טרנספורמציות וסימטריה

ד"ר מריטה ברבש, המכללה האקדמית לחינוך אחווה
ד"ר ניצה כהן, המכללה האקדמית לחינוך ע"ש דוד ילין, ירושלים

מונחון זה הוא הראשון מבין מספר מונחונים שעניינם טרנספורמציות וסימטריה במישור.

מונחון א: שיקוף וסימטריה שיקופית

הקדמה: טרנספורמציות איזומטריות במישור

כאשר מדברים על טרנספורמציות במישור, מתכוונים לפעולות מסוימות שמבצעים על המישור, ולומדים תכונות של פעולות אלה.

בין היתר, שמים לב למספר תכונות מרכזיות המייחדות כל טרנספורמציה;

- **שימור או שינוי במרחקים.**

באופן אינטואיטיבי אפשר לראות טרנספורמציה כ"תנועה" של נקודות במישור. הטרנספורמציה נקראת **שומרת מרחקים** אם כל קטע יועתק תמיד לקטע השווה לו באורכו. הפירוש האינטואיטיבי של תכונה זו הוא שהצורות המועתקות לא משתנות (לא ב"צורתן" ולא בגודלן"), כלומר: הצורה שמתקבלת לאחר ביצוע טרנספורמציה כזו **חופפת** לצורה המקורית.

בבית הספר היסודי לומדים אך ורק טרנספורמציות השומרות על המרחקים. טרנספורמציות כאלה נקראות **טרנספורמציות שומרות מרחק**, או **איזומטריות.** מבחינים ב- 3 טרנספורמציות איזומטריות בסיסיות: **שיקוף, הזזה וסיבוב.** (במונחון זה נעסוק רק בשיקוף.)

- **שינוי או שימור מגמה** (ראו פירוט בהמשך)

- **נקודות שבת**, כלומר, נקודות שמיקומן לא השתנה כתוצאה מביצוע הטרנספורמציה.

הערות:

- אנו מתייחסים להעתקות __במישור__ בלבד, כלומר העתקות שהתחום שלהן והטווח שלהן הוא קבוצת נקודות המישור.

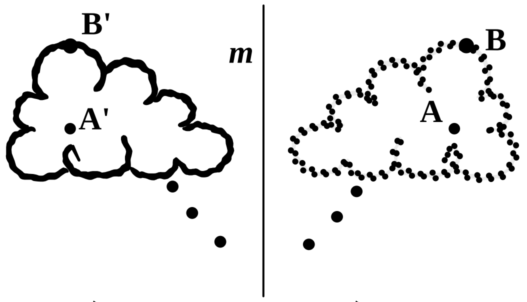
- הטרנספורמציות פועלות **על נקודות**. לעיתים קרובות אנו מתעניינים במה שקורה **לצורה** (שהיא למעשה קבוצת נקודות). במקרה זה אנו מתבוננים **בצורה שהתקבלה** (שהיא למעשה אוסף הנקודות שהתקבלו).

שיקוף וסימטריה קווית

אחת הטרנספורמציות החשובות ביותר היא **שיקוף**. פעולת השיקוף נעשית **ביחס לישר נתון**, המשמש כקו השיקוף (ציר השיקוף).

השיקוף בישר *m* הוא טרנספורמציה המעתיקה כל נקודה במישור אל "תמונת הראי" שלה ביחס לישר ***m*** . הישר *m* הוא **קו השיקוף**.

בדרך כלל אנו מתעניינים בשיקוף של **צורות**, ומתבוננים בצורה המקורית וב"תמונת הראי" שלה.

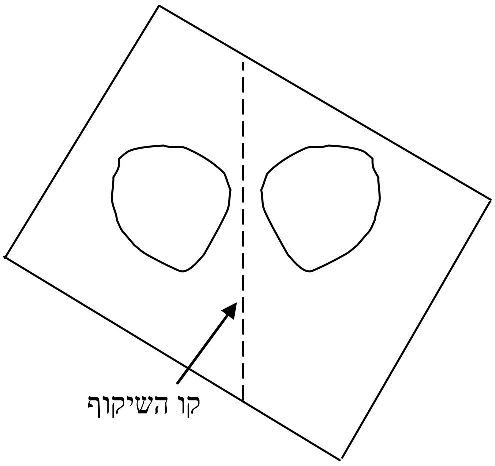


כשמשקפים צורה כל נקודה בצורה מועתקת ל"תמונת הראי" שלה, למשל: A מועתקת ל- 'A, B מועתקת ל- 'B, ובסך הכול מתקבלת צורה החופפת לצורה המקורית.

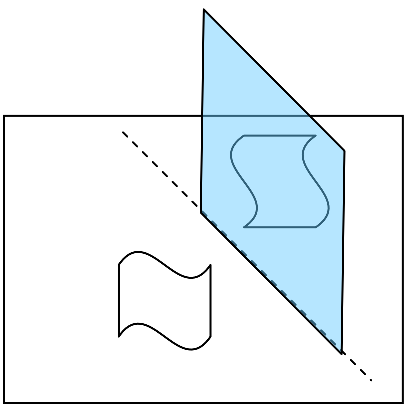
את השיקוף של צורה אפשר להדגים בכמה דרכים:

- על ידי **קיפול נייר**. למשל: נשרטט צורה כלשהי על דף נייר שקוף, נקפל את הדף ונעתיק את הצורה על החלק השני של הדף. אם נפתח כעת את הדף המקופל, נקבל צורה חדשה, שהיא **סימטרית** לצורה המקורית. זוהי תמונת השיקוף של הצורה המקורית. הקו שלאורכו קיפלנו את דף הנייר הוא **קו השיקוף**, ושתי הצורות - המקורית וזו שיצרנו - הן **צורות סימטריות זו לזו ביחס לקו זה**.

  (רעיונות נוספים לשימוש בקיפול להדגמת השיקוף: קיפול וניקוב, קיפול וגזירה וכדומה).

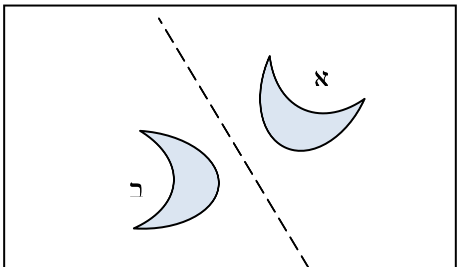


- **שיקוף בעזרת מראה.** נניח מראה (בניצב לדף) ונתבונן בבבואה של הצורה שלנו בראי. הבבואה הנראית בראי היא תמונת השיקוף של הצורה שלנו. הישר שלאורכו מניחים את המראה הוא "קו השיקוף".

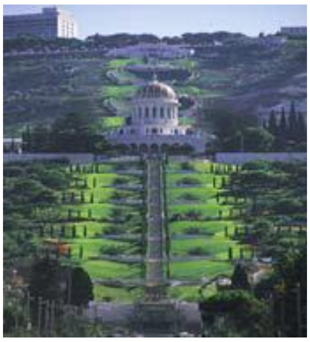


הערות:

- השיקוף הוא פעולה "הדדית": אם צורה **א'** היא היא שיקוף של צורה **ב'** אז גם צורה **ב'** היא השיקוף של צורה **א'**. כאשר שתי צורות **סימטריות זו לזו** ביחס לקו נתון, כל אחת מהן היא השיקוף של האחרת בקו זה. קו השיקוף משמש במקרה זה כ"קו סימטריה".

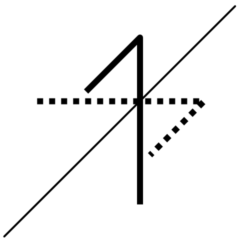


א' היא השיקוף של ב'
וב' היא השיקוף של א' בקו הנתון.

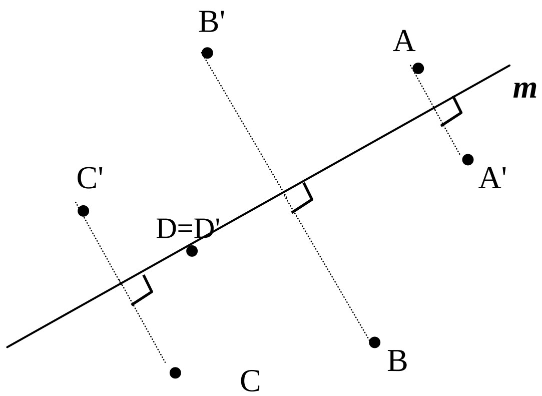


- אנו מתייחסים כאן לשיקוף המתרחש **במישור** ולא במרחב. נפרט מעט את ההבדל: השיקוף שאנו מכירים בחיי יום יום הוא בדרך כלל שיקוף במרחב, ויש בו מישור שיקוף (המראה, פני המים בתמונה שלהלן וכדומה) שבו נראית בבואה של עצמים תלת ממדיים. במונחון זה איננו מתייחסים לשיקוף כזה, אלא מתמקדים בשיקוף המתרחש **במישור**, ולכן יש **קו שיקוף** ולא מישור שיקוף. כשאנחנו משתמשים במראה להמחשת שיקוף במישור, אנחנו למעשה מתעלמים מן המרחב ומתמקדים מתוכו במישור שאנחנו מתעניינים בו (למשל הדף שעליו מצוירת הצורה). קו השיקוף במקרה זה הוא ישר החיתוך בין מישור המראה לבין המישור שלנו, והעובדה שהמראה עצמה "מישורית" ומסוגלת לשקף עצמים תלת ממדיים איננה רלוונטית. (כדאי לשים לב שהעובדה שאנחנו מחויבים להניח את המראה בניצב למישור שלנו נובעת מכך שאנחנו רוצים שהתמונה תישאר על אותו המישור שאנחנו מתעניינים בו).

- השיקוף פועל על **כל נקודות המישור** ולא רק על צד אחד של הישר. (השימוש בראי להדגמה מטשטש תכונה זו, שכן הצבת המראה גורמת להסתרה של "חצי המישור" שמאחוריה). הדוגמה שמשמאל, למשל, מדגימה שיקוף של צורה שיש לה חלקים משני צידי קו השיקוף.



• "תמונת השיקוף" של נקודה הנמצאת באחד משני צידי קו השיקוף ***m***, היא הנקודה הנמצאת באותו מרחק מ-***m*** בצד האחר, כך שהקטע המחבר את הנקודה המקורית עם "שיקופה" מאונך ל-***m*** .



בציור למשל:

A תעבור ל- **A'**

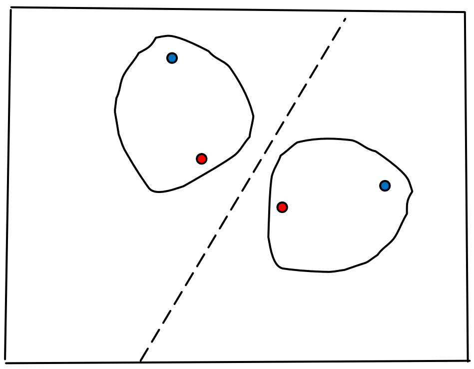
B תעבור ל- **B'**

C תעבור ל- **C'**

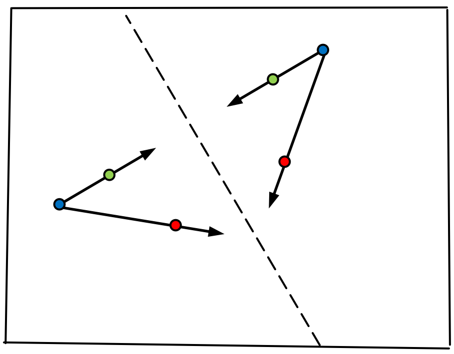
נקודה הנמצאת על קו השיקוף (כמו **D** למשל) עוברת לעצמה היות והיא "תמונת השיקוף" של עצמה. נקודה כזו נקראת **נקודת שבת**.

נתייחס לשלוש התכונות של טרנספורמציות כפי שהן באות לידי ביטוי בשיקוף.

1. **השיקוף הוא טרנספורמציה שומרת מרחקים** (איזומטרייה).



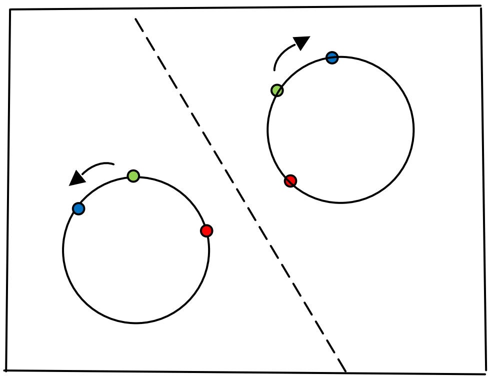
כלומר: המרחק בין שתי נקודות שווה תמיד למרחק בין שתי תמונות השיקוף שלהן. כדי להדגים זאת נבחר שתי נקודות כלשהן בצורה המקורית ונסמן את הנקודות המתאימות להן בצורה המשוקפת, המרחק בין שתי הנקודות בצורה המשוקפת שווה למרחק בין שתי הנקודות המקוריות. (המרחק בין הנקודה הירוקה והכחולה בצורה מימין שווה למרחק בין נקודות אלה משמאל)



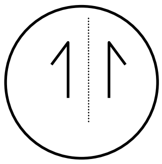
משמירת המרחקים נובעת גם **שמירה על זוויות**.
נדגים זאת: נתבונן בזווית הנוצרת בין שלוש הנקודות המסומנות, כאשר הנקודה הכחולה היא הקדקוד. מכיוון שכל המרחקים נשמרים, הרי שבהכרח נשמר גודלה של הזווית.

באופן כללי, שמירת המרחקים מבטיחה ש"הצורה" וה"גודל" לא ישתנו, כלומר:
הצורה המשוקפת חופפת לצורה המקורית.

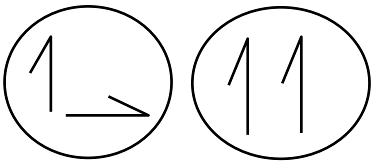
2. **תכונה חשובה מאד של השיקוף היא היפוך מגמה.**
נדגים זאת על אותן שלוש הנקודות הצבעוניות. נעביר מעגל דרך שלוש הנקודות הללו. על מנת להגיע מהנקודה הירוקה לכחולה ואחריה – לנקודה האדומה בצורה ימנית, יש לנוע **בכיוון מחוג השעון**. לעומת זאת, בצורה השמאלית, שהיא הסימטרית לימנית, נצטרך לשם כך לנוע **נגד** כיוון מחוג השעון.



באופן אינטואיטיבי אפשר להתייחס למגמה כאל שאלה על "היפוך" הצורה, ולתאר זאת על ידי הדימוי הבא: אם אפשר להגיע מהצורה האחת לאחרת על ידי העתקת הצורה על דף שקוף ותנועה של דף זה בלי להרימו מן המישור, סימן שהמגמה נשמרה. אם יש צורך להרים את הדף השקוף ולהפוך אותו כדי ללכד את הצורה עם הצורה האחרת – סימן שהמגמה התהפכה. בשיקוף, כאמור המגמה מתהפכת.



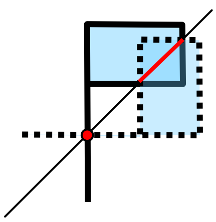
המגמה מתהפכת



המגמה נשמרת

3. **נקודת שבת**, היא נקודה שמועתקת אל עצמה. בשיקוף, הנקודות הנמצאות על קו השיקוף נשארות עליו, ולכן הן נקודות שבת. נקודות שהן מחוץ לקו השיקוף לעולם לא יהיו נקודות שבת, משום שהן תמיד עוברות לצד השני של הקו.
כאשר משקפים צורה שנמצאת כולה בצד אחד של הקו, לא יהיו לה נקודות שבת. לעומת זאת, אם קו השיקוף חותך את הצורה, כל הנקודות שעליו יישארו במקומן ויהיו נקודות שבת.

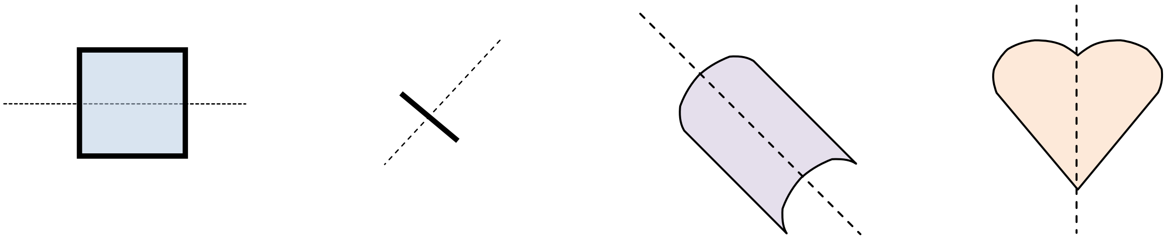
בדוגמה שמשמאל, נקודות השבת של הדגל בשיקוף המודגם מסומנות באדום.



סימטריה שיקופית בצורות

יש צורות המועתקות על עצמן בשיקוף, כלומר תמונת השיקוף של הצורה המקורית מתלכדת בדיוק עם הצורה המקורית עצמה. **במקרה כזה אומרים שהצורה היא סימטרית** בסימטריה שיקופית (או סימטריה קווית).

צורה היא בעלת **סימטריה שיקופית** אם קיים שיקוף המעתיק אותה על עצמה.



יש לשים לב שהנקודות של צורה כזו אינן בהכרח נקודות שבת, למרות שהצורה בשלמותה נשארת במקומה. במהלך השיקוף יכולה להיות כעין "התחלפות פנימית של נקודות". בדוגמות השמאלית שלעיל, למשל, הריבוע נופל על עצמו בשיקוף בקו הנתון, אבל רק הנקודות שעל קו השיקוף הן נקודות שבת. שאר הנקודות "מחליפות צד".

קו השיקוף שגורם לצורה ליפול על עצמה נקרא **קו סימטריה של הצורה** (לעיתים הוא נקרא "**ציר סימטריה**").

את הסימטריה השיקופית אפשר להדגים ולבדוק בכמה דרכים:

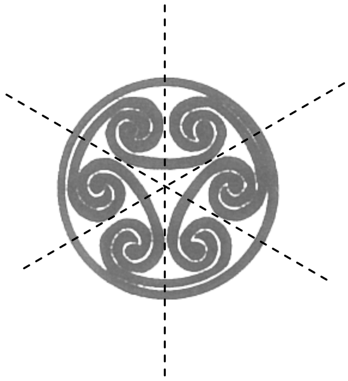
- אפשר לבדוק סימטריה שיקופית **על ידי היפוך הצורה**. למשל: מציירים את הצורה על דף שקוף, הופכים את הדף השקוף ומנסים ללכד את הצורה המועתקת עם המקורית. אם זה ניתן – סימן שלצורה המקורית יש סימטריה שיקופית. (החיסרון של דרך זו הוא שהיא לא "מסגירה" את קו הסימטריה.)

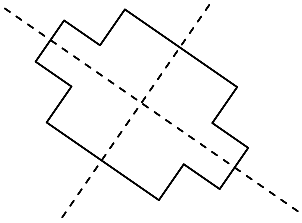
- אפשרות אחרת: **קיפול הצורה**. צורה היא בעלת סימטריה שיקופית, אם קיים לפחות קו אחד, שכאשר מקפלים את הצורה לאורכו שני החלקים מתלכדים (מכסים בדיוק זה את זה). קו הקיפול הוא **קו הסימטריה**.

- אפשרות נוספת: **בעזרת מראה**. צורה היא בעלת סימטריה שיקופית. אם קיים לפחות קו אחד, שאם מניחים עליו מראה, ההשתקפות במראה זהה לחלקה של הצורה המוסתר מאחורי המראה.

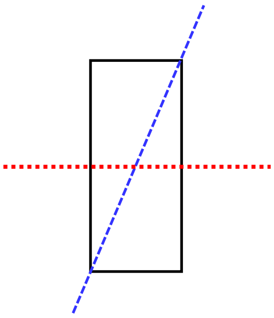
(החיסרון בדרך זו של בדיקה הוא שאי אפשר לראות בו זמנית את ההשתקפות במראה ואת החלק המוסתר כדי להשוות אותם בצורה מדויקת. קיימת אפשרות להשתמש במקום מראה בלוחית שקופה למחצה, שניתן לראות בה בעת ובעונה אחת את השיקוף של החלק הגלוי של הצורה וגם את חלקה ה"מוסתר" וכך לראות אם יש התלכדות ביניהם.)

הערות:

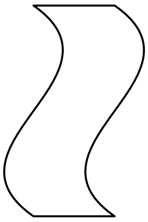




1. ייתכן שיש לצורה כמה קווי סימטריה

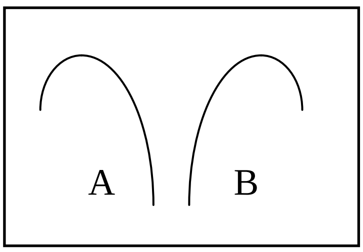


2. גם כאשר צורה היא סימטרית בסימטריה שיקופית, לא כל קו שיקוף הוא בהכרח קו סימטריה!
בדוגמה שמשמאל למשל, הקו הכחול איננו קו סימטריה של הצורה, מפני שאם נשקף בו את הצורה היא לא "תיפול על עצמה" כדי לחוש זאת אפשר לקחת מלבן דומה לזה שבציור, ולנסות לקפל אותו לאורך האלכסון. שני החלקים של המלבן לא יפלו זה על זה.
הקו האדום, לעומת זאת, בהחלט קו סימטריה של הצורה.

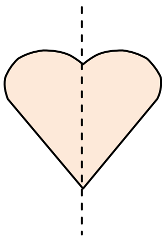


3. **קיימים גם סוגים אחרים של סימטריה**, למשל "סימטריה סיבובית".
לצורה שמשמאל למשל, אין סימטריה שיקופית משום שאינה מתלכדת עם עצמה בשום שיקוף, אבל יש לה סימטריה סיבובית, משום שהיא מתלכדת עם עצמה בטרנספורמציית סיבוב. נרחיב נקודה זו במונחון נפרד.
ייתכן, כמובן, שלצורה תהייה גם סימטריה שיקופית וגם סימטריה סיבובית.

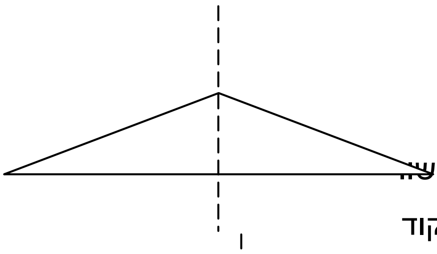
4. לעיתים נקראת הסימטריה השיקופית בשם "סימטריה קווית", המרמזת על כך שלצורה יש קו סימטריה ששיקוף בו מעתיק אותה על עצמה.



5. נבחין בין היחס **"סימטרי ל-"** לבין התכונה "**צורה סימטרית**"
את מה שמצויר כאן אפשר לראות כצורה סימטרית, ששני חלקיה A ו-B מהווים שלמות אחת, או כשתי צורות נפרדות - סימטריות זו לזו שכל אחת מהן איננה דווקא בעלת סימטריה.
כלומר: כאשר צורות הן סימטריות זו לזו, אין הן חייבות בדרך כלל להיות סימטריות בעצמן.
לעומת זאת, כאשר צורה היא סימטרית בסימטריה שיקופית, קו הסימטריה של צורה מחלק אותה לשתי צורות שהן סימטריות זו לזו ביחס לקו זה (שיקוף זו של זו).

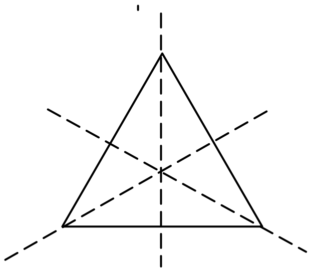


דוגמאות לסימטריה שיקופית במצולעים ובצורות אחרות

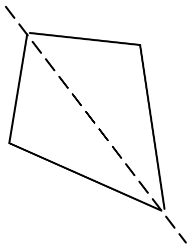


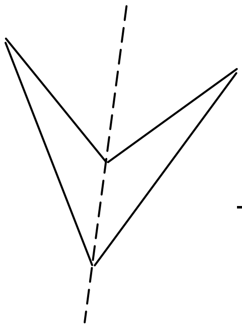
משולשים:

לא לכל משולש יש סימטריה קווית, אבל אם נקפל **משולש שווה שוקיים** לאורך הגובה שלו לבסיס, שני החלקים של משולש זה יתלכדו זה עם זה. במילים אחרות, מבין המשולשים, למשולשים שווי שוקיים יש סימטריה קווית, וציר הסימטריה שלהם עובר דרך קדקוד הראש שלהם במאונך לבסיס.



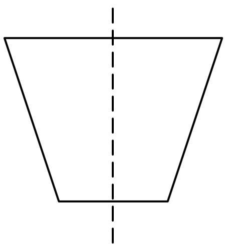
למשולש שווה צלעות יש שלושה קווי סימטריה:



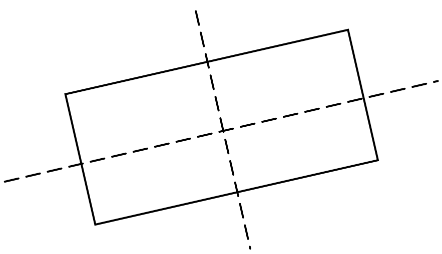


מרובעים:

דלתונים הם מרובעים בעלי **ציר סימטריה אחד** (מובן שאם הם דלתונים מיוחדים - מעוינים או ריבועים – יהיו להם יותר צירי סימטרייה)

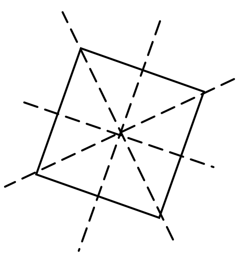


גם **לטרפז שווה השוקיים** ציר סימטריה אחד העובר דרך אמצעי הבסיסים שלו.

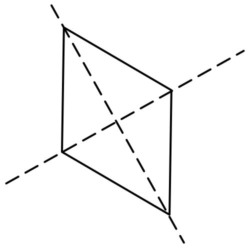


למלבנים יש **שני צירי סימטריה** (העוברים דרך אמצעי הצלעות הנגדיות שלהם):

כפי שהודגם קודם לכן, בדרך כלל האלכסונים של מלבן אינם משמשים צירי סימטריה שלו אלא אם המלבן הזה הוא מלבן מיוחד – ריבוע.

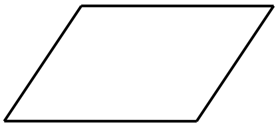


לריבוע, אם כן, **ארבעה צירי סימטריה**:



למעוין, כמו למלבן, יש **שני צירי סימטריה**, אלא שהפעם צירי הסימטריה הם האלכסונים.

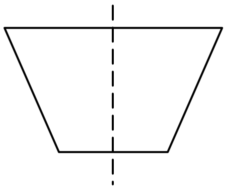
מעוין שיש לו ארבעה צירי סימטריה הוא בהכרח מעוין מיוחד - ריבוע.



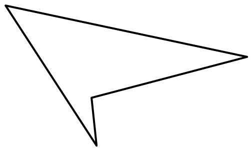
ל**מקבילית** בדרך כלל **אין בכלל צירי סימטריה שיקופית,** אלא אם מקבילית זו היא מקבילית מיוחדת (מעוין או ריבוע).

במקבילית שאינה מיוחדת אין שום קו שניתן לקפל בו כך ששני החלקים יפלו זה על זה.

שימו לב שאפשר לחלק את המקבילית לשני חלקים חופפים (למשל על ידי העברת האלכסון), אלא שחלקים אלה **אינם שיקוף זה של זה**. חשוב לציין שלמקבילית אין אמנם סימטריה שיקופית, אבל יש לה סימטריה מסוג אחר – סימטריה סיבובית.



טרפז שיש לו ציר סימטריה הוא בהכרח טרפז שווה שוקיים:

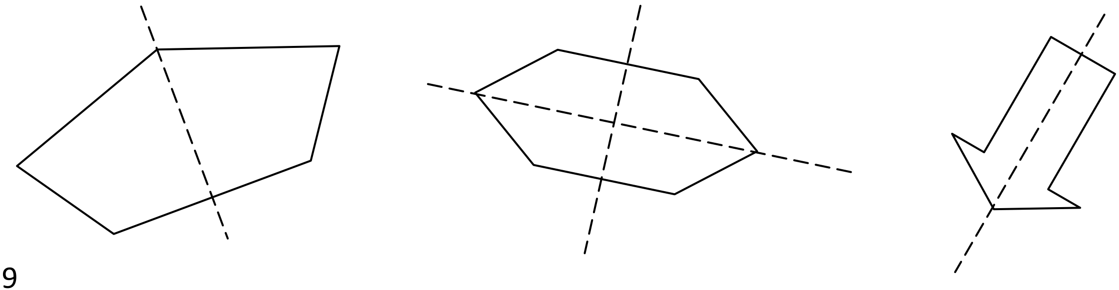


מובן שיש גם מרובעים שאין להם כלל סימטריה שיקופית, למשל:

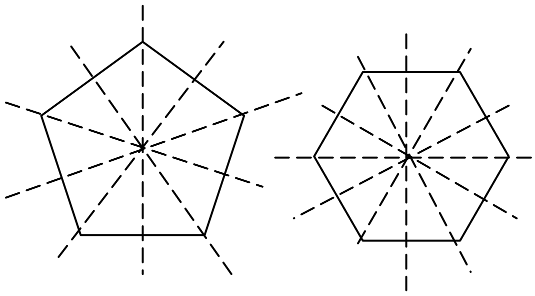
מצולעים אחרים

בין המצולעים האחרים יש כמובן כאלה שאין להם סימטריה בכלל , למשל:

יש מצולעים בעלי ציר סימטריה אחד או יותר, למשל:

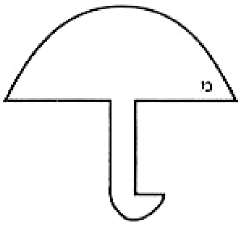


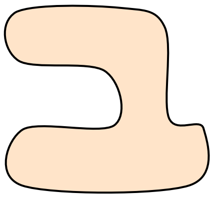
כל מצולע משוכלל הוא צורה סימטרית, ומספר צירי הסימטריה שלו הוא כמספר הצלעות שלו.



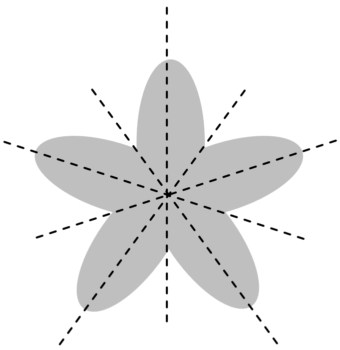
צורות שאינן מצולעים:

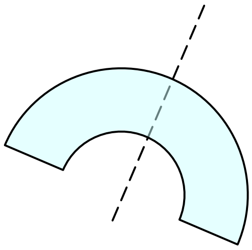
צורות שאין להן סימטריה שיקופית:

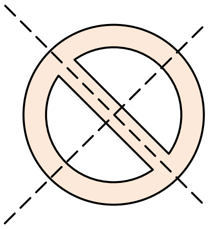


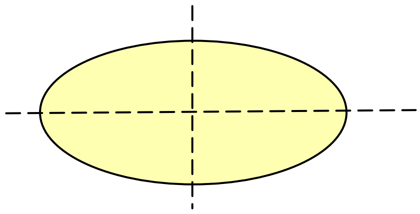


צורות שיש להן ציר סימטריה אחד או יותר:









העיגול הוא בעל אין סוף צירי סימטריה. כל ישר העובר דרך מרכז המעגל (העיגול) הוא ציר הסימטריה שלו: