

האפס – סיכום מאמרים

תרגום ועיבוד: ברכה סגליס

מתוך המאמר: **Zero: A Special Case**, מאת: Patricia s. Wilson

במתמטיקה של ימינו האפס הוא מספר חשוב, אך לא תמיד היה כך! אנשים השתמשו במספרים במשך אלפי שנים לפני שהם השתמשו באפס. למעשה, לא היה אפילו סמל למספר אפס עד שנים אחרי תחילת הספירה הנוצרית. כיום אנו משתמשים באפס כדי לסייע לנו לייצג מספרים בכתב, גדולים כמו מיליון 1,000,000 וקטנים כמו אלפית 0.001. אנו משתמשים באפס בדרכים שונות, כאשר אנו מחברים, מחסרים, כופלים ומחלקים. למרות שהאפס הוא מספר שלם, הוא איננו מספר חיובי ואיננו מספר שלילי. מסיבות אלה מתמטיקאים בבואם לבחון את התיאוריות והרעיונות שלהם מתייחסים לאפס כמקרה מיוחד.

ההיסטוריה של התפתחות האפס

בתרבויות העתיקות התפתחו שימושים מתוחכמים של המתמטיקה הרבה לפני שאנשים חשבו על האפס. ישנן עדויות לשימוש בשברים, במספרים שליליים ואפילו במספרים אי-רציונליים כמו $\sqrt{2}$, לפני שהתחילו להשתמש באפס. לתופעה זו יכולים להיות הסברים שונים. בימי קדם המספרים שימשו למניית בעלי-חיים או עצמים. מניית אפס כבשים, או ככרות לחם לא היתה הגיונית. בהמשך התפתחו שיטות למנייה ורישום של מספרים גדולים. במצרים העתיקה השתמשו בהירוגליפים כבר בשנות 3500 לפני הספירה כדי לדווח על 400,000 שוורים ו-1,422,000 עיזים. למרות שקרוב לוודאי הכמויות מוגזמות, הן מעידות על כך שלמצרים היו שיטות מספרים מתוחכמות המסוגלות לטפל במספרים גדולים. היו להם גם סמלים לייצוג שברים פשוטים. ניתן היה לסדר את ההירוגליפים, או תמונות המספרים בדרכים שונות מבלי שזה ישפיע על ערכו של המספר. מיקום הסמלים לא היה חשוב, ולכן לא היה צורך באפס.¹ בערך ב-2500 לפני הספירה, הבבלים חרטו מספרים בלוחות חימר תוך שימוש בשיטת מספרים המבוססת על ערך המקום (פוזיציה) ובסיס 60. שלא כמו בשיטה המצרית, למיקום הסמלים היתה חשיבות. הבבלים השתמשו בשני סמלים לייצוג המספרים 1 ו-10. אם הסמל נכתב בקצה הימני של המספר הוא ייצג 1, המקום הבא משמאלו, ייצג 60, והבא משמאלו ייצג 60^2 , ו- 60^3 , וכך הלאה. שיטה זו דומה לשיטה העשרונית הנהוגה בימינו, שבה יש מקום לאחדות (10^0), לעשרות (10^1), למאות (10^2), לאלפים (10^3), וכו'. באיור 1 מוצגים שני מספרים בעלי סמלים זהים, אך ניתן לתת להם פרשנות כמותית שונה. את המספר הראשון מפרשים כ-200, ואילו את השני כ-10,820. הפרשנות היתה תלויה בקונטקסט שבו הופיע המספר הכתוב.

¹ גם שיטת הגימטריה העברית שבה מספרים מיוצגים על ידי אותיות הא"ב, אינה דורשת הקפדה על הסדר. הערך של המילה "ים" הוא 50. וכך גם ערכה של המילה "מי".

איור 1: לסמלים בשיטה הבבלית היו משמעויות מעורפלות



$$(3 \times 60) + (2 \times 10) = 180 + 20 \text{ או } 200$$



$$(3 \times 60^2) + (0 \times 60) + (2 \times 10) = 10,800 + 0 + 20 \text{ או } 10,820$$

לפעמים הבבלים השתמשו ברווח כדי לייצג מקום ריק. בערך בשנת 200 לספירה, החלו להשתמש בבבל בזוג משולשים קטנים לייצוג מקום ריק באמצע של מספר. זה היה כנראה השימוש הראשון לשומר מקום.

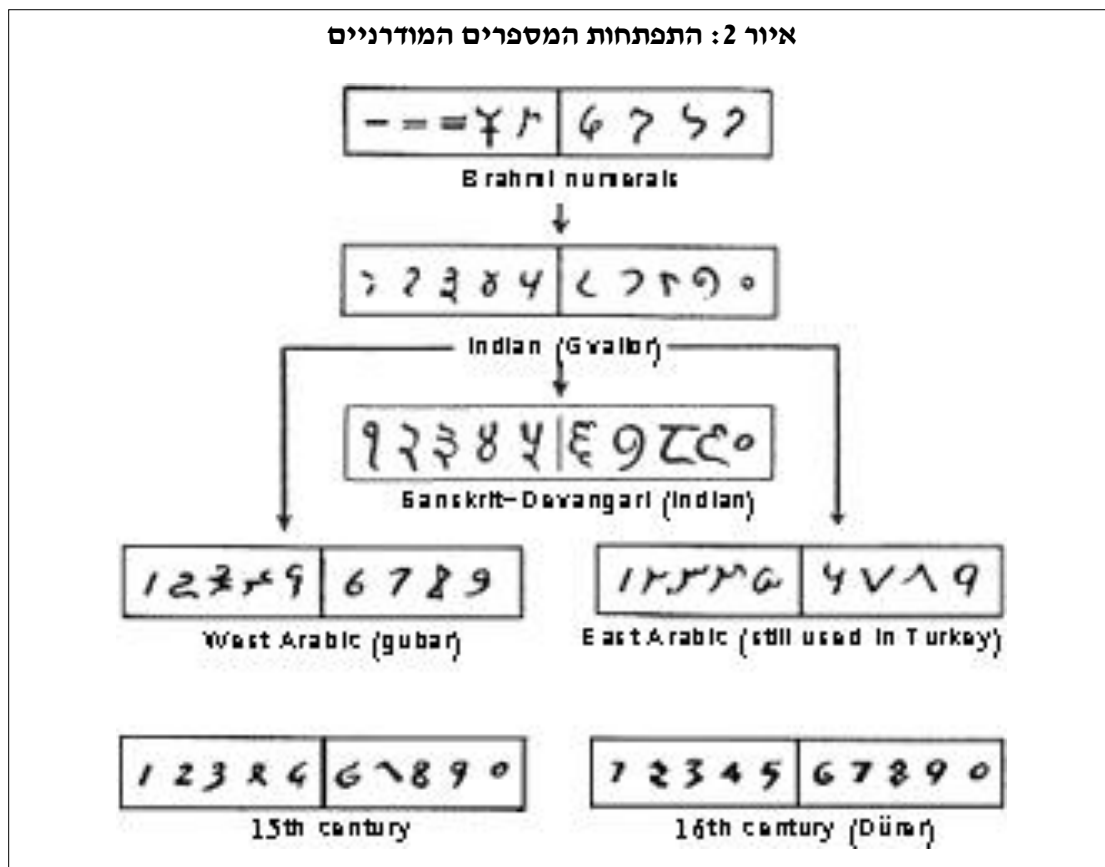
לסינים היתה גם כן שיטה המבוססת על ערך המקום (פוזיציה) שהשתמשה במקלות לבטא מקומות בבסיס 10, אבל הם לא הצליחו למצוא סמל שיבטא את המקום הריק. במשך אלפי שנים, אנשים השתמשו בשיטות מספרים מתוחכמות ללא הרעיון של אפס. למרות שהבבלים לא ממש המציאו את האפס, הם הבינו את הבעייתיות שבשיטת המספרים שלהם וצעדו צעד חשוב לכיוון יצירת האפס שאנו מכירים היום. גם המתמטיקאים ביוון העתיקה ובאלכסנדרייה שבצפון אפריקה, שיצרו מתמטיקה מדהימה, חקרו דפוסים מספריים ואפילו העלו שאלות בתורת המספרים שנחקרות עד היום, עשו כל זאת ללא האפס. סיבות אפשריות לכך שהם לא יצרו את האפס הן, ששיטת המספרים שלהם לא היתה פוזיציונלית והאפס לא היה דרוש בה כשומר מקום². את החישובים שלהם הם ביצעו בעזרת חשבונייה, בדומה לסינים ולרומאים. באירופה השתמשו בחשבונייה לצורך חישובים עד למאה ה-16. את הקרדיט על ההמצאה של האפס נהוג לתת להודו. בשנת 200 לספירה, כבר היתה לתרבות ההינדית שיטת מספרים פוזיציונלית בבסיס 10. באחד הכפרים בהודו נכתב כתב-יד שתיאר כללים לחישובים ולאגברה. בכתב יד זה השתמשו לצורך החישובים, בנקודה לסימון מקום ריק. השם לנקודה זו בסנסקריט היה "סניה", שפרושו "ריק". בשלב זה האפס שימש כשומר מקום במספר הכתוב ולצורך חישובים. בערך בשנת 500 לספירה, ההינדים השתמשו בעיגול קטן לייצוג האפס והוא הוכר כספרה.

בערך באותה תקופת זמן, מ-220 עד 900 לספירה, בני שבט המאיה שבאמריקה התיכונה השתמשו באפס בשיטת המספרים הפוזיציונלית שלהם שהיתה בבסיס 20. קרוב לודאי שהרעיון על האפס הומצא על ידי ההודים והמאיה בנפרד, באופן בלתי תלוי. הספרות ההודיות, שכללו גם את האפס, תרמו תרומה עצומה ליכולת החישוב. הערבים הכירו בערכה של השיטה ההינדית, אמצו את הספרות ואת החישובים, והפיצו רעיונות אלה במסעותיהם.

הערבים כינו את האפס בשם sifr שלימים הפכה באנגלית למילה cipher, שפרושה "לחשב". המילה zero לציון האפס נקבעה באיטלקית.

² השיטה של היוונים דומה לשיטת הגימטריה העברית.

סוחרים גילו עניין מיוחד בשיטת החישוב היעילה עם הספרות ההודיות-ערביות.³ בשנת 1170 נולד הילד לאונרדו, הידוע יותר בשם: פיבונאצ'י, למשפחת סוחרים שגרה בצפון אפריקה. המורה הערבי שלו לימד אותו את הספרות ההודיות-ערביות וכשהנער גדל הוא למד להעריך את חשיבותן במסעותיו. פיבונאצ'י כתב ספר בשם: Liber Abaci (ספר הספירה) שהפיץ בהתלהבות רבה באירופה ובו הביא את הרעיונות של האפס ואת שיטות החישוב החדשות. האירופאים התנגדו לספרות ההודיות-ערביות. השיטה החדשה נראתה להם מוזרה, והם דחו אותה, כולל את האפס. ב-1299 יצא חוק באיטליה שאסר שימוש בספרות החדשות, משום שניתן בקלות לשנות את ה-0 ל-6 או ל-9. למרות זאת, בהדרגה הספרות החלו להיות מקובלות ובסוף שנת 1500 לספירה כבר היו בשימוש בכל אירופה (ראו איור 2).



אפס כמספר מיוחד

כאשר שיטת המספרים החדשה הפכה מוכרת, המתמטיקאים גילו את התכונות המיוחדות של האפס. מתמטיקאים כמו, קרל גאוס (1777-1855) וסופי זירמן (1776-1831) ראו את החשיבות של האפס במתמטיקה. דוד הילברט (1862-1943) ואמי נטר (1882-1935) עזרו לנו להעריך את התכונות של האפס.

³ שיטת חישוב זו היתה המקור לאלגוריתמים המקובלים כיום בעולם לביצוע חישובים במאונך בארבע פעולות החשבון.

התכונות הבאות מראות שהאפס הוא מספר מיוחד :

- אם מוסיפים אפס למספר ממשי, הסכום הוא אותו המספר. אם מורידים אפס ממספר ממשי, ההפרש שווה לאותו המספר.
- אם כופלים מספר ממשי באפס, המכפלה שווה לאפס.
- אם מעלים מספר כלשהו (שאינו אפס) בחזקה של אפס, התוצאה היא 1.
- אם מחלקים אפס במספר כלשהו, שאינו אפס, המנה היא אפס.
- חלוקה של כל מספר שהוא באפס אינה מוגדרת.

הערה למורה

סקירה היסטורית זו שופכת אור על מספר רעיונות חשובים אודות המתמטיקה :

- המתמטיקה התפתחה במשך אלפי שנים ותרבויות רבות תרמו להתפתחותה.
- לאפס יש תכונות יוצאות דופן. פעולות עם אפס מוגדרות בדרכים המשמרות כללים הקיימים במתמטיקה.
- רעיונות מתמטיים נוצרו כדי לענות לצרכים של אלה שעוסקים במספרים.

מתוך המאמר: **Zero: A "none" Number?**

מאת: Glenda J. Anthony and Margaret A. Walshaw.

מדוע האפס הוא מספר כל כך בעייתי? הרחבת מושג הקרדינליות⁴ כדי לכלול בו את הרעיון של אוסף שאין בו פריטים – מה שהמתמטיקאים מכנים קבוצה ריקה, אינו רעיון פשוט עבור ילדים צעירים. אם כי ילדים יכולים להבין את הרעיון שאין לי תפוחים, הרי שהרעיון ש- אין תפוחים ו- אין כבשים ו- אין אנשים זה אותו דבר משום שיש להם אותה קרדינליות, הוא מופשט מאוד, למרות שהוא נובע בעצם מן הרעיון שלשני אוספים של עצמים שונים, יכולה להיות אותה קרדינליות.

כמו כן, בשונה מהמספרים שילדים נחשפים אליהם בראשית דרכם, לא נוהגים לציין את האפס כאשר סופרים, ועל אחת כמה וכמה כאשר מונים⁵. האפס שייך לקבוצת המספרים השלמים הכוללת את המספרים הטבעיים (1, 2, 3, ...), את האפס ואת קבוצת המספרים השליליים. מנקודת המבט של מניה, קל יותר להיווכח שאין בחדר פילים, מאשר לומר שיש בחדר "אפס" פילים. כלומר, המושג "אין שום דבר", קל יותר להבנה מאשר המושג "יש אפס".

תפקיד האפס כשומר מקום, במספר הכתוב לפי ערך המקום, תועד גם הוא לעיתים קרובות כבעייתי לתלמידים בראשית לימודי הקריאה והכתיבה של המספרים. בניסיון להבין מספרים כמו 100, 101, ו-110, מתארים חוקרים כיצד אחד התלמידים אמר בהארה: "אני יודע! אפס זה כלום – של משהו". גם תלמידים בוגרים יותר מתקשים לעיתים לכתוב מספרים גדולים המכילים אפסים. במחקר שנערך בניו-זילנד, מתוך 2869 תלמידים, רק 11% מתלמידי כיתה ד' ו-50%

⁴ קרדינליות פרושה מספר האיברים של קבוצה. כאשר מונים עצמים, המספר של העצם האחרון שמונים מבטא את הקרדינליות של קבוצת העצמים, והוא התשובה לשאלה: כמה עצמים בקבוצה?
⁵ ספירה היא אמירת שמות המספרים לפי הסדר. מנייה היא ספירה לצורך מציאת כמות.

מתלמידי כיתה ח' כתבו נכון את המספר: "מאתיים אלף ארבעים ושלוש".

קושי נוסף הקשור לאפס הוא בביצוע חישובים בחיסור בעזרת האלגוריתם המקובל של חיסור במאונך. כאשר מופיעה הספרה אפס באחת מעמודות המחסר (המספר התחתון) פרוש הדבר הוא שאין מה לחסר וזה גורם לתלמידים אחדים בלבול ותהיה מה צריך לעשות. כאשר מופיעה הספרה אפס באחת מעמודות המחוסר (המספר העליון), פרוש הדבר הוא שבעמודה זו אין ערכים, וזה יוצר מצב לא רגיל הפתוח למגוון של תהליכי פתרון יצירתיים (כגון: לרשום אפס; "ללוות" מהעמודה הסמוכה בדיוק כמה שצריך; להפוך את הסדר ולחסר מהמספר התחתון; ועוד). באותו האופן, מופיע בלבול גם בכפל וחילוק עם אפס ובתרגילי כפל שבהם אחד הגורמים מכיל אפס, כמו 9×306 . גם בעיות של השוואת מספרים עשרוניים, כמו 0.02 ו- 0.002 , או 0.2 ו- 0.20 , הן מקור לקשיים עבור תלמידים רבים.

הקשיים של תלמידים לגבי מושג האפס אינם רק בחישובים. במחקר שבדק הבנה של תלמידים אודות תכונות של מספרים, 50 תלמידי כיתה ד' ו-50 תלמידי כיתה ח' נשאלו: "האם ישנו מספר שאפשר לחסר או לחבר ל-7 והתוצאה תישאר אותו הדבר?" 40% מתוכם חשבו שאין כזה מספר. להלן דוגמאות לתשובות שהם נתנו:

- לא, אי אפשר. זה בלתי אפשרי.
- לא, אפשר לחסר ואחר כך לחבר אותו שוב, או לחבר ואחר כך לחסר אותו שוב (הכללה של $a+b-b=a$ או $a-b+b=a$).
- לא, זה לא יישאר אותו דבר, זה ישתנה למספר אחר, זה כל פעם ישתנה למספר אחר.
- אפשר לכפול את 7 ב-10 ולקבל 70, ואז אם מורידים את האפס זה יהיה שוב 7.

גם חלק מן התלמידים שענו שזה אפשרי, נתנו תשובות המעידות על הקושי בחיבור או חיסור של "שום דבר":

- תכתוב את זה יפה ותרשום סימן שווה ואז אל תעשה כלום!
- אם יש 7 ולא מוסיפים לו שום דבר זה נשאר אותו מספר. אם יש 7 ולא לוקחים ממנו שום דבר, זה עדיין אותו מספר.
- כן, כי פשוט שומרים את המספר 7 ולא לוקחים ממנו שום מספרים, ואז זה נשאר 7.
- אפס הוא שום דבר.

הסברים אחדים היו קשורים לרעיון שאפס הוא "אין מספר":

- אם כותבים 7 ואחרי זה סימן של פחות ואחרי זה כותבים אפס, אז אין שם מספר. לא מחסרים שום מספר.
- אפס זה כלום. אז הוא לא נחשב.
- זה אפס. כי אפשר להוסיף אפס ל-7, כי זה לא מספר.
- בגלל שבאפס אין שום מספר, אז אי אפשר לחסר כלום. פשוט משאירים אותו שם.
- אפס זה שאין מספר.
- בגלל שאפס זה לא באמת מספר, הוא לא עושה כלום.

אחרים התמקדו ברעיון שאפס "לא עושה כלום" או "אי אפשר לעשות איתו כלום":

- אפשר להוסיף אפס או להוריד אפס, כי שום דבר לא קורה.
- אי אפשר לעשות שבע פחות אפס, אז זה פשוט נשאר 7.
- אפס זה שום דבר, אז אי אפשר לעשות לו כלום.

החולשה בהסברים כאלה טמונה בחוסר השלמות שלהם. בעוד שבמצבים מוחשיים קבוצה ריקה מאפשרת להתעלם מנוכחות האפס, לא ניתן לעשות זאת כאשר מבצעים חישובים במספרים רב-ספרתיים כמו $67+20$. הסכנה האמיתית בהתייחסות לאפס כ-"שום דבר" הוא ההשתמעות שלא צריך לקחת אותו בחשבון. אפס הוא מספר חשוב ופיתרון תקף בחישובים כמו $7-7=0$. יתר על כן, בתרגילי כפל באפס כמו $0 \times 6=0$, האפס כן "עושה משהו"! התייחסות לאפס כ"אין מספר" תוביל לקשיים בהבנה והצדקה של תהליכי פיתרון משוואות מסוג $ax+b=0$ ו- $ab=0$.

שגיאה נוספת שנבעה מהרעיון שהאפס לא עושה כלום, היא בהשפעתו על פעולות הכפל והחילוק. התלמידים שדבקו ברעיון זה חשבו שהאפס הוא איבר ניטרלי גם בכפל ובחילוק:

- אם יש לך 7 כפול 3 אז זה יהיה 21, אבל 7 פעמים אפס זה פשוט 7.
- אם מחלקים 7 באפס זה יהיה תמיד 7, כי אפס זה שום דבר ואי אפשר לעשות כלום עם שום דבר.

על מנת למנוע הבנות שגויות כאלה, אנו ממליצים לתת לתלמידים להתמודד עם המורכבויות של האפס באופן הדרגתי, החל מהתנסויות ראשוניות במספרים בתרגילי חיבור וחסור. להלן דוגמאות לפעילויות המקנות הזדמנויות לחקור את תכונות האפס באופן משמעותי:

- דיון בשימושים של האפס במצבים מחיי היומיום, כמו: כתובות, מספרי טלפון, וסיסמאות.
- מציאת דברים בכיתה שיש מהם כמות של אפס.
- איסוף מיכלים קטנים והכנסת מטבע אחד בכלם פרט למיכל אחד. לבקש מהתלמידים לנחש באיזה מיכל יש אפס מטבעות.
- שימוש במצבים מחיי הכיתה שבהם אפשר לשאול שאלות הקשורות לאפס. כגון, כאשר רושמים נוכחות, לשאול מה יקרה אם אפס תלמידים יצאו מחדר הכיתה?
- הכנת כרטיסי נקודות לייצוג כמויות, והכללת כרטיס ריק ללא נקודות.
- בדיקת מערכי כפל של הגורמים 1 ו- 0.
- חקירת דפוסי מספרים הקשורים לחיבור, חיסור, כפל וחילוק עם אפס.
- ביצוע חישובים במחשבון עם מספרים שבהם מופיע אפס, כמו, מספרים עשרוניים.

חשוב לציין, כי בדיון בתכונות האפס יש להיזהר מהנחתת הכללים על ידי המורה. כללים כמו: "כל מספר כפול אפס הוא אפס" צריכים לנבוע מהתנסויות של התלמידים. כאשר מציגים מצבים בעלי משמעות, התלמידים מגיעים בעצמם להכללות הנדרשות. לדוגמה: בכל מלפפון יש 0 גרם שומן. כמה גרם שומן יש ב- 7 מלפפונים? או – במשחק הכדורגל בין בית"ר ירושלים להפועל

חיפה, התוצאה במחצית היתה אפס שתיים. כמה גולים היו לכל קבוצה?
הצעה נוספת היא להציג בפני התלמידים ביטויים שחלקם ביטוי אמת וחלקם - לא, ולדון עם
התלמידים עליהם. ביטויים כמו: $4+0>4$, $100-120=0$, $10+0=10$, מאפשרים לתלמידים
לבחון ולהסביר רעיונות הקשורים בתכונות האפס. דיונים כאלה על האפס ותכונותיו, מאפשרים
לתלמידים ליצור הכללות התומכות בהמשך בלימודי האלגברה.

קבלת האפס כמספר המסמל מצבים בהם יש "כלום של משהו", מציין את ההתפתחות של מערכת
המספרים שלנו. כשם שקבלת האפס והערכת חשיבותו ושימושיו התרחשו באיטיות במהלך
התפתחות התרבויות, כך גם התלמידים זקוקים לזמן ולהתנסויות משמעותיות כדי להגיע לרעיון
של מספר שמסמל שום דבר. המחקר שלנו טוען שאם מתעלמים מההבנות השגויות הראשוניות
של תלמידים אודות האפס, הן עלולות להשפיע על המשך ההבנה של תכונות המספר ועל
התפתחות החשיבה האלגברית. מחקרנו מהווה תזכורת לכך שהאפס הוא מספר חשוב שיש לשלבו
בזהירות בתוך ההתנסויות הראשוניות של תלמידים על מנת למנוע מחשבה שהוא "אין מספר".

ביבליוגרפיה

Anthony G. J. & Walshaw M.A. (2004). Zero: A "none" Number? *Teaching Children Mathematics*, 11 (1), 38-42.

Wilson P. S. (2001). Zero: A special Case. *Mathematics Teaching In the Middle School*, 6 (5), 301-303.