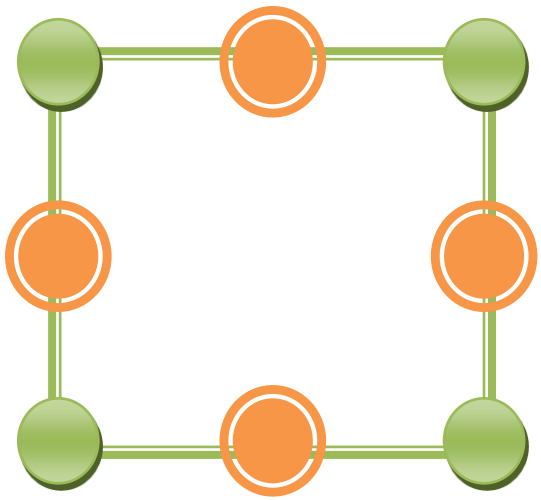
فعالية بحث

حاصل الجمع 13

سجّلوا الأعداد من 1 حتى 8 في ألدوائر بحيث يكون حاصل جمع الأعداد على كل ضلع 13.

- ما هو حاصل جمع الأعداد التي في الدوائر البرتقالية؟
- اعرضوا طريقة حلكم.



من الممكن أن نحل بطريقة منهجية نجد كل ثلاثيات الأعداد التي حاصل جمعها 13 ويمكن أن نتوجه للمسألة بمستوى التعميم.
فيما يلي عرض لكل من الطريقتين.

المصدر: من محاضرة: د. مارك أفلابوام في المؤتمر:

1. طريقة عرض كل الإمكانيات:

نكتب كل ثلاثيات الأعداد من 1-8 والتي حاصل جمعها 13.
لو كانت هناك 4 إمكانيات فقط، عندها نسجلها على أضلاع الشكل بالطريقة الملائمة.

من المهم التشديد على منهجية عرض الثلاثيات. نبدأ بأصغر عدد: 1. العدد الثاني في الثلاثية لا يمكن أن يكون 2 أو 3 لأن الأعداد التي تكمل لحاصل الجمع 13 تكون 9 أو 10 وهذه ليست في مجال الأعداد المعطى. لذلك الثلاثية الأولى هي: 1,4,8 (نبحث عن عددين حاصل جمعهما 12) ومن ثم 1,5,7. بعد أن وجدنا كل الإمكانيات مع العدد 1 ننتقل للعدد 2 وهكذا.
الثلاثيات التي حصلنا عليها:

1	4	8
1	5	7
2	3	8
2	4	7
2	5	6
3	6	4

حصلنا على 6 ثلاثيات أعداد 1-8 حاصل جمع كل منها 13 وتوجد عندنا 4 أضلاع فقط. علينا أن نفحص أي 4 ثلاثيات ملائمة لحل المسألة.
المرحلة التالية في بحث المسألة هي دراسة خواص الأعداد في الإطار: هناك وظائف مختلفة للأعداد التي نسجلها في الدوائر المختلفة. فالأعداد التي في رؤوس الشكل تستعمل مرتين (مشتركة لثلاثيتين) فهي مشتركة لضلعين والأعداد التي في الدوائر الوسطى (وسط الضلع) تشترك في ثلاثية واحدة فقط.
بناءً على ما ذكر أعلاه نطرح السؤال: ما هو عدد الثلاثيات التي يظهر فيها كل من الأعداد 1-8؟
نعرض ذلك في الجدول:

العدد	1	2	3	4	5	6	7	8
عدد الثلاثيات التي يظهر فيها	2	3	2	3	2	2	2	2

المصدر: من محاضرة: د. مارك أفلابوام في المؤتمر:

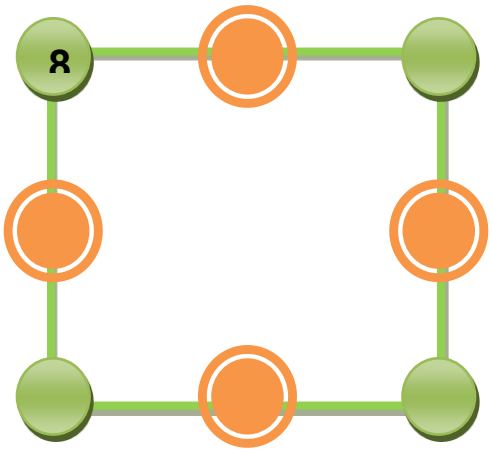
فعالية بحث

ماذا كان هدفنا من الجدول أعلاه؟ لو كان أحد الأعداد يظهر في ثلاثية واحدة فقط لسجلناه في دائرة في الوسط. لو كان هناك 4 أعداد فقط ظهرت مرتين في الثلاثيات كنا سنسجلها في الرؤوس. لكن وللأسف لا يوجد وضع كهذا، وهذا ما يحدث عادة في مسائل لبحث: ففي هذا النوع من المسائل لا توجد استراتيجية معروفة من البداية. سنبني استراتيجية من خلال تقدمنا في الحل واكتشاف خواص مختلفة لمركبات المسألة.

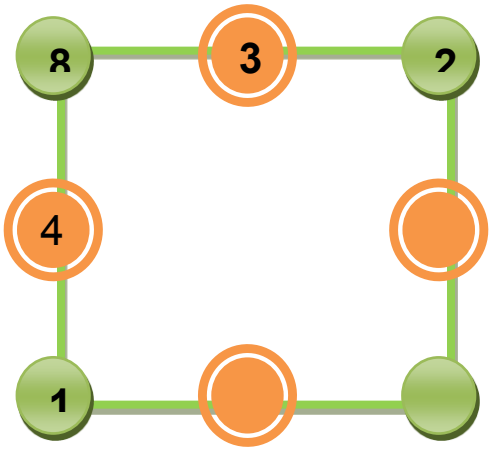
نستعين الآن بإستراتيجية " إذا – ينتج" وبالطريقة التي تعتمد استعمال الأعداد القصوى: 1 أو 8.

نختار العدد 8 والذي يظهر في الثلاثيتين: 1,4,8 وَ 2,3,8 .

نفرض أن العدد 8 يظهر في أحد الرؤوس:



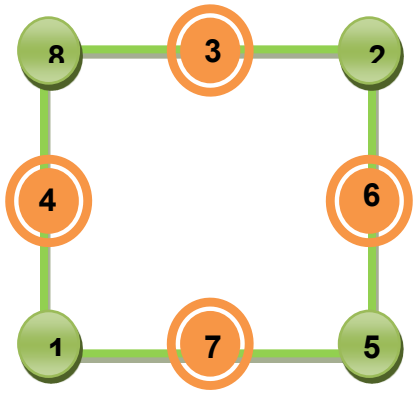
ينتج من ذلك أن الثلاثيتين 1,4,8 وَ 2,3,8 ستظهران على ضلعي الشكل بهذه الطريقة:



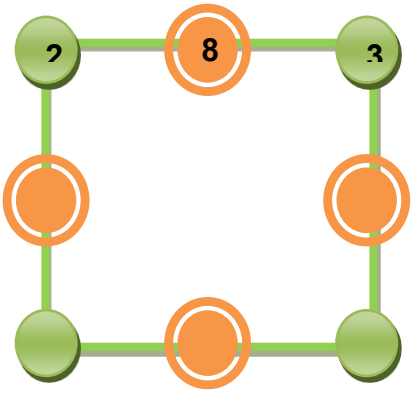
المصدر: من محاضرة: د. مارك أفلابوام في المؤتمر:

فعالية بحث

ترتيب الأعداد 2,3 و 1,4 تم بحيث أن الأعداد الأصغر تكون في الرؤوس (لأن الأعداد المتبقية هي 5 و 6 و 7 وحاصل جمع كل اثنين منهما "قريب جدًا" من 13: 11 , 12 , 13). بقي أن نجرب تسجيل الأعداد. الحل الأول هو:



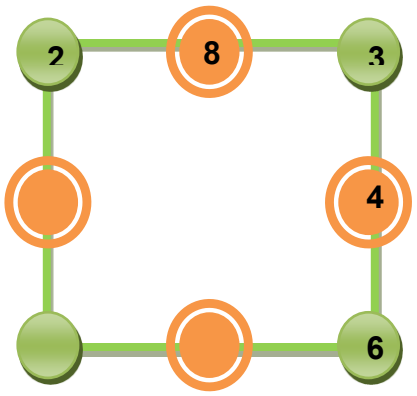
الآن نجرب إمكانية أخرى: نسجّل العدد 8 في الوسط (يمكن تسجيله في وسط أي ضلع من الأضلاع الأخرى) نستعمل زوج الأعداد الذي يكمل الـ 8 إلى 13. نفرض أننا سجلنا 2 و 3 نحصل على:



فعالية بحث

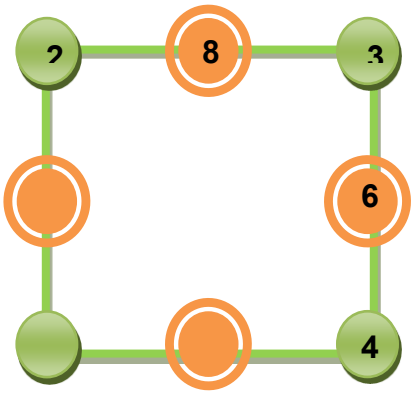
العدد 3 يلزمنا استعمال الثلاثية الأخرى التي يظهر فيها: 3,4,6

هناك إمكانيتان: **إمكانية "أ":**



بما أن العدد 6 يظهر في ثلاثية أخرى: 6,2,5 فالإمكانية "أ" غير ممكنة لأن العدد 2 قد تم تسجيله.

الإمكانية "ب":

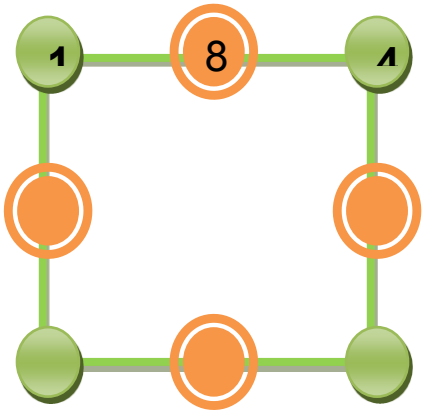


العدد 4 يظهر في الثلاثيتين: 2,4,7 و 1,4,8 والإمكانيتان غير ممكنتين لأن العددين 2 وَ 8 قد تم تسجيلهما

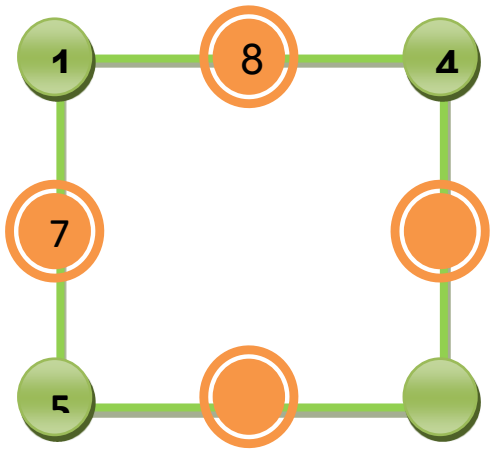
من هنا نستنتج أن الثلاثية 2,8,3 غير مناسبة لحل المسألة.

حتى الآن تعرف التلاميذ على إستراتيجيتين: طريقة الدحض وطريقة فحص الإمكانيات.

بقي علينا أن نفحص الثلاثية: 1,8,4

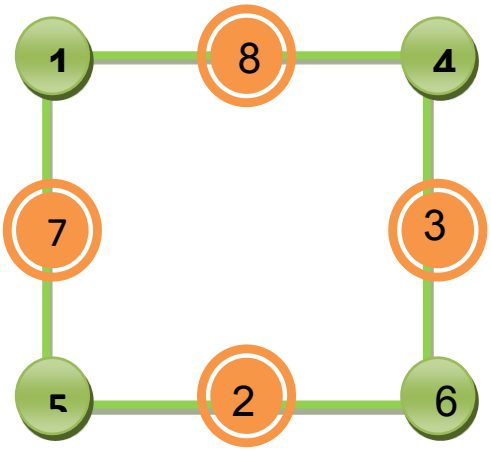


الثلاثية الأخرى التي تحوي العدد 1 هي: 1,5,7. العدد 7 لا يمكن تسجيله في الرأس لأنه يظهر في ثلاثية أخرى تحوي العدد 4 والذي تم تسجيله. من هنا نحصل على:



فعالية بحث

بقي علينا أن نسجّل الأعداد 2 وَ 6 وَ 3 : 2 وَ 6 على الضلع الثالث (كما مبين في الشكل) والعدد 3 تحت الـ 4:



بما أن فحص الإمكانيات كان تامًا وشاملاً نستنتج أن هناك حلين ممكنين فقط (بدون الحلول المتماثلة للحلول التي وجدت).

توجه آخر للحل "عن بعد":

بهذه الطريقة نصل إلى الحل من خلال تحليل مركبات ومبنى ألمسألة، بدون التطرق للأعداد في الدوائر.

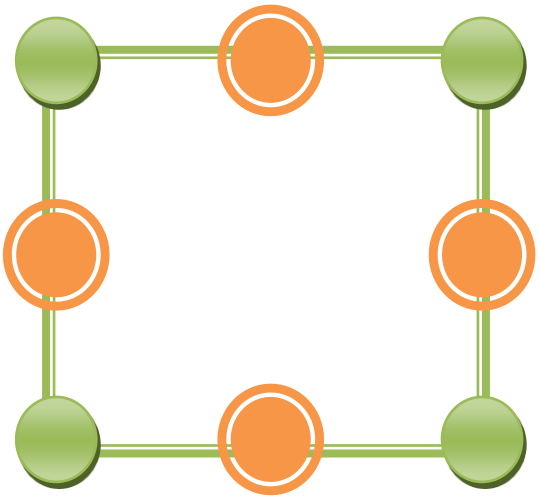
يمكن التوجه للمسألة كما يلي:

حاصل جمع الأعداد على كل ضلع هو 13، لذلك حاصل الجمع على كل الأضلاع هو 13x4=52

حاصل جمع الأعداد من 1 – 8 هو 36:

1+2+3+4+5+6+7+8=36

الفرق بين 52 وَ 36 هو 16



بما أن الأعداد في رؤوس الشكل (الدوائر الخضراء) تستعمل مرتين في حاصل الجمع (الدائرة الخضراء تقع على ضلعين مختلفين) ومعلوم أن الفرق 16، وهذا الفرق كان نتيجة تكرار الجمع مرتين لقسم من الأعداد (الأعداد التي في الرؤوس). من هنا نستنتج أن حاصل جمع الأعداد التي في الرؤوس هو 16.

بما أن حاصل جمع كل الأعداد من 1 حتى 8 هو 36، وحاصل جمع الأعداد التي في الرؤوس هو 16 نستنتج أن حاصل جمع الأعداد التي في الوسط (في الدوائر البرتقالية) هو 20. الآن يمكن أن نكمل تسجيل الأعداد وإيجاد الحلول المختلفة.

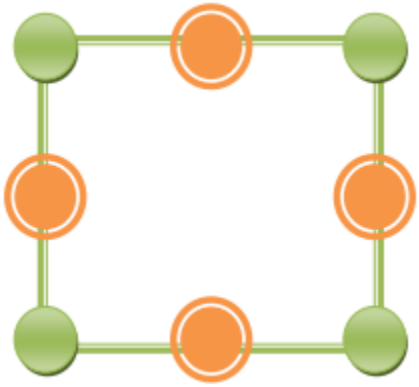
هذا النوع من التوجه لحل مسألة معينة يحتاج إلى جرأة، حيث نبحث عن تعميم للحل.

من سلبيات هذا التوجه أننا لا نعرف إذا كان تسجيل الأعداد سيفي بشروط التعميم الذي توصلنا إليه.

المصدر: من محاضرة: د. مارك أفلابوام في المؤتمر:

فعالية بحث

استعمال التفكير المقولب:



معروف بان حاصل جمع الاعداد على كل ضلع هو 13.

بناء على ذلك، حاصل جمع الاعداد على الاضلاع المقابلة (على سبيل المثال: الضلع العلوي والضلع السفلي) هو 26.

نذكر بان حاصل جمع جميع الاعداد من 1 الى 8 هو 36.

اذا قمنا بطرح العددين 36 و 26 نحصل على 10 (10 = 26 - 36) وهو حاصل جمع الاعداد الموجودة في الدوائر البرتقالية المتقابلة.

اذا قمنا باستعمال نفس الاستراتيجية للضلعين المتقابلين الاخرين سنحصل على أن حاصل جمع الاعداد الموجودة في الدوائر البرتقالية المتقابلة هو ايضاً 10.

من هنا ينتج بان حاصل جمع الاعداد في كل الدوائر البرتقالية هو **20**.

تعميم

نكتب ثمانية اعداد في الدوائر $a_1, a_2, a_3, .., a_8$. نفرض بان حاصل جمع الاعداد على كل ضلع هو M، جد حاصل جمع الاعداد التي في الدوائر البرتقالية.

الحل:

- نرمز الى حاصل جمع الاعداد الثمانية ب- $a_1 + a_2 + a_3 + .. + a_8 = A$
- من هنا، حاصل جمع الاعداد في كل دائرتين برتقاليتين متقابلتين هو $A - 2M$
- لذلك، حاصل جمع الاعداد في الدوائر البرتقالية هو $2(A - 2M) = 2A - 4M$

المصدر: من محاضرة: د. مارك أفلابوام في المؤتمر: