إطار لتحليل مهام الأنماط الهندسية
A Framework for Analyzing Geometric Pattern Tasks

بقلم: Susan N. Friel and Kimberly A. Markworth

نشر في: Mathematics Teaching in the Middle School, 15 (1), August 2009, pp. 24-33

ترجمة: كميل ضاهر

يستطيع المعلمون استعمال الأنماط (النماذج) الهندسية لتعزيز فهم الطلاب للعلاقات الوظيفية.

ثمة اعتراف متزايد بأن تعلم التفكير بشكل جبري هو مكوّن رئيسي في تعليم الرياضيات للصفوف العليا في المدرسة الابتدائية. ماذا يعني "بشكل جبري"؟ يصف Blanton and Kaput (2005) ذلك بأنه "عملية يقوم من خلالها الطلاب بتعميم أفكار رياضية من مجموعة أمثلة معينة، بتأسيس هذه التعميمات عن طريق النقاش، وبالتعبير عنها بطرق رسمية بصورة تصاعدية" وملائمة لجيلهم (ص. 413). يحتاج التفكير الجبري إلى أشكال متعددة، بما فيها التفكير الوظيفي الذي يقوم الطلاب من خلاله باستكشاف أنماط التعميم لوصف العلاقات الوظيفية Blanton and Kaput (2005).

تفيد مبادئ ومعايير الرياضيات في المدارس (NCTM 2000) أن التركيز على فهم الأنماط، العلاقات والوظائف هو هدف أساسي لتعليم الجبر. من الممكن تمثيل العلاقات المتأصلة في الأنماط العددية والهندسية (المرئية) بواسطة الكلمات، الجداول، الرسوم البيانية والرموز. ويستطيع الطلاب إجراء التعميم وشرحه بالنسبة للأنماط واستعمال تلك العلاقات لأجراء تنبؤات وفرضيات.

شدد Driscoll (1999) على أهمية بناء القواعد لتمثيل الوظائف: "إن القدرة على التعرف على الأنماط والتعرف على البيانات لتمثيل أوضاع فيها المعطيات (input) ذات صلة بالمردودات(output) عن طريق تعريف القواعد الوظيفية بشكل جيد هو أمر هام بالنسبة للتفكير الجبري " (ص. 2). إن العمل مع الأنماط منوط باستكشاف القانونية والتعبير عنها.

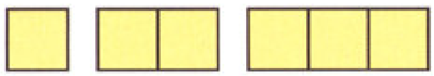
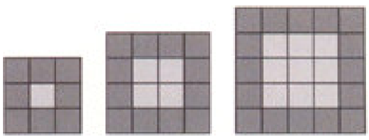
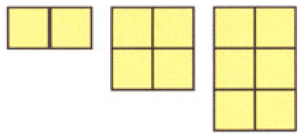
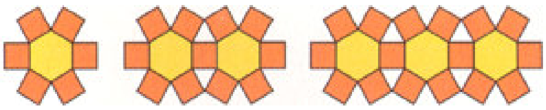
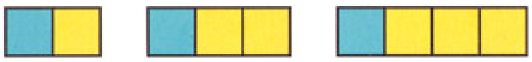
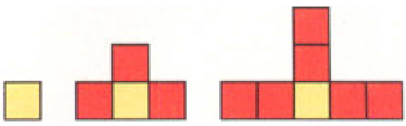
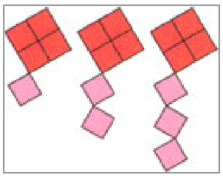
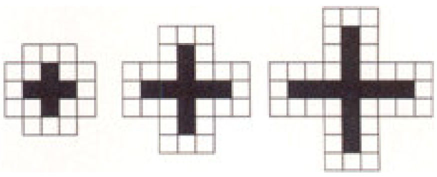
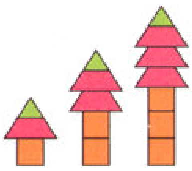
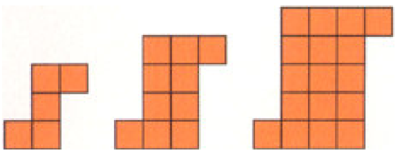
في الصفوف الابتدائية، يستكشف الطلاب الأنماط التي تتكرر. ويوجد، في منهاج الصفوف الإعدادية، للأنماط الآخذة بالكبر حضورًا أكبر. تكمن القوة الحقيقية لاستعمال الشكل الأخير من هذه المهام في نسب الأعداد إلى مهام الأنماط الآخذة بالتزايد والمرئية (مثلاً، مكون من الأشكال الهندسية) من خلال الطلب من الطلاب اكتشاف القانونية القائمة وتطوير تعميمات لقواعد العمل.

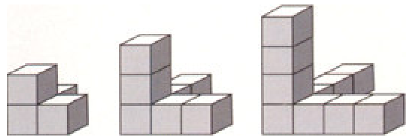
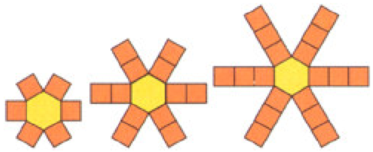
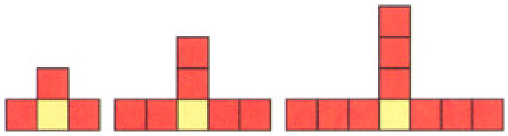
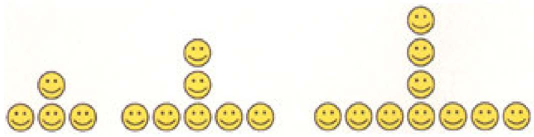
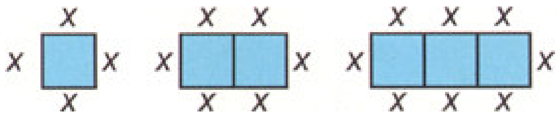
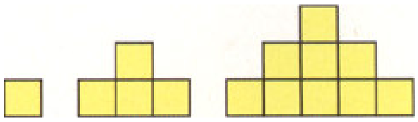
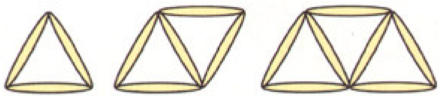
لقد بحثنا، من خلال أبحاث أجريناها على مهام الأنماط الآخذة بالكبر، تطور إطار عمل يمكن استعماله لتمييز طبيعة وتعقيد مهام كهذه. إننا مهتمون بشكل خاص في مهام الأنماط الآخذة بالكبر، المشار إليها بالأنماط الهندسية (NCTM 2000) أو الأنماط التصويرية الآخذة بالكبر (Billings, Tiedt, and Slater 2007/2008).

إن مصطلح العناصر الشكلية يشير إلى العناصر التي تحتوي على صفات حيزية وصفات مفاهيمية على حد سواء (Rivera, p. 69). الشكلية تعني أن العناصر (أو صور نفس الشيء) "تحتوي على ميزات أو تعرض علاقات بين بعضها البعض" (Rivera and Becker 2005, p. 199).

التركيز خلال البحث في الأنماط الهندسية (أنظر الأشكال 1-18) هو على استعمال التفكير الاستقرائي لتحليل متواليات الرموز الشكلية والعددية، مع تتبع الرموز العددية لنظام عددي معين (Rivera and Becker 2005). إننا نشدد بشكل خاص على استعمال التفكير بواسطة الأشكال (Figural-reasoning) خلال عملية التفكير الاستقرائي. "تستخدم الطريقة العددية للتفكير الاستقرائي مفاهيم وعمليات جبرية، في حين تستند الطريقة الشكلية إلى العلاقات التي يمكن استنتاجها بصريًا من مجموعة معطاة من الأمثلة العينية" (Rivera and Becker 2005, p. 199).

عندما يستعمل الطلاب التفكير بواسطة الأشكال، يكونون قادرين على إدراك الأشكال، مثل الأشكال في الشكل 1، عن طريق الانتباه إلى الرموز البصرية التي يمكن ترتيبها وترجمتها إلى متتاليات عددية. وتوضح هذه الرموز وتدعم تعميم النمط في قواعد العمل.

الشكل 1 	الشكل 10 
الشكل 2 	الشكل 11 
الشكل 3 	الشكل 12 
الشكل 4 	الشكل 13 
الشكل 5 	الشكل 14 

الشكل 15 	الشكل 6 
الشكل 16 	الشكل 7 
الشكل 17 	الشكل 8 
الشكل 18 	الشكل 9 

البيداغوجيا (طرق التدريس) المتعلقة ببدء العمل على هذه المهام

عند التفكير في إطار العمل، فإن البيداغوجيا هو مكوّن إضافي يمكن استعماله للتفاعل مع الطلاب في الوقت الذي يحلون هذه المسائل. إحدى الاستراتيجيات الشائعة هي الطلب من الطلاب البدء في المراحل الثلاث أو الأربع في التسلسل واستعمال المراحل الثلاث التي في القائمة 1 لتوجيه البحث. تشمل الاستراتيجية الأخرى (Friel et al. 2009) توفير ثلاث أو أربع مراحل فقط في تسلسل الأنماط الهندسية والطلب من الطلاب رسم المراحل المبكرة الناقصة في التسلسل وذلك من أجل تعزيز التفكير التنازلي والتصاعدي المتعلق بالعلاقات الممكنة في النمط.

تغيير لافت على مهمة نقطة البدء يتمثل في استعمال شكل في تسلسل يحتوي على مكان معين وواضح في التسلسل. ويمكن تحليل مبناه على نحو شكلي من دون الحاجة إلى الإشارة إلى رقم المرحلة. ويقدم Boaler and Humphreys (2005 نموذجًا ممتازًا بواسطة استعمال النص والفيديو على حد سواء لصورة 10 × 10 من التسلسل في الشكل 10. أنظر أيضًا إلى النقاش الذي يتناول استعمال هذه المهمة في الصفوف، الذي يورد الطرق المختلفة التي يمكن أن يستعملها طلاب الصفوف المختلفة للبدء في الحل (Ferrini-Mundy, Lappan, and Phillips 1997).

لقد وجدنا، لدى بحثنا في أنواع مهام النمط الهندسي التي تتلاءم مع التفكير بواسطة الأشكال، عددًا من المصادر التي توفر مجموعة من المهام المختلفة. وهي تناقش أيضًا، في العديد من الأمثلة، طرقًا يمكن بواسطتها تحليل هذه المهام والكيفية التي يمكنها أن تؤدي إلى تعميمات الأشكال لقواعد العمل. تنوعت هذه التحليلات من ناحية مستويات التجريد ومن ناحية الكيفية التي تم بها دعم الطلاب في تطوير قواعد العمل.
على الرغم من أننا لم نجد أي نقاش لتمييز تعقيد النمط—المهمة، إلا إننا عثرنا على عدة أمثلة يمكن دمجها في عملية مطورة جدًا من حل المسائل (Lee and Freiman, 2006).

سنتناول في هذا المقال عدة قضايا:

1. أولاً، سنلقي نظرة على عملية حل المسائل التي تدعم استعمال التفكير بواسطة الأشكال(Figural-reasoning) لاستكشاف وتفسير قواعد العمل لمهام الأنماط الهندسية.
2. ثانيًا، سنناقش إطارًا لتمييز تعقيدات مهام الأنماط الهندسية التي يمكن استعمالها كسياقات مطبّقة للتفكير الشكلي.
3. ثالثًا، سنلخص الاعتبارات الأخرى حول الكيفية التي يساهم بها الاستعمال طويل الأمد والموسّع في التطوير الشامل لتفكير عمل الطلاب؛ مثل كون الاعتبارات مهمة أيضًا عند تطوير إطار العمل.

عملية حل المسائل التي تعزز التفكير بواسطة الأشكال

وفر Friel, Rachlin, and Doyle (2001) الإرشادات لإنتاج ووصف التسلسلات الآخذة بالتزايد التي تعرض من خلال تشكيلة من السياقات التي كثيرًا ما تشمل مهام الأنماط الهندسية. يشمل أحد الإرشادات الذي يبرز التفكير بواسطة الأشكال "وصف الأشكال بشكل مختصر بالكلمات بطريقة يستطيع من خلالها شخص لم يرها أن يقوم بنسخ التسلسل" (ص.7).
على الرغم من أن هنالك تشديد على التفكير بواسطة الأشكال، إلا أنه في معظم الأمثلة، ينتقل تركيز التحليل بسرعة كبيرة إلى أسئلة "ما هو عدد". على سبيل المثال، أنظر إلى النمط الهندسي في الشكل 17. تتضمن أسئلة "ما هو عدد" ما يلي:

- ما هو عدد الوجوه المبتسمة الضرورية لصنع المرحلة الـــ 10؟
- ما هو عدد الوجوه المبتسمة الضرورية لصنع المرحلة الـــ 43؟
- ما هو عدد الوجوه المبتسمة الضرورية لصنع المرحلة الـــ 100؟
- ما هو عدد الوجوه المبتسمة الضرورية لصنع المرحلة الـــ n؟

عادة ما يتم إهمال الخطوات التي تركز على مكوّن التفكير بواسطة الأشكال للمهمة.
يقترح Lee and Freiman (2006) مجموعة من الأسئلة لتوجيه عملية حل المسئل من شأنه أن تبرز مرحلة التفكير المرئي، التي هي بمثابة حجر زاوية التفكير بواسطة الأشكال. على سبيل المثال، بالنسبة لسياق الوجوه المبتسمة الموصوف أعلاه، أنظر إلى الأسئلة في القائمة 1.

إذا قمنا بالتركيز على المرحلة أ، من الممكن أن يتصور الطلاب هذا النمط الهندسي بعدة طرق مختلفة (Lee and Freiman 2006). تتم مناقشة هذه الاستراتيجيات الممكنة وفائدتها في تعزيز التعميم في القائمة 2.

ويستطيع الطلاب، من خلال التفكير بواسطة الأشكال، مناقشة الاستراتيجيات وتطوير قواعد عمل تلائم أنماط تفكيرهم. وبعد أن يتمكنوا من هذه العناصر، يمكن تقديمهم إلى استعمال القوائم لتسجيل التلخيصات العددية، الاحتفاظ بسجل لعملية التفكير، من خلال قائمة فيها ثلاثة أعمدة (Wickett, Kharas, and Burns, 2002 ;Lawrence and Hennessy, 2002). هنالك ثلاث قوائم كهذه معروضة في القائمة 3، تتم مناقشة قائمة لكل واحدة من هذه الاستراتيجيات في القائمة 2.

عندما يحل الطلاب المسائل ويستعملون قائمة مع مهام الأنماط الهندسية، فإنهم يخطون الخطوة الأولى في عالم التفكير الوظيفي.

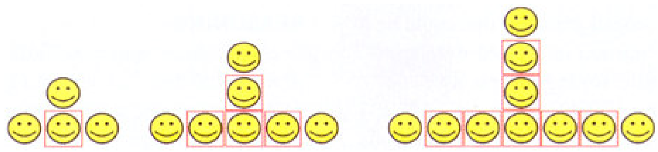
بعدها، نلقي نظرة على ميزات مهام الأنماط الهندسية التي تؤثر على التعقيد. لن يكون أي نمط قديم مفيدًا؛ من الجدير لنا التفكير حول متى وكيف يمكن إدخال أنواع مخالفة من الأنماط، في الوقت الذي يتم فيه تعزيز التفكير الوظيفي المتطور من خلال التفكير بواسطة الأشكال.

القائمة 1: خطوات في حل المسائل التي تساعد في تحليل مهام النمط الهندسي

(مقتبس عن Lee and Freiman, 2006).

<u>المرحلة أ:</u> التفكير بواسطة الأشكال بواسطة استعمال الميزات البصرية لمهمة النمط الهندسي	1. ما عدد الأنماط المختلفة التي يمكنكم رؤيتها في الرسم؟ (أنظر **الشكل 17**) أ. كيف كنتم سترسمون المرحلة التالية؟ ب. كيف كنتم سترسمون المرحلة الـ 10؟ ت. كيف كنتم سترسمون المرحلة الـ 58؟ ث. كيف كنتم ستفسرون بشخص ما كيفية رسم كل مرحلة؟ 2. يوجد لدي علبة فيها 25 وجهًا مبتسمًا. ما هو كبر الشكل الذي يمكنني بناءه منها؟ هل ستبقى لدي وجوه مبتسمة لم أستعملها؟
<u>الخطوة ب:</u> تطوير علاقات عددية من أجل الوصول إلى التعميم	3. ما عدد الوجوه المبتسمة التي نحتاجها لإنتاج المرحلة الـ 10؟ الـ 58؟ الـ 100؟ 4. ما عدد الوجوه المبتسمة التي نحتاجها إلى إنتاج الشكل في المرحلة الـ n؟ 5. أي من التعابير للمرحلة الـ n هو التعبير "الصحيح"؟
<u>الخطوة ت:</u> توسيع تحليل الأنماط	6. أي مرحلة تحتوي على 100 وجه مبتسم بالتحديد؟ ماذا بالنسبة لـ 50 وجهًا مبتسمًا؟ 7. هل يمكنكم إنتاج مهمة من النمط الهندسي للصف.

القائمة 2: ثلاث استراتيجيات مختلفة للتفكير الشكلي لوصف نمط هندسي منفرد

الشكل أ 	تركز هذه الاستراتيجية على السطر الأفقي من الوجوه المبتسمة مع العامود الذي يتجه نحو الأعلى من المركز. يشمل شكل المرحلة 43 السطر الأفقي من مجموعتين من 43 وجهًا مبتسمًا وواحدًا آخر في المركز، وكومة من 43 وجهًا مبتسمًا بشكل عامودي.
الشكل ب 	هذه الاستراتيجية منوطة باستعمال شكل المرحلة السابقة وإضافة شكل لكل واحد من "الأذرع" الثلاثة. ومن أجل إيجاد المرحلة الـ 43، يجب معرفة كيف يبدو الشكل في المرحلة الـ 42 (عدد الوجوه المبتسمة) وإضافة 3 وجوه مبتسمة.
الشكل ت 	تشدد هذه الاستراتيجية على مجموعات متعددة من نفس عدد الوجوه المبتسمة. في المرحلة الـ 43 تكون هنالك 3 مجموعات من 43 وجهًا مبتسمًا، ووجه مبتسم إضافي في المركز

القائمة 3: تلخيصات عددية لاستراتيجيات التفكير بواسطة الأشكال

المرحلة	التفكير	عدد الوجوه المبتسمة	الشرح
		الشكل أ	
1	(1(h) + 1 (h) + 1) + 1 (v)	4	يعرض البيان العددي للاستراتيجية تفكير الطالب.
2	(2(h) + 2 (h) + 1) + 2 (v)	7	ومن شأن ترتيب كهذا أن يشدد على ما يتغير وما
3	(3(h) + 3 (h) + 1) + 3 (v)	10	يبقى ثابتًا. وهو يربط بشكل واضح بين رقم
4	(4(h) + 4 (h) + 1) + 4 (v)	13	المرحلة (المعطى - input) وبين مجموع عدد
.		.	الوجوه المبتسمة (المردود output).
.		.	
.		.	
n	(n(h) + n (h) + 1) + n (v)	(n + n + 1) + n	
ملاحظة: يشير الحرف h إلى الأجزاء الأفقية، والحرف v إلى الأجزاء العمودية من مبنى الشكل.)			
		الشكل ب	
1	1 + 3	4	قد يلاحظ الطلاب في هذه المرحلة أن فهم النمط
2	4 + 3	7	هذا لا يُترجم إلى تعبير عددي يجعل العلاقات
3	7 + 3	10	واضحة على غرار المرحلتين الأخريين.
4	10 + 3	13	
.	.	.	
.	? + 3	?	
.			
n	.	.	
		الشكل ت	
1	1 + 1 + 1 + 1		يؤدي هذا التفكير مرة أخرى إلى قاعدة عمل تربط
2	2 + 2 + 2 + 1	7	إدخال المعطى والمردود. ويستطيع الطلاب مقارنة
3	3 + 3 + 3 + 1	10	التعبير عن الشكل أ مع التعبير عن الشكل ت
4	4 + 4 + 4 + 1	13	(في القائمة 2) والتفكير في السؤال "أي من
.	.	.	التعابير للشكل n هو" التعبير الصحيح"؟ يستطيع
.	.	.	الطلاب العودة إلى التفكير الذي أدى إلى كل تعبير
.	.	.	
n	n + n + n + 1	3n + 1	لتحديد ما إذا كانت التعابير متعادلة.

تحليل تعقيد النمط

قبل أن تواصل القراءة، ألقي نظرة أخرى على الأنماط الهندسية الـــ 18 في الأشكال 1 – 18 في الصفحة 3. فكّر في تصنيف الأشكال في مجموعتين: الأنماط البسيطة والأنماط المعقدة.

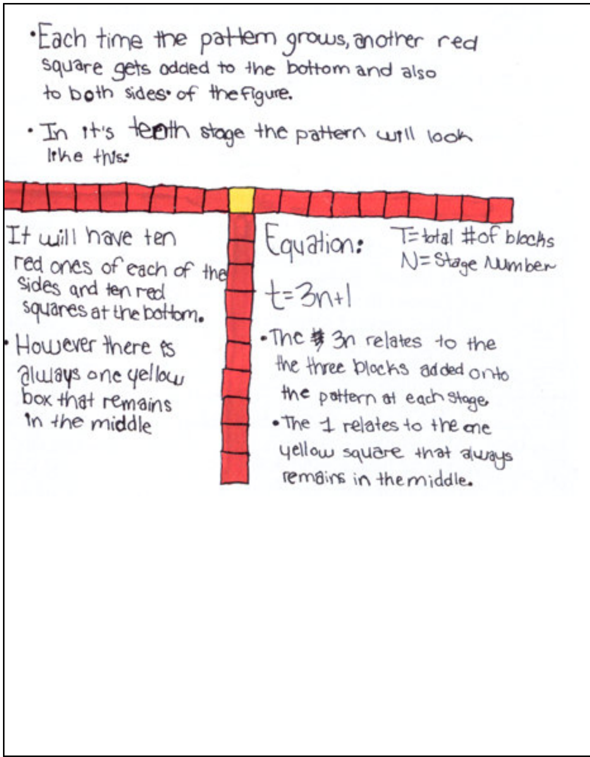
- أي من الأنماط تعتبرها بسيطة؟ لماذا؟
- أي من الأنماط تعتبرها معقدة؟ لماذا؟
- ما هي أوجه الشبه والاختلاف بين الأنماط؟
- كيف يمكن إبراز أوجه الشبه والاختلاف هذه لتعزيز استراتيجيات التفكير بواسطة الأشكال المختلفة؟

على الرغم من أن المعلم يستطيع أن يطرح أسئلة مختلفة حول أي من هذه الأنماط الهندسية، إلا أنه يجب التفكير في أسئلة يمكنها أن تساعد في التركيز على استراتيجيات التفكير بواسطة الأشكال. وفي الوقت الذي تنظر فيه إلى كل عنصر، ما هي الأنماط المختلفة التي تراها؟ كيف كنت سترسم أو ستبني المرحلة التالية؟ المرحلة الـــ 10؟ المرحلة الـــ 58؟ كيف كنت ستخبر شخصًا ما كيف يمكنه أن يرسم أي مرحلة في مجموعة الأنماط هذه؟ لقد حددنا في تحليلنا لهذه الأنماط الهندسية ولأنماط هندسية عديدة أخرى، في هذه المرحلة من التحليل، عدة تعقيدات تظهر وتستحق التفصيل.

يعكس النمط الهندسي الأكثر أساسية علاقة اختلاف خطية ومباشرة، كما هو مبيّن في الشكلين 1 و 2، التي فيهما المجموع الكلي لعدد المجموعات هو مضاعف لرقم المرحلة. لاحظ أننا نشير إلى كل شكل في تسلسل ما برقم المرحلة. ومن الممكن أيضًا استعمال مصطلحات أخرى مثل رقم الشكل، رقم النمط أو رقم الصورة. تعين هذه الأرقام ترتيب وتسلسل الأشكال داخل نمط آخذ بالكبر وهي الإدخال في قاعدة العمل.

ما أن تنتقل إلى المرحلة 2 من عملية حلّ المسالة، فإن حساب العدد الكلي من المجموعات يشمل خطوة منفردة تتعلق بعملية الضرب عند ربط عدد النمط وعدد المجموعات. وعادة ما تزيد إضافة ثابت إلى النمط الهندسي من تعقيده. لاحظ الفرق بين الأنماط في الشكلين 1 و 3. هنالك طوبة إضافية في كل مرحلة من النمط في الشكل 3. وقد يبدو هذا الفرق بسيطًا، لكنه يزيد من تعقيد النمط عن طريق جعل حساب العدد الكلي للطوبات (المرحلة 2) عملية ذات خطوتين تشمل الضرب (بـــ 1) والجمع (زائد 2). وهكذا فإن العلاقة الوظيفية للنمط في الشكل 3 تصبح $T = n + 1$، حيث أن T هو العدد الكلي للمجموعات، و n هو رقم المرحلة.

الشكل 19: تقرير ملخص الطلاب حول تحليلهم للشكل 7، بواسطة استخدام استراتيجية التمديدات الثلاثة المتطابقة ومربع المركز (الأصفر) الوحيد.



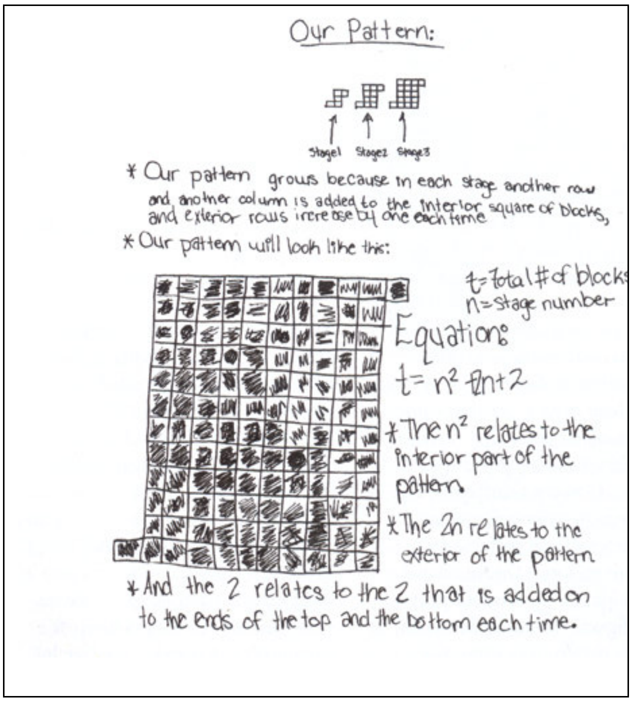
- في كل مرة يكبر فيها النمط، تتم إضافة مربع أحمر آخر إلى الجزء السفلي وأيضًا إلى جانبي الشكل.
- في المرحلة الـ 10 يبدو النمط كما يلي:
- سيكون له 10 حمراء من كل جانب و 10 في الجزء السفلي.
- ولكن، هنالك دائمًا مربع أصفر يبقى في الوسط.
- المعادلة

  T = مجموع عدد الأجزاء.

  n = رقم المرحلة.

  T = 3n + 1
- 3n تخص المجموعات الثلاث التي تضاف إلى النمط في كل مرحلة.
- 1 يخص المربع الأصفر الذي يبقى دائمًا في الوسط.

الشكل20: تقرير ملخص الطلاب لتحليلهم للشكل 14، يبين استراتيجيتهم المتعلقة بتحديد جزء المركز n×n، ومربعين إضافيين.



- نمطنا يكبر لأنه يضاف للمربع الداخلي في كل مرحلة للطوبات عامود آخر وسطر آخر يكبران بـ 1 في كل مرة.
- نمطنا يبدو كما يلي:

  T = مجموع عدد الأجزاء.

  N = رقم المرحلة.

  المعادلة: $T= n^2 + 2n + 2$
- n^2 يخص الجزء الداخلي من النمط.
- 2n يخص الجزء الخارجي من النمط.
- 2 يخص 2 التي تضاف في كل مرة للأطراف العليا والسفلى.

بالنسبة للطلاب الذين بدؤوا للتو في العمل مع الأنماط الهندسية، من الممكن ألا يكون تحديد الثابت أمرًا واضحًا. ومن الممكن الحثّ على استعمال استراتيجيات التفكير بواسطة الأشكال بطرق مختلفة.

على سبيل المثال، يمكن عرض مصطلح الثابت بواسطة استعمال طوبات ذات ألوان مختلفة في كل تسلسل نمط. كما ويمكن إظهار الثوابت بواسطة استعمال أشكال مختلفة؛ الثابتان في الشكلين 5 و 6 (مرة أخرى، زائد 1) معروضان بواسطة مثلث في الجزء العلوي من الشجرة ومسدس ذات مركز واحد، على التوالي.

الأمر الذي يجعل النمطين الهندسيين في الشكلين 5 و 11 أكثر تعقيدًا، هو أن الشكلين يكبران في كل مرحلة تالية. وتكبر الشجرة في الشكل 5 بمربع واحد وبشبه منحرف واحد في كل مرحلة. يستعمل الطلاب التفكير بواسطة الأشكال عندما يلاحظون هذه العلاقات. عندما ينتقل الطلاب إلى المرحلة 2 من العملية، ونظرًا لأن n هو عدد المربعات و n هو عدد أشباه المنحرف، فإن إحدى الطرق لتبريرهم للعلاقة الوظيفية هي عن طريق القاعدة $T = n + n + 1$، حيث أن الثابت 1 يمثل المثلث الموجود في القمة.

النمط في الشكل 11 هو إشكالي على نحو أكبر. إن عدد المسدسات هو واضح؛ تتطابق هذه القيمة مع رقم المرحلة. ولكن، على الرغم من أن الطالب قد يتوقع أن عدد المربعات سيكبر بـــ 6 في كل مرحلة (إضافة مسدس، وإضافة 6 مربعات حوله)، والأمر ليس كذلك. يمكن تصور المربع بأنه يتداخل، وهكذا تتم فقط إضافة 5 مربعات عمليًا في كل مرحلة تالية.

يمثّل التوضيح بواسطة أعواد الأسنان في الشكل 9 وضعًا مشابهًا. على الرغم من أنه تتم إضافة مثلث في كل مرحلة تالية، لا يضاف إلا عودين إلى المرحلة، لأن العود الثالث سيتداخل مع العود الموجود من قبل من المرحلة السابقة.

ما الذي يجعل النمط الهندسي في الشكل 12 أكثر تعقيدًا مما هو عليه في الشكل 7؟ الفرق بين هذين النمطين هو فقط في الكيفية الذي يبدءان بها، ولكن يجعل هذا الأمر اشتقاق الوظيفة أصعب. يوجد للنمط في الشكل 7 ثلاث شعاعات في كل مرحلة؛ عدد المربعات في كل "ذراع" يطابق رقم المرحلة (أنظر إلى عمل الطالب في الشكل 19). وهكذا، يمكن عرض العلاقة الوظيفية بواسطة المعادلة $T = 3n + 1$. في الشكل 12، عدد المربعات في كل "ذراع" يطابق عمليًا رقم المرحلة ناقص 1. ويمكن عرض هذه العلاقة الوظيفية عن طريق المعادلة $T = 3(n – 1) + 1$. من الممكن أن يجد الطلاب صعوبة في الوصول إلى هذه القاعدة إذا لم يتم تشجيعهم على التركيز على النمط الآخذ بالزيادة بنفسه وعلى ترجمته إلى نمط عددي من خلال استعمال قائمة ذات ثلاثة أعمدة.

النمطان الهندسيان في الشكلين 14 و 18 هما معقدان بشكل أكبر من الأشكال الأخرى لأنهما يمثلان علاقة غير خطية. على الرغم من أن النمط في الشكل 14 يبدو بأنه معقد إلى حد بعيد، إلا أنه يقع عمليًا ضمن حدود فهم الطلاب الذين كانت لديهن خبرة سابقة مع الأنماط الهندسية، خاصة في الصفوف التي تم فيها إبراز التفكير بواسطة الأشكال. هنالك طرق متعددة لرؤية النمط في الشكل 14 (أنظر Smith, Silver, and Stein 2005). في الشكل 20، يعرض الطلاب تقرير تلخيص لتحليلهم للشكل 14 مع قائمة تبيّن بنية النمط. وهم يبرزون، في تلخيصهم، المكونات المتعلقة بكيفية تحليلهم للنمط. يمكن لهذا النمط، على غرار العديد من

الأنماط الأخرى، أن يشجع مناقشة التعابير الرمزية المعادلة والإجابات المتعددة.

القائمة 4: مفتاح المعادلات

الشكل رقم	معادلات الحلول الممكنة (T – عدد الأشكال في المرحلة n)
1	طوبات: T = n
2	طوبات: T = 2 n
3	طوبات: T = n + 1
4	طوبات: T = n + 4
5	مثلثات: 1; أشباه المنحرف: n; مربعات: n; مجموع الأجزاء: T = 2n + 1
6	مثلثات: 1; مربعات: 6n ; مجموع الأجزاء: T = 6n + 1
7	طوبات: T = 3n + 1
8	المحيط: T = 2n + 2
9	קסמי שיניים: T = 2n + 1
10	طوبات في المركز: n^2; طوبات في المحيط: 4n + 4; مجموع الطوبات: $T= n^2 + 4n + 4$
11	مثلثات: n; مربعات: 5n + 1; مجموع الأجزاء: T = 6n + 1
12	طوبات: T = 3n - 2
13	طوبات سوداء: 4n + 1; طوبات بيضاء: 8n + 8; مجموع الطوبات: T = 12n + 9
14	طوبات: $T= n^2 + 2n + 2$
15	مكعبات: T = 3n + 1
16	مساحة السطح: T = 4n + 2
17	وجوه مبتسمة: T = 3n + 1
18	طوبات: $T = n^2$

من ناحية ثانية، النمط في الشكل 18 يساهم في التحليل الذي يستخدم التفكير بواسطة الأشكال. ويميز Sasman Olivier, and Linchevski (مقتبس في Rivera 2007) بين الأنماط الهندسية الشفافة وغير الشفافة. الأنماط الـــ 17 الأخرى هي أنماط شفافة؛ يمكن الحصول على العلاقة الوظيفية بسهولة من خلال التفكير بواسطة الأشكال. ولكن، نمط الشكل 18 هو غير شفاف، من حيث "أن هنالك حاجة لعمل شيء قبل أن يتمكن الطلاب من رؤية قاعدة العمل الممكنة من الرموز المتوفرة" (Rivera 2007, p. 72). من الممكن أن يتم فصل المربع الموجود على الجانب الأيسر من أعلى عامود، إدارته بـــ 180 درجة وملاءمته في الدرج الواقع على الجانب الأيمن، الأمر الذي يخلق مربعًا.

توفر الأنماط في الأشكال 8، 15 و 16 أمثلة على كيفية إضافة تعقيد على الأنماط الأكثر بساطة. النمط الهندسي في الشكل 8 يطابق النمط الهندسي في الشكل 1. ولكن، من خلال طرح سؤال محفز بشكل أكبر، "ما عدد الأشخاص الذين يمكنهم الجلوس حول الطاولة في كل مرحلة؟" يتحول إلى مسألة محيط سياقية، مع علاقة وظيفية معقدة بشكل أكبر.

يعرض الشكل 16 نفس النمط في ثلاثة أبعاد. ويستطيع السؤال "ما عدد الملصقات من الوجوه المبتسمة التي نحتاجها لتغطية الشكل؟" خلق علاقة غنية مع مساحة السطح. إن علاقته الوظيفية هي في متناول يد الطلاب الذين يتم تشجيعهم على التعبير عن عملية التفكير بواسطة الأشكال لديهم. وبشكل مشابه، من الممكن أنك لاحظت أن النمط في الشكل 15 هو صيغة ثلاثية الأبعاد من الشكل 7. وتتيح صيغة الأبعاد الثلاثة هذه المزيد من الأسئلة المعقدة التي تتضمن الحجم ومساحة السطح.

تلخص القائمة 4 معادلات الحلّ الممكنة لكل شكل من الأشكال الـــ 18 المعروضة. وبالطبع، يستطيع الطلاب الانهماك في مهمة من هذه المهام بواسطة استعمال إطار العمل المناقش هنا؛ توفر هذه القائمة للقارئ أشكالاً واضحة من تعميم الأنماط (Friel et al. 2001, pp. 7-8)، ربط بنية الشكل برقم المرحلة.

إن من شأن عملية الدمج ا التي تتكون من عملية فعالة لحل المسائل التي تركز على التفكير بواسطة الأشكال ومن مهام الأنماط الهندسية المثيرة أن تمكّن طلاب الرياضيات على جميع المستويات من تعزيز الفهم الوظيفي. وعلى الرغم من أن تنوع الاعتبارات المتعلقة في كيفية استعمال هذه المهام هو خارج نطاق هذا المقال، إلا أنه تتم مناقشة بعض العوامل المتعلقة بتضمين هذه المهام في الصفوف المختلفة.

استعمال الإطار في التعليم

إن التركيز المتزايد على التفكير الجبري من الروضة وحتى الصف 12 يحتاج إلى توجيه الاهتمام إلى استعمال التفكير بواسطة الأشكال. وعندما يتم ضم ذلك على تحليل الأنماط الهندسية، يصبح الطلاب على مسار تطوير تفكير وظيفي راسخ. مع أخذ هذا السيناريو بعين الاعتبار، من الممكن البدء في التفكير حول أنواع المهام التي يمكن استعمالها في الصف الثالث مقابل الصف الثامن. ومن شأن تنظيم مسار فضفاض ولكن حكيم من مهام الأنماط الهندسية الآخذة بالكبر ليتم استعمالها في الصفوف 2 – 8 أن يوفر للمعلمين وللطلاب العديد من الفرص لاستكشاف التفكير الوظيفي في الطرق البصرية. إحدى الطرق هي جعل الطلاب يبحثون في "عائلات" مهام الأنماط ذات الصلة.

على سبيل المثال، الشكل 8 هو مهمة عدّ المحيط (أنظر Smith, Silver, and Stein 2005). ماذا يحدث عندما ينظر الطلاب على سلسة من المثلثات أو المخمسات أو المسدسات أو على أنواع أنماط أخرى مكونة من أكثر من نوع واحد من المضلعات؟

احتمال آخر هو ترتيب خيارات مهام الأنماط المنظمة في تسلسل تعليمي واستعمالها ضمن ومع الصفوف المختلفة (Smith, Hillen, and Catania 2007). ما هي قضايا الترتيب التي تحتاج إلى التطرق إليها؟ كيف يستطيع معلم في الصف الثامن البناء على التجارب من الصف السابع؟ وبشكل أوضح، إذا كانت تتم

معالجة عملية الترتيب هذه بشكل متواصل على مستوى جميع الصفوف، كيف سيظهر وسيتطور تفكير الطلاب الوظيفي؟ الإجابة هي ربما عميقة وبطرق يتعين علينا التفكير بها.

يوجد لاستعمال مهام الأنماط الهندسية في استكشاف العلاقات الوظيفية حدوده. فأرقام المراحل تقتصر على الأعداد الموجبة، العلاقات الوظيفية ليست تواصلية، والسياقات مقيدة بالضرورة. ولكننا نؤمن بأن تضمين مثل هذه المهام في دروس الرياضيات يوفر طريقة قيمة لتعزيز التفكير بواسطة الأشكال وتطوير فهم مفاهيمي غني للوظائف. يجب أن يوفر إطار عمل استكشاف هذه المهام نقطة انطلاق لإجراء المزيد من التحاليل لهذه الأنماط وطرق متعددة يمكن استعمالها لتعزيز التفكير الوظيفي.

المراجع

Billings, Esther, Tara Tiedt, and Lindsey Slater. "Research, Reflection, Practice: Algebraic Thinking and Pictorial Growth Patterns." *Teaching Children Mathematics* 14 (December 2007 / January 2008): 302-308.

Blanton, Maria L., and James J. Kaput. "Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning." *Journal for Research in Mathematics Education* 36 (November 2005): 412-446.

Boaler, Jo, and Cathey Humphreys. *Connecting Mathematical Ideas: Middle School Video Cases to Support Teaching and Learning*. Portsmouth, NH: Heinemann, 2005.

Driscoll, Mark. *Fostering Algebraic Thinking: A guide for Teachers 6-10.* Portsmouth, NH: Heinemann, 1999.

Ferrini-Mundy, Joan, Glenda Lappan, and Elizabeth Phillips. "Experiences with Patterning." ." *Teaching Children Mathematics* 3 (February 1997): 282-289.

Friel, Susan N., Fran Arbaugh, Edward S. Mooney, David K. Pugalee, Tad Watanabe, and Margaret S, Smith. *Navigating through Problem Solving and Reasoning in Grades 6-8.* edited by Peggy A. House. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2009.

Friel, Susan N., Sid Rachlin, and Dot Doyle. *Navigating through Algebra in Grades 6-8.* edited by Patricia A. House. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2001.

Lawrence, Ann, and Charlie Hennessy. *Lessons for Algebraic Thinking: Grades 6-8.* Sausalito, CA: Math Solutions Publications, 2002.

Lee, Lesley, and Viktor Freiman. "Developing Algebraic Thinking through Pattern Exploration." *Mathematics Teaching in the Middle School* 11(May 2006): 428-433.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM, 2000.

Rivera, Ferdinand D. "Visualizing as a Mathematical Way of Knowing: Understanding Figural Generalizations." *Mathematics Teacher* 101 (August 2007): 69-75.

Rivera, Ferdinand D., and Joanne Rossi Becker. "Figural and Numerical Modes of Generalizing in Algebra." *Mathematics Teaching in the Middle School* 11(November 2005): 198-203.

Smith, Margaret S., Amy F. Hillen, and Christy L. Catania. "Using Pattern Tasks to Develop Mathematical Understanding and Set Classroom Norms." *Mathematics Teaching in the Middle School* 13 (August 2007): 38-44.

Smith, Margaret S., Edward A. Silver, and Mary Kay Stein, with Marjorie A. Henningsen, Melissa Boston, and Elizabeth K. Hughes. *Improving Instruction in Algebra: Using Cases to Transform Mathematics Teaching and Learning.* Vol. 2 New York: Teachers College Press, 2005.

Wickett, Maryann, Katharine Kharas, and Marilyn Burns. *Lessons for Algebraic Thinking: Grades 3-5.* Sausalito, CA: Math Solutions Publications, 2002.