן להסיק באופן ויזואלי מאוסף נתון של מקרים פרטיים" (שם, עמ' 199).

איורים 1-18: דוגמאות למשימות של דפוסים גיאומטריים

איור 1 	איור 10 
איור 2 	איור 11 
איור 3 	איור 12 
איור 4 	איור 13 
איור 5 	איור 14 
איור 6 	איור 15 
איור 7 	איור 16 
איור 8 	איור 17 
איור 9 	איור 18 

כאשר תלמידים משתמשים בעיבוד חזותי (figural reasoning), הם מסוגלים להפיק משמעות מדפוסים, כמו אלה המופיעים ב**איור 1**, על ידי מתן תשומת לב לרמזים ויזואליים שניתן לארגן אותם ולתרגם אותם לסדרות. רמזים אלה מפרשים ותומכים בהכללות של דפוסים גיאומטריים.
בשעה שחקרנו את סוגי המשימות העוסקות בדפוסים גיאומטריים המאפשרים הפעלתו של העיבוד החזותי, מצאנו מספר מקורות המספקים מגוון של משימות שונות. פעמים רבות, מקורות אלה דנו גם בדרכים בהם ניתן לנתח את המשימות וכיצד הן עשויות להוביל להכללות של דפוסים. הניתוחים היו שונים זה מזה ברמות ההפשטה שלהם ובאופן שבו התלמידים קבלו תמיכה בשעה שפיתחו את ההכללות. למרות שלא מצאנו דיונים אודות מסגרת לאפיון המורכבות של משימות הדפוסים, הרי שהיו מספר דוגמאות שניתן לשלבן לתהליך מפותח היטב של פתרון בעיות (Lee and Freiman, 2006).

במאמר זה נעסוק במספר נושאים:

- ראשית, נתבונן בתהליך של פתרון בעיות התומך בשימוש בעיבוד חזותי כדי לחקור ולפרש משימות העוסקות בדפוסים גיאומטריים על מנת להגיע להכללה.
- שנית, נדון במסגרת לאפיון המורכבות במשימות של דפוסים גיאומטריים.
- שלישית, נסכם שיקולים נוספים החשובים לפיתוח מסגרת כזו, כאשר נבחן כיצד השימוש במשימות של דפוסים גיאומטריים באופן רחב ולטווח ארוך תורם להתפתחות הכוללת של חשיבה אלגברית אצל תלמידים.

תהליך של פתרון בעיות המקדם עיבוד חזותי

Friel, Rachlin and Doyle (2001) מספקים קוים מנחים ליצירה ולתיאור של דפוסים ההולכים וגדלים, המוצגים במגוון של קונטקסטים שברובם יש משימות של דפוסים גיאומטריים. אחד מהם, המכוון לעיבוד חזותי, הוא "תיאור הצורות במילים באופן תמציתי, כך שגם מי שלא ראה אותן יוכל לשכפל את הרצף" (עמ' 7). למרות שמושם דגש על העיבוד החזותי, במרבית המקרים מוקד הניתוח נע מהר מאוד לשאלות של כמה. למשל, חישבו על הדפוס הגיאומטרי ש**איור 17**. שאלות "כמה" טיפוסיות יכולות להיות:

- כמה חייכנים נדרשים כדי ליצור את השלב ה- 10?
- כמה חייכנים נדרשים כדי ליצור את השלב ה- 43?
- כמה חייכנים נדרשים כדי ליצור את השלב ה- 100?
- כמה חייכנים נדרשים כדי ליצור את שלב ה- n?

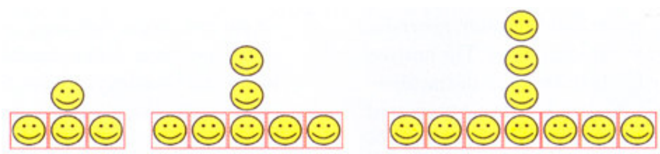
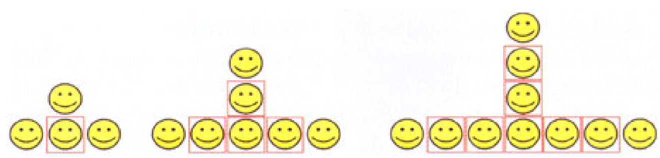
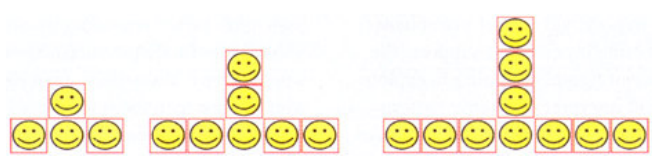
לעיתים קרובות, מזניחים את הצעדים המתמקדים במרכיב העיבוד החזותי של המשימה.
Lee and Freiman (2006) מציעים סדרה של שאלות מנחות, לתהליך של פתרון בעיות, המיועדות להדגיש את שלב החשיבה הויזואלית, שהוא אבן הפינה של העיבוד החזותי. לדוגמה, לקונטקסט של החייכנים שתואר קודם, ראו את השאלות המופיעות ב**טבלה 1**.
אם מתמקדים בשלב 1, תלמידים עשויים לראות דפוס גיאומטרי זה במספר דרכים שונות (Lee and Freiman, 2006). שלוש אסטרטגיות אפשריות והתועלת שלהן בקידום הכללות, נדונות ב**טבלה 2**.

טבלה 1: צעדים בתהליך פתרון בעיות המסייעים בניתוח משימות של דפוסים גיאומטריים

(מעובד מ- Lee and Freiman, 2006).

<u>צעד א:</u> ***עיבוד חזותי*** תוך שימוש במאפיינים הויזואליים של משימת הדפוס הגיאומטרי	1. כמה דפוסים שונים אתם יכולים לראות בציור? (ראה **איור 17**) א. כיצד הייתם מציירים את השלב הבא? ב. כיצד הייתם מציירים את השלב ה- 10? ג. כיצד הייתם מציירים את השלב ה- 58? ד. כיצד הייתם מסבירים למישהו כיצד לצייר כל שלב שהוא? 2. יש לי קופסה של 25 חייכנים. איזה גודל של צורה אני יכול לעשות מהם? האם יישארו לי חייכנים שלא השתמשתי בהם?
<u>צעד ב:</u> פיתוח ***יחסים מספריים*** כדי להגיע להכללה	3. כמה חייכנים נדרשים כדי ליצור את השלב ה- 10? ה- 58? ה- 100? 4. כמה חייכנים נדרשים כדי ליצור את הצורה בשלב ה- n? 5. איזה מהביטויים עבור שלב ה- n הוא הביטוי ה"נכון"?
<u>צעד ג:</u> הרחבת ***ניתוח דפוסים***	6. איזה שלב מכיל בדיוק 100 חייכנים? מה בקשר ל- 50 חייכנים? 7. האם תוכלו ליצור משימה של דפוס גיאומטרי עבור הכיתה.

טבלה 2: שלוש אסטרטגיות שונות של עיבוד חזותי לתיאור דפוס גיאומטרי בודד

ציור א 	אסטרטגיה זו מתמקדת בשורה האופקית של החייכנים עם טור העולה כלפי מעלה מן המרכז. ציור השלב ה- 43 יכלול שורה אופקית של שתי קבוצות של 43 חייכנים ועוד 1 במרכז, וערימה של 43 חייכנים במאונך.
ציור ב 	אסטרטגיה זו כרוכה בשימוש בצורה של השלב הקודם והוספת 1 יותר לכל אחת משלוש ה"זרועות". כדי למצוא את השלב ה- 43, צריך לדעת כיצד נראית הצורה בשלב ה- 42 (כמה חייכנים זה) ולהוסיף עוד 3 חייכנים.
ציור ג 	אסטרטגיה זו מדגישה קבוצות כפליות של מספר שווה של חייכנים. בשלב ה- 43, יהיו 3 קבוצות של 43 חייכנים, ועוד חייך 1 במרכז.

תלמידים יכולים לשוחח על האסטרטגיות שלהם לעיבוד חזותי, ולפתח כללים המתאימים לדפוסי החשיבה שלהם. אחרי שהם שולטים בנושאים אלה, ניתן להציג בפניהם שימוש בטבלאות לרישום הסיכומים המספריים שלהם. שימוש בטבלאות של שלוש עמודות יאפשר תרגום של אסטרטגיות ויזואליות לסיכומים מספריים, המשמרים רישום של תהליך החשיבה. (ראה Lawrence and Hennessy, 2002 ;Wickett, Kharas, and Burns, 2002). **בטבלה 3** מוצגות 3 טבלאות כאלה, עבור כל אחת מן האסטרטגיות שנידונו **בטבלה 2**.

כאשר תלמידים פותרים בעיה ומשתמשים בטבלה עבור משימה של דפוס גיאומטרי, הם צועדים צעד ראשון לתוך העולם של חשיבה אלגברית.

טבלה 3: סיכומים מספריים עבור אסטרטגיות של עיבוד חזותי

		ציור א	
שלב	***היגד מספרי***	***מספר החייכנים***	***הסבר***
1	(1(h) + 1 (h) + 1) + 1 (v)	4	ההיגד המספרי של האסטרטגיה משקף את החשיבה של התלמיד. ארגון כזה מדגיש מה משתנה ומה נשאר קבוע. הוא מקשר באופן מפורש בין מספר השלב (הקלט) לבין סה"כ מספר החייכנים (הפלט).
2	(2(h) + 2 (h) + 1) + 2 (v)	7	
3	(3(h) + 3 (h) + 1) + 3 (v)	10	
4	(4(h) + 4 (h) + 1) + 4 (v)	13	
.		.	
.		.	
.		.	
n	(n(h) + n (h) + 1) + n (v)	(n + n + 1) + n	
שימו לב: האות h מתייחסת לחלקים במאוזן של מבנה הצורה, והאות v מתייחסת לחלקים במאונך של הצורה.			
		ציור ב	
1	1 + 3	4	תלמידים עשויים להבחין בשלב זה, שראייה כזו של הדפוס אינה ניתנת לתרגום להיגד מספרי היוצר קשרים ברורים, כמו שמופיעים באסטרטגיות האחרות.
2	4 + 3	7	
3	7 + 3	10	
4	10 + 3	13	
.	.	.	
.	? + 3	?	
.			
n	.	.	
		ציור ג	
1	1 + 1 + 1 + 1		חשיבה זו מובילה, שוב, להכללה המקשרת בין הקלט לפלט. תלמידים יכולים להשוות את הביטוי לציור א לזה של ציור ג ולחשוב על השאלה: "איזה מהביטויים עבור שלב ה- n הוא הביטוי ה'נכון'?" תלמידים יכולים לחזור ולהתבונן בחשיבה שהביאה לכתיבת כל אחד מהביטויים, כדי לקבוע האם ביטויים אלה שקולים.
2	2 + 2 + 2 + 1	7	
3	3 + 3 + 3 + 1	10	
4	4 + 4 + 4 + 1	13	
.	.	.	
.	.	.	
.	.	.	
n	n + n + n + 1	3n + 1	

נתבונן עתה במאפיינים של משימות עם דפוסים גיאומטריים המשפיעים על המורכבות שלהם. לא כל דפוס מתאים. כדאי לנו להקדיש זמן לחשיבה מתי וכיצד נציג בפני התלמידים סוגים שונים של דפוסים, בשעה שאנו מקדמים חשיבה אלגברית המתפתחת באמצעות עיבוד חזותי.

ניתוח מורכבות של דפוסים

לפני שאתם ממשיכים לקרוא, התבוננו שוב בשמונה עשרה הדגמים הגיאומטריים ש**באיורים 1-18**. חישבו כיצד למיין את הצורות לשתי קבוצות: דפוסים פשוטים ודפוסים מורכבים יותר.

- איזה מהדפוסים הייתם קובעים כפשוטים? מדוע?
- איזה מהדפוסים הייתם קובעים כמורכבים? מדוע?
- מהם הדברים הדומים ומהם הדברים השונים בין הדפוסים?
- כיצד כדאי להדגיש דברים דומים ושונים אלה על מנת לקדם אסטרטגיות שונות של עיבוד חזותי?

אם כי מורה יכולה לשאול שאלות שונות אודות כל אחד מן הדגמים הגיאומטריים האלה, כדאי לשקול שאילת שאלות שיסייעו לתלמידים להתמקד באסטרטגיות של עיבוד חזותי: בשעה שאתם מתבוננים בכל פריט, אילו דפוסים שונים אתם רואים? כיצד הייתם מציירים או בונים את השלב הבא? את השלב ה- 10? את השלב ה- 58? כיצד הייתם מסבירים למישהו כיצד לצייר כל שלב שהוא בקבוצת הדפוסים הזאת? בניתוח שלנו לגבי דפוסים גיאומטריים אלה ורבים אחרים, זיהינו, בשלב זה של הניתוח, מורכבויות רבות שעלו, אשר דורשות הבהרה.

הדפוס הגיאומטרי הבסיסי ביותר משקף יחס ישר כפי שרואים ב**איורים 1** ו- ***2***, שבהם מספר החלקים הוא כפולה של ***מספר השלב***. שימו לב שאנו מתייחסים לכל צורה ברצף כאל ***מספר השלב***. מונחים אפשריים אחרים הם: ***מספר הצורה***, ***מספר הדגם***, או ***מספר התמונה***. מספרים אלה מציינים את הסדר ואת הרצף של הצורות בתוך דפוס גדל והולך, והם הפלט של כלל ההתאמה.

ברגע שעוברים לשלב 2 של תהליך פתרון הבעיות, מציאת סה"כ החלקים כרוך בחישוב פשוט של כפל המתייחס למספר הסודר של הצורה ולמספר החלקים בצורה. הוספת קבוע לדפוס גיאומטרי מעלה, על פי רוב, את רמת המורכבות שלו. שימו לב להבדלים בין הדפוסים ב**איורים 1** ו- ***3***. בדפוס ש**באיור 3** יש אריח אחד נוסף בכל שלב . הבדל זה נראה מזערי, אבל הוא מעלה את רמת המורכבות של הדפוס בכך שהוא גורם לחישוב סה"כ האריחים (שלב 2) להיות דו-שלבי הכרוך בכפל (ב- 1) וחיבור (ועוד 1). לפיכך, הביטוי המתאים לדפוס ש**באיור 3** יהיה $T=n+1$, שבו T הוא סה"כ מספר החלקים בשלב ה-n, ו-n הוא מספר השלב.

עבור תלמידים שרק מתחילים לעבוד עם דפוסים גיאומטריים, זיהוי הקבוע אינו בהכרח ברור. ניתן לעודד אסטרטגיות של עיבוד חזותי בדרכים שונות. לדוגמה, ניתן לייצג את המרכיב הקבוע על ידי שימוש בצבע שונה. ב**איורים 3**, ***4***, ו- ***7***, הקבוע מופיע כצבע שונה של האריחים בכל אחד מרצף הדפוסים. ניתן גם להראות את הקבוע על ידי שימוש בצורה שונה. הקבועים ב**איורים 5** ו- ***6***, מיוצגים על ידי משולש בראש העץ (**איור 5**) ובמשושה בודד במרכז (**איור 6**).

הדפוסים הגיאומטריים ש**באיורים 5** ו- ***11*** מורכבים יותר משום שבכל שלב יש שתי צורות שהולכות וגדלות. העץ **באיור 5** גדל בכל שלב גם בריבוע אחד וגם בטרפז אחד. תלמידים משתמשים בעיבוד חזותי כאשר הם מתבוננים ביחסים אלה. כאשר תלמידים עוברים לצעד ב של תהליך הפתרון, מאחר

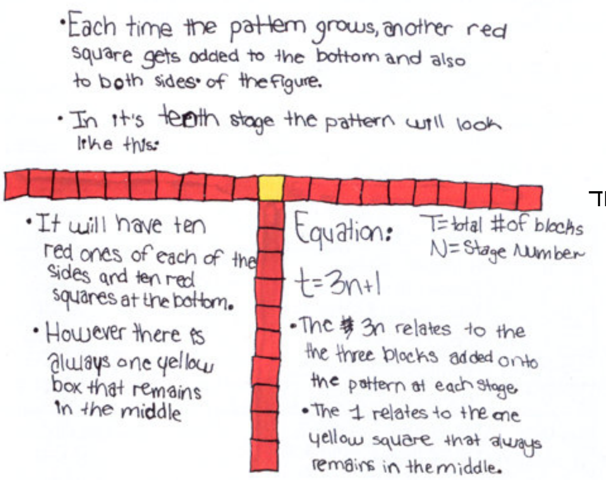
שיש n ריבועים ו- n טרפזים, הדרך שלהם להצדיק את הקשרים הוא באמצעות הכלל $T=n+n+1$, כשהקבוע 1 מייצג את המשולש שלמעלה.

הדפוס ש**באיור 11** בעייתי יותר. מספר המשושים ברור; מספר זה מתאים למספר השלב. עם זאת, בעוד שהתלמיד עשוי לצפות שמספר הריבועים גדל ב- 6 בכל שלב (הוסף משושה אחד ו-6 ריבועים סביבו), המצב אינו כך. ניתן לדמיין את אחד הריבועים כמונח מעל ריבוע אחר, כך שלמעשה מוסיפים רק 5 ריבועים בכל שלב נוסף.

קסמי השיניים המצוירים **באיור 9** מציגים מצב דומה. למרות שבכל שלב מתווספת עוד צורה של משולש, רק 2 קסמי שיניים מתווספים בכל שלב, משום שהקיסם השלישי יהיה מונח מעל קיסם שכבר היה שם בשלב הקודם.

מה הופך את הדפוס הגיאומטרי ש**באיור 12** למורכב יותר מזה ש**באיור 7**? ההבדל בין שני הדפוסים הוא רק במקום שבו הם מתחילים, אבל זה הופך את הפונקציה שלו למורכבת יותר להפקה. באיור 7, יש בכל שלב שלוש "זרועות". מספר הריבועים בכל זרוע הוא בהתאמה למספר השלב (ראו את עבודת התלמיד המוצגת **באיור 19).** ניתן על כן, לייצג את הכלל באמצעות המשוואה $T=3n+1$. **באיור 12**, מספר הריבועים בכל זרוע הוא בהתאמה למספר השלב פחות אחת. ניתן לייצג את הכלל הזה באמצעות המשוואה $T=3(n-1)+1$. תלמידים עלולים להתקשות ביצירת כלל זה, אם לא מעודדים אותם להתמקד בדפוס הגיאומטרי ההולך וגדל ובתרגומו לדפוס מספרי, באמצעות שימוש בטבלת שלושת העמודות (**טבלה 3**).

איור 19: עבודת סיכום של תלמיד לניתוח הדפוס שבאיור 7,
תוך שימוש באסטרטגיה של שלוש הרחבות זהות וריבוע (צהוב) אחד במרכז.



- בכל פעם הדפוס גדל, מוסיפים עוד ריבוע אדום למטה וגם לשני הצדדים של הצורה.
- בשלב ה- 10 הדגם יראה כך:
- יהיו לו עשרה אדומים בכל צד ועשרה ריבועים אדומים למטה.
- יחד עם זאת, יש תמיד ריבוע צהוב אחד שנשאר באמצע.
- משוואה:

  T = סה"כ מספר החלקים.

  N = מספר השלב.

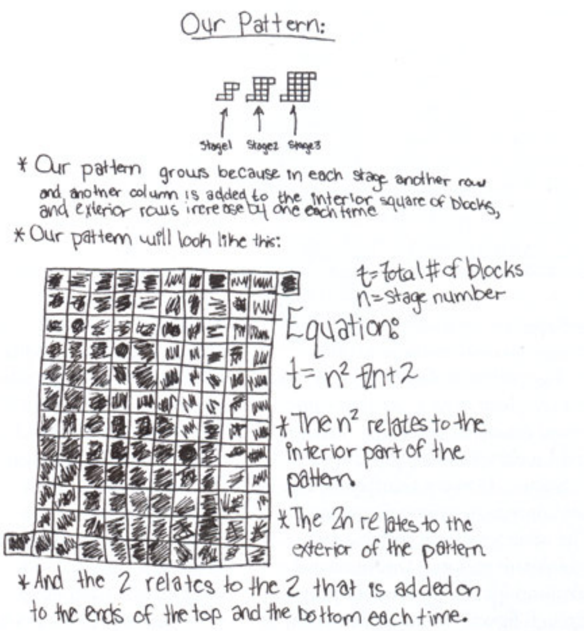
  T = 3n + 1

- ה- 3n מתייחס לשלוש הקבוצות שמוסיפים לדפוס בכל שלב.
- ה- 1 מתייחס לריבוע הצהוב היחיד שתמיד נשאר באמצע.

הדפוסים הגיאומטריים ש**באיורים 14** ו- **18** מורכבים יותר מן האחרים משום שהם מייצגים יחסים שאינם ליניאריים. למרות שהדפוס **באיור 14** נראה מורכב ביותר, הוא למעשה בהחלט ביכולת התפיסה עבור תלמידים שהיו להם התנסויות קודמות עם דפוסים גיאומטריים, במיוחד בכיתה שבה הודגש העיבוד החזותי. ישנן דרכים רבות לראות את הדפוס ש**באיור 14** (ראה Smith, Silver, and Stein 2005).
באיור 20, תלמידים מציגים את עבודת הסיכום שלהם לניתוח **איור 14** עם טבלה המראה את מבנה הדפוס. בסיכום שלהם, הם מדגישים את המרכיבים המתייחסים לאופן שבו הם ניתחו את הדפוס. דפוס זה, כמו רבים אחרים, יכול לקדם דיון כיתתי אודות אסטרטגיות פיתרון שונות המביאות לביטויים אלגבריים שקולים.

איור 20: עבודת סיכום של תלמידים לגבי הניתוח שלהם את איור 14, המציגה את האסטרטגיה שלהם לזיהוי חלק מרכזי של n×n, חלקים חיצוניים, ושני ריבועים נוספים.

- הדפוס שלנו גדל משום שבכל שלב נוספים, לריבוע הפנימי של האריחים, עוד טור ועוד שורה הגדלים ב- 1 בכל פעם.
- הדפוס שלנו יראה כך:
  T = סה"כ מספר החלקים.
  N = מספר השלב.
  משוואה: $T= n^2 + 2n + 2$
- ה- n^2 מתייחס לחלק הפנימי של הדפוס.
- ה- 2n מתייחס לחלק החיצוני של הדפוס.
- וה- 2 מתייחס ל- 2 שמוסיפים בכל פעם לקצוות למעלה ולמטה.



לעומת זאת, הדפוס ש**באיור 18**, אינו מתאים לניתוח באמצעות עיבוד חזותי. Olivier, and Linchevski (המצוטטים אצל Rivera 2007) עשו הבחנה בין דפוסים גיאומטריים שקופים ושאינם שקופים. כל יתר שבעה עשר הדפוסים הם דפוסים שקופים. ניתן לגלות בהם בקלות את היחס באמצעות עיבוד חזותי. לעומת זאת, הדפוס ש**באיור 18** אינו שקוף, במובן ש"צריך לעשות עוד משהו לפני שהתלמידים יכולים לראות כלל אפשרי מתוך הרמזים הקיימים" (Rivera 2007, עמ' 72). ניתן לנתק את הריבועים שמשמאל לטור הגבוה ביותר, לסובב אותם ב- 180^0, ולהתאימם למדרגות שמימין, ובכך ליצור ריבוע.
הדפוסים ש**באיורים 8**, **15** ו- **16** מספקים דוגמה כיצד ניתן להוסיף מורכבות לדפוסים פשוטים יותר. הדפוס הגיאומטרי שבאיור **8** זהה לזה ש**באיור 1**. עם זאת, על ידי שאילת שאלה מאתגרת יותר, "כמה אנשים יכולים לשבת מסביב לשולחן בכל שלב?" זה הופך להיות בעיה הקשורה להיקף, עם יחסים מורכבים יותר.

איור 16 מציג את אותו הדפוס בשלושה מימדים. שאלת עזר: "כמה מדבקות של חייכנים נחוצות אם מדביקים אחת על כל פאה" יכולה לקשר בין נושא זה לבין הנושא של שטח הפנים. הבנת היחס של דפוס זה, הינה אפשרית לתלמידים אשר מעודדים אותם להסביר במילים את תהליך העיבוד החזותי שהם עברו. באופן דומה, יתכן שהבחנתם שהדפוס **באיור 15** הינו גרסה תלת-מימדית של הדפוס ש**באיור 7**. גרסה תלת-מימדית זו מאפשרת העלאת שאלות מורכבות יותר הקשורות לנפח ולשטח הפנים.

טבלה 4 מסכמת ביטויים אפשריים עבור כל אחד משמונה עשר הדפוסים שהוצגו. תלמידים יכולים לפעול בכל אחת מהמשימות הללו תוך שימוש במסגרת העבודה שהוצגה במאמר. הטבלה נותנת לקורא צורות מפורשות של הכללת דפוסים המקשרות בין מבנה הצורה למספר השלב (Friel et al. 2001 עמ' 7-8).

טבלה 4: מפתח המשוואות

איור מספר	משוואות של פתרונות אפשריים (T – מספר הצורות בשלב ה- n)
1	אריחים: T = n
2	אריחים: T = 2 n
3	אריחים: T = n + 1
4	אריחים: T = n + 4
5	משולשים: 1; טרפזים: n; ריבועים: n; סה"כ חלקים: T = 2n + 1
6	משושים: 1; ריבועים: 6n ; סה"כ חלקים: T = 6n + 1
7	אריחים: T = 3n + 1
8	היקף: T = 2n + 2
9	קסמי שיניים: T = 2n + 1
10	אריחים במרכז: n^2; אריחים בהיקף: 4n + 4; סה"כ אריחים: $T= n^2 + 4n + 4$
11	משושים: n; ריבועים: 5n + 1; סה"כ חלקים: T = 6n + 1
12	אריחים: T = 3n - 2
13	אריחים שחורים: 4n + 1; אריחים לבנים: 8n + 8; סה"כ אריחים: T = 12n + 9
14	אריחים: $T= n^2 + 2n + 2$
15	קוביות: T = 3n + 1
16	שטח פנים: T = 4n + 2
17	חייכנים: T = 3n + 1
18	אריחים: $T = n^2$

צירוף של תהליך יעיל לפתרון בעיות המתמקד בעיבוד חזותי דרך משימות מאתגרות העוסקות בדפוסים גיאומטריים מתאימים, יאפשר למורי המתמטיקה בכל הרמות לקדם הבנה אלגברית. למרות שמגוון השיקולים כיצד ניתן להשתמש במשימות אלה הוא מעבר להיקף של מאמר זה, נדון כעת במספר גורמים לשילוב משימות אלה בכיתות השונות.

שימושים בהוראה

הדגש ההולך וגובר על חשיבה אלגברית לאורך כיתות גן-י״ב (k-12), דורש לתת תשומת לב לשימוש בעיבוד חזותי. ניתוח של דפוסים גיאומטריים באמצעות עיבוד חזותי, סולל אצל התלמידים את הדרך לפיתוח חשיבה אלגברית. במחשבה כזו ניתן לחשוב על סוגי המשימות שמתאימות לכיתה ג לעומת אלה המתאימות לכיתה ח. תכנון מסלול הוראה,לא צפוף אך מחושב, של משימות עם דפוסים ההולכים וגדלים, שניתן לתת אותן לאורך כיתות ב עד ח, ייתן למורים ולתלמידים הזדמנויות להגיע להכללות אלגבריות עבור מצבים המוצגים בדרך ויזואלית.

אחת הדרכים היא לתת לתלמידים לחקור ״משפחות״ של משימות דפוסים קשורות. לדוגמה, **איור 8** הינו משימה של מציאת היקף (ראה Smith, Silver, and Stein 2005). מה יקרה כאשר תלמידים יתבוננו בסדרות של משולשים או מחומשים או משושים, או בדגמים אחרים המורכבים ממספר צורות של מצולעים? אפשרות אחרת היא ליצור רצף הוראה של משימות דפוסים ולהשתמש בהן בתוך ומעבר לשכבות גיל שונות (Smith, Hillen, and Catania 2007). מהם השיקולים שיש לקחת בחשבון כאשר מסדרים את המשימות ברצף הוראה? כיצד יכולה המורה של כיתה ח לבנות על ההתנסויות שניתנו בכיתה ז? באופן מפורש יותר, אם רצף הוראה זה מופעל בעקביות לאורך כל שכבות הגיל, באיזה אופן תתגלה ותתפתח החשיבה האלגברית של התלמידים?

יש גם מגבלות לשימוש במשימות של דפוסים גיאומטריים כדי לחקור יחסים אלגבריים. מספרי השלבים מוגבלים למספרים חיוביים, ההתאמה אינה רציפה (כי היא מקשרת בין מספרי השלבים, שהם מספרים טבעיים, לבין מספר הצורות שמתווספות שגם הוא מספר שלם) והתכנים המתאימים מצומצמים. יחד עם זאת, אנו מאמינים ששילוב משימות כאלה בכיתת המתמטיקה מציע דרך בעלת ערך רב לקדם חשיבה ויזואלית ולפתח הבנה מושגית עשירה של יחסים אלגבריים. המסגרת המוצעת כאן, לחקירת משימות אלה, עשויה לספק נקודת התחלה לניתוח נוסף של דפוסים אלה ולדרכים המרובות בהן ניתן להשתמש כדי לקדם חשיבה אלגברית.

כיצד להציג משימות אלה לתלמידים?

כאשר חושבים על מסגרת העבודה, מרכיב נוסף הוא הפדגוגיה בה ניתן להשתמש במהלך האינטראקציה עם התלמידים בשעה שהם פותרים בעיות כאלה.

גישה מקובלת אחת היא לבקש מן התלמידים להתחיל עם שלושת או ארבעת השלבים הראשונים של הרצף ולהשתמש בשלושת הצעדים ש**בטבלה 1** כדי להדריך אותם בחקירה.

גישה אחרת (Friel et al. 2009), מציעה לתת לתלמידים רק את השלב השלישי או הרביעי ברצף של דפוס גיאומטרי ולבקש מן התלמידים לצייר את השלבים הקודמים החסרים, על מנת לקדם חשיבה לאחורה וחשיבה קדימה בהקשר ליחסים אפשריים בתוך הדפוס.

ואריאציה מעניינת של משימת התחלה היא להשתמש בצורה מתוך הרצף, שמקומה בתוך הרצף אינו ברור דיו. ניתן אז לנתח את המבנה שלה מבחינה ויזואלית מבלי להתייחס לשלב המספר הסודר שלה. Boaler and Humphreys (2005) מספקים מודל מצוין המשתמש בטקסט ובוידאו עבור צורה של 10×10 מתוך הרצף ש**איור 10**.

ראה גם דיון העוסק בשימוש במשימה זו לאורך שכבות גיל, המציין את הדרכים המגוונות בהן תלמידים בשכבות גיל שונות עשויים לגשת לפתרונה (Ferrini-Mundy, Lappan, and Phillips 1997).

ביבליוגרפיה

Billings, Esther, Tara Tiedt, and Lindsey Slater. "Research, Reflection, Practice: Algebraic Thinking and Pictorial Growth Patterns." *Teaching Children Mathematics* 14 (December 2007 / January 2008): 302-308.

Blanton, Maria L., and James J. Kaput. "Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning." *Journal for Research in Mathematics Education* 36 (November 2005): 412-446.

Boaler, Jo, and Cathey Humphreys. *Connecting Mathematical Ideas: Middle School Video Cases to Support Teaching and Learning*. Portsmouth, NH: Heinemann, 2005.

Driscoll, Mark. *Fostering Algebraic Thinking: A guide for Teachers 6-10.* Portsmouth, NH: Heinemann, 1999.

Ferrini-Mundy, Joan, Glenda Lappan, and Elizabeth Phillips. "Experiences with Patterning." ." *Teaching Children Mathematics* 3 (February 1997): 282-289.

Friel, Susan N., Fran Arbaugh, Edward S. Mooney, David K. Pugalee, Tad Watanabe, and Margaret S, Smith. *Navigating through Problem Solving and Reasoning in Grades 6-8.* edited by Peggy A. House. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2009.

Friel, Susan N., Sid Rachlin, and Dot Doyle. *Navigating through Algebra in Grades 6-8.* edited by Patricia A. House. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2001.

Lawrence, Ann, and Charlie Hennessy. *Lessons for Algebraic Thinking: Grades 6-8.* Sausalito, CA: Math Solutions Publications, 2002.

Lee, Lesley, and Viktor Freiman. "Developing Algebraic Thinking through Pattern Exploration." *Mathematics Teaching in the Middle School* 11(May 2006): 428-433.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM, 2000.

Rivera, Ferdinand D. "Visualizing as a Mathematical Way of Knowing: Understanding Figural Generalizations." *Mathematics Teacher* 101 (August 2007): 69-75.

Rivera, Ferdinand D., and Joanne Rossi Becker. "Figural and Numerical Modes of Generalizing in Algebra." *Mathematics Teaching in the Middle School* 11(November 2005): 198-203.

Smith, Margaret S., Amy F. Hillen, and Christy L. Catania. "Using Pattern Tasks to Develop Mathematical Understanding and Set Classroom Norms." *Mathematics Teaching in the Middle School* 13 (August 2007): 38-44.

Smith, Margaret S., Edward A. Silver, and Mary Kay Stein, with Marjorie A. Henningsen, Melissa Boston, and Elizabeth K. Hughes. *Improving Instruction in Algebra: Using Cases to Transform Mathematics Teaching and Learning.* Vol. 2 New York: Teachers College Press, 2005.

Wickett, Maryann, Katharine Kharas, and Marilyn Burns. *Lessons for Algebraic Thinking: Grades 3-5.* Sausalito, CA: Math Solutions Publications, 2002.