

פעולת החילוק

ד"ר מריטה ברבש, המכללה האקדמית לחינוך אחוה

לפעולת החילוק יש מספר משמעויות:

1. פעולת החילוק כפעולה ההפוכה לכפל
2. החילוק כחיסור חוזר
3. חילוק כחלוקה לחלקים שווים
4. חילוק כדרך לחישוב יחס בין שני גדלים (כולל יחידות מדידה)
5. חילוק כדרך לחיפוש גורמים שלמים של מספר (פירוק לגורמים)

חשוב לזכור כי בהקשרים מסוימים תכונות פעולת החילוק מבוססות על המשמעויות השונות שלה. להלן הסבר מפורט ודוגמאות לשתים מהמשמעויות דלעיל. הסברים לשלוש המשמעויות הנוספות יופיעו במהדורות הבאות במדור "מונחים ומושגים".



פעולת החילוק כפעולה ההפוכה לכפל

כאשר מדובר בפעולת החילוק כפעולה ההפוכה לפעולת כפל, אנו למעשה שואלים:
"במה צריך לכפול את הגודל a על מנת שהתוצאה תהיה שווה לגודל b?"

על מנת לענות לשאלה זו, מבצעים את פעולת החילוק: $b : a = \boxed{?}$

בהקשר לפעולת הכפל (אותה ניתן לראות בהקשר זה בתור "הפעולה המקורית, או הישירה"),
b הוא המכפלה, a הוא אחד הגורמים, ואנו מחפשים את הגורם השני.

פעולת הכפל (בדומה לפעולת החיבור) היא פעולה סימטרית: ניתן להחליף את סדר שני הגורמים מבלי שהתוצאה (המכפלה) תושפע מכך. זו למעשה משמעות חוק החילוף החל על פעולות הכפל והחיבור, וסימטריה זו מתבטאת בשמות הגדלים המשתתפים בפעולה: "גורמים", "מחוברים". לעומת זאת, בפעולת החילוק (כמו גם בפעולת החיסור) שמות הגדלים המשתתפים בפעולה מצביעים על חוסר הסימטריה: מחולק הוא המספר אותו מחלקים (בפעולת הכפל ה"מקורית" הוא היה בתפקיד המכפלה); מחלק הוא המספר שבו מחלקים; מנה היא תוצאת הפעולה.

משמעות זו של חילוק כפעולה ההפוכה לפעולת הכפל מובילה גם להרחבת מושג המספר, ממספרים שלמים למספרים רציונליים:
על מנת לענות לשאלה "איזה מספר יש להציב במקום סימן השאלה בפעולת הכפל הבאה?":

$$3 \times \boxed{?} = 12$$

נקבל 4, כיוון ש- $3 \times 4 = 12$.

לעומת זאת, בתשובה לשאלה

$$3 \times \boxed{?} = 10$$

לא קיים מספר שלם, ועל מנת לתת תשובה לשאלה זו, יש "לגייס" מספרים רציונליים. התשובה שתקבל: $\frac{10}{3}$ - משמעותה היא בדיוק "מספר שאם כופלים אותו ב-3, מקבלים 10".

חילוק כחיסור חוזר

פעולת חילוק כחיסור חוזר מקורה למעשה בפעולת כפל כחיבור חוזר. ואולם גם כאן, בדומה למקרה הקודם, כאשר מדובר בפעולה ההפוכה, מתווספות משמעויות חדשות. נראה זאת על מספר דוגמאות:

$$א. \quad \underbrace{7 + 7 + \dots + 7}_{5 \text{ מחוברים}} = 7 \times 5, \quad \text{הדוגמה הפשוטה ביותר היא למשל,}$$

$$35 - 7 - 7 - 7 - 7 - 7 = 0 \quad \text{אותה ניתן לרשום גם כך:}$$

או: "כמה פעמים חיסרנו 7 מ-35 עד שהגענו ל-0"? מספר הפעמים שחיסרנו את 7 הוא גם מספר הפעמים שחיברנו אותו בפעולת הכפל המקורית על מנת לקבל 35, והוא המנה המבוקשת בחילוק של 35 ב-7. משמעות זו של פעולת החילוק מקושרת למה שידוע כ"**חילוק להכלה**": הוא עוזר לענות לשאלה "כמה פעמים גודל מסוים מוכל בגודל אחר", וכאן המילה "פעמים" היא במקומה, כיוון שהתשובה מתקבלת כ**מספר שלם**.

ב. אם נבצע באותה הדרך את פעולת החילוק 38:7, לא נגיע ל-0 אלא ל-3:

$$38 - 7 - 7 - 7 - 7 - 7 = 3 \quad \text{או} \quad 38 : 7 = 5(3)$$

אפשר להקביל פעולת חילוק זו לביטוי הבא:

$$3 + 7 \times 5 = 38 \quad \text{או} \quad 3 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 38$$

ביטוי זה מסביר מדוע חיסור חוזר של 7 לא מגיע ל-0: הרי לא התחלנו מ-0 בפעולה המקורית. בתשובה זו ($38 : 7 = 5(3)$) לפעולת החילוק יש חלק נוסף והוא **השארית**: כיוון שלא הגענו ל-0 בחיסור החוזר, אלא ביצענו את פעולת החיסור כל עוד אפשרי היה הדבר, נשאר גודל חיובי הקטן מהמחלק (המתסר), והוא נקרא **שארית**.

נתבונן בשני תרגילי חילוק הבאים:

$$38 : 7 = 5(3) \quad 38 : 7 = 5\frac{3}{7}$$

ניתן לענות על השאלה מהי המנה של התרגיל 38:7 בשני אופנים: אם מבקשים תשובה במספרים טבעיים, אז המנה היא 5 והשארית היא 3; אם מבקשים תשובה במספרים רציונליים, אז המנה

היא $5\frac{3}{7}$.

נדגים הבדל זה במשמעויות של פעולת החילוק ובצורות המתאימות למשמעויות אלה של התוצאה באמצעות שתי בעיות :

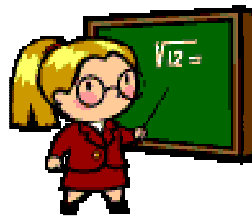
א. משפחת ישראלי מכינה 7 אריזות שי. כדי לקשט את האריזות נקנה סרט מיוחד שאורכו 38 מטר. בכמה מטרים של סרט ישתמשו לכל אריזה, אם על כל אריזה משתמשים באותה כמות של סרט ולא נשאר סרט אחרי שסיימו לארוז את האריזות?

כדי לענות על השאלה נשתמש בחילוק בצורה $38 : 7 = 5\frac{3}{7}$, כאשר משמעות המנה היא

שלכל אריזה השתמשו ב- $5\frac{3}{7}$ מטר סרט.

ב. משפחת ישראלי מכינה אריזות שי. כדי לקשט את האריזות הם מכינים קישוטים מיוחדים מסרט, כאשר להכנתו של כל קישוט משתמשים ב-7 מטר של הסרט. כמה קישוטים כאלו תוכל להכין משפחת ישראלי מסרט שאורכו 38 מטר?

כדי לענות על שאלה זו נשתמש בחילוק בצורה $38 : 7 = 5(3)$, כאשר משמעות המנה היא שמשפחת ישראלי תוכל להכין 5 קישוטים וישארו לה 3 מטר של הסרט.



יש להקנות חשיבות מיוחדת לסוגיית האפס בפעולת החילוק, ומשמעויות שונות של חילוק מאפשרות להתייחס לסוגיה בדרכים שונות.



נזכיר כי לכל מספר a , $a \times 0 = 0 \times a = 0$. בהסתכלות על חילוק כפעולה הפוכה לכפל, נוכל להסיק כי $a = 0 : a$ לכל מספר a שאיננו שווה ל-0. יש להיזהר ולזכור ש-0 יכול להיות מחולק אך לא יכול להיות מחלק!

כדי להבין זאת, נתייחס בנפרד לשני מקרים:

- נתבונן איזו תוצאה נוכל לצפות לקבל אם מחלקים ב-0 מספר השונה מ-0, למשל,

$$3 : 0 = \boxed{?}$$

על מנת למצוא מספר כזה, עלינו לבצע את פעולת הכפל – הפעולה ההפוכה, כלומר, לשאול

$$0 \times \boxed{?} = 3$$

ואנו יודעים שאין מספר כזה. על כן, כל פעולה מהסוג $a : 0$ כאשר $a \neq 0$ היא פעולה חסרת

משמעות, ומכאן גם המושג המוכר "ביטוי חסר משמעות" למנה מהסוג $\frac{a}{0}$ ($a \neq 0$).

- נתבונן עתה איזו תוצאה נצפה לקבל, אם נחלק 0 ב-0? שוב, נפנה למשמעות החילוק כפעולה

$$0 : 0 = \boxed{?} \Leftrightarrow 0 \times \boxed{?} = 0$$

כאן במקום סימן השאלה ניתן למעשה להציע כל מספר, שכן כל מספר כתוצאה מכפל ב-0

שווה ל-0. כלומר, התשובה יכולה להיות 4, או $\frac{1}{7}$ או כל מספר אחר. אבל במתמטיקה

לא מקבלים פעולות שאין להן תשובה אחת. במקרים כאלה אומרים שפעולות אלה אינן

מוגדרות, מכיוון שלא ניתן לדעת באופן חד משמעי מהי תוצאת הפעולה. על כן, הפעולה

$$\frac{0}{0} \text{ או } 0:0 \text{ אינה מוגדרת.}$$

נסכם: $\frac{0}{0}$ או $0:0$ - הוא ביטוי שאיננו מוגדר.

הביטוי $\frac{a}{0}$ ($a \neq 0$) - הוא ביטוי חסר משמעות.

