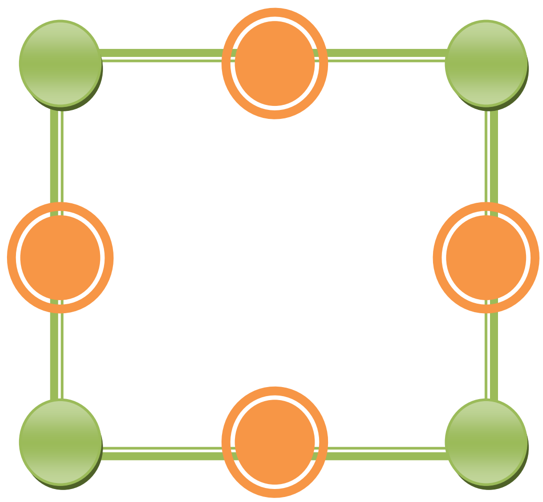
מעבר לקובץ לתלמיד

פעילות חקר

הסכום 13

שבצו את המספרים 1 עד 8 בעיגולים כך שסכום המספרים בכל צלע יהיה 13.

- מהו סכום המספרים בעיגולים הכתומים?
- הציגו את דרך הפתרון שלכם.



אפשר לפתור בדרך שיטתית בה נמצא את כל השלשות שיניבו סכום 13 ואפשר להסתכל על הבעיה ברמה של הכללה.

נציג את שתי הגישות.

מעובד מתוך:
הרצאה של ד"ר מארק אפלבאום בכנס:
FIRST JERUSALEM CONFERENCE FOR RESEARCH ON MATHEMATICS EDUCATION. 18-19.2.2013

מעבר לקובץ לתלמיד

1. דרך הצגת כל האפשרויות:

נכתוב את כל השלשות האפשריות מהמספרים 1 עד 8 שסכומם 13.
הרי אם תהיינה רק ארבע שלשות כאלה, נצטרך רק להתאים אותן לצלעות.

חשוב להדגיש את השיטתיות באיסוף הנתונים. נתחיל מהמספר הקטן ביותר האפשרי: 1. המספר השני בשלישייה לא יכול להיות לא 2 ולא 3 כי המספרים 9 ו – 10 אשר משלימים לסכום 13 אינם נמצאים לרשותנו. מכאן השלישייה הראשונה הינה 1,4,8. חוזרים שוב למספר 1 ובודקים זוגות נוספים שסכומם 12. נקבל את השלישייה הבאה: 1,5,7. עוברים למספר 2 רק לאחר שנמצא את כל האפשרויות הכוללות את המספר 1. בשיטה זו נבטיח כיסוי של כל האפשרויות מצד אחד וחוסר חזרות על אותן שלישיות מצד האחר.

השלשות שישארו לנו הן:

1	4	8
1	5	7
2	3	8
2	4	7
2	5	6
3	6	4

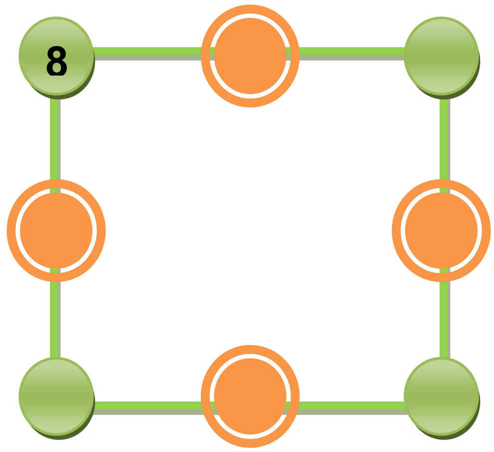
מצאנו שיש 6 שלישיות של המספרים (1-8) שסכומן 13 כאשר יש לנו 4 צלעות. זאת אומרת שהמערכת אינה יציבה. עלינו לבדוק אילו 4 שלישיות מתוך 6 הקיימות עלינו לבחור.
שלב נוסף בחקירת השאלה הינו למידת התכונות של המסגרת: הרי על המספרים שישובצו בעיגולים לשחק תפקידים שונים. על המספרים שבפינות להשתתף בשתי שלישיות (לאורך ולרוחב) ולמספרים שישובצו בעיגולים באמצעי הצלעות להשתתף בשלישייה אחת בלבד.
מכאן נשאלת השאלה: מהו המספר השלישיות בהן מופיע כל אחד מהמספרים מ – 1 ועד 8?
נקבל את הטבלה הבאה:

מספר	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
מספר השלישיות בהן מופיע	2	3	2	3	2	2	2	**2**

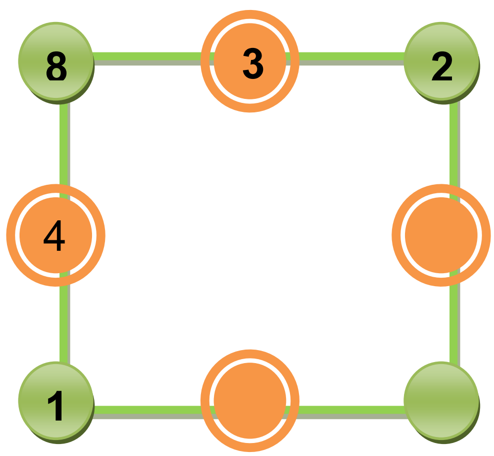
מה קיווינו לגלות בטבלה זו? אם אחד מהמספרים היה מופיע רק בשלישיה אחת היה ברור שנשבץ אותו באמצע של אחת הצלעות. ואם היו רק ארבעה מספרים שהשתתפו בשתי שלישיות הם היו תופסים את הפינות. לצערינו לא קיבלנו את המידע הנחוץ וזה מלווה לעיתים קרובות את עבודתו של החוקר ומאפיין בעיות חקר וגילוי: הרי בבעיות כאלה אין אסטרטגיה שידועה מהתחלה. עלינו לבנות אותה תוך כדי התקדמות בפתרון וגילוי תכונות שונות של מרכיבי הבעיה.

מעובד מתוך:
הרצאה של ד"ר מארק אפלבאום בכנס:
FIRST JERUSALEM CONFERENCE FOR RESEARCH ON MATHEMATICS EDUCATION. 18-19.2.2013

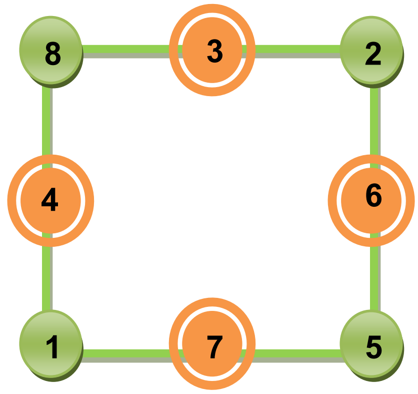
כעת ניעזר באסטרטגיה "אם – אז" ובגישה שבמרכזה שימוש באיבר הקיצוני. אצלנו זה 1 או 8.
נבחר את המספר 8 שמופיע בשתי שלישיות הבאות: 1,4,8 ו – 2,3,8.
נניח שהמספר 8 מופיע באחת הפינות:



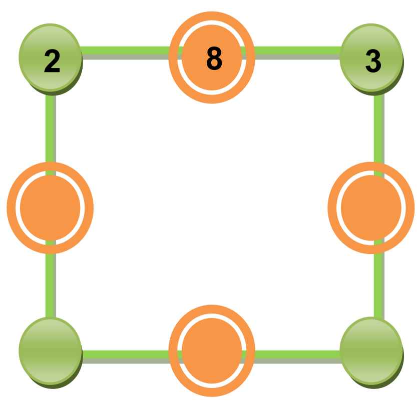
זה מחייב את השלישיות הבאות להופיע לצידו בשתי צלעות הריבוע שלנו:



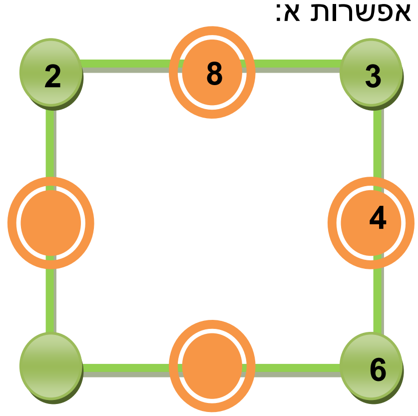
הסדר של המספרים ו2 – 3 ו 4 ו – 1 נבחר כך שבפינות יישארו המספרים הקטנים ביותר (כי המספרים הנותרים הם 5,6 ו – 7 וסכום של כל שניים מהם קרוב מאוד ל – 13: 11,12 – 13).
כעת נשאר רק לנסות לשבץ את המספרים. נקבל פתרון ראשון:



כעת נשבץ את המספר 8 באמצע של השורה העליונה (או באמצע של כל שורה או טור). נצרך ל – 8 אחד משני זוגות המספרים האפשריים. נניח את 2 ו – 3. נקבל:

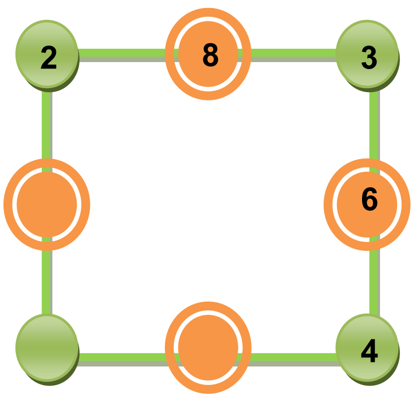


המספר 3 מחייב את השלישייה השנייה בה הוא משתתף: 3,4,6.
כאן יכולות להיות שתי אפשרויות. אפשרות א:

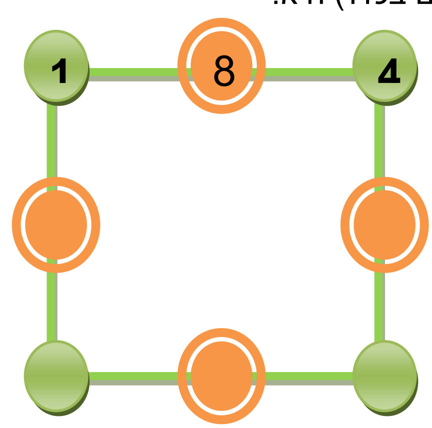


מעבר לקובץ לתלמיד

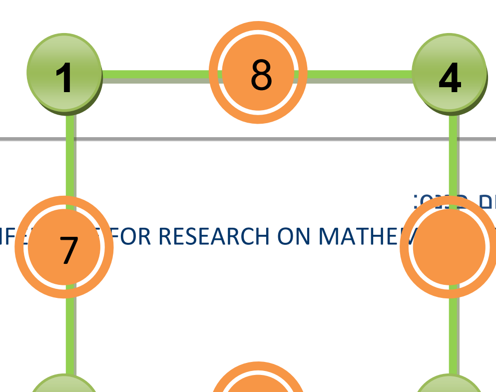
כיוון שהמספר 6 מופיע בשלישייה נוספת: 6,2,5, אפשרות א' היא בלתי אפשרית כיוון שהמספר 2 כבר תפוס. אפשרות ב:



המספר 4 משתתף בשתי שלישיות נוספות 2,4,7 ו – 1,4,8. אף אחת מהן לא אפשרית כיוון שהמספרים 2 ו – 8 כבר תפוסים.
זה מביא אותנו למסקנה שהשלישייה 2,8,3 לא יכולה להיות משולבת בפתרון. בשלב זה התלמידים הכירו שילוב של שתי אסטרטגיות: דרך השלילה ובריכת האפשרויות.
מכאן השלישייה ההכרחית (אם בכלל) היא:

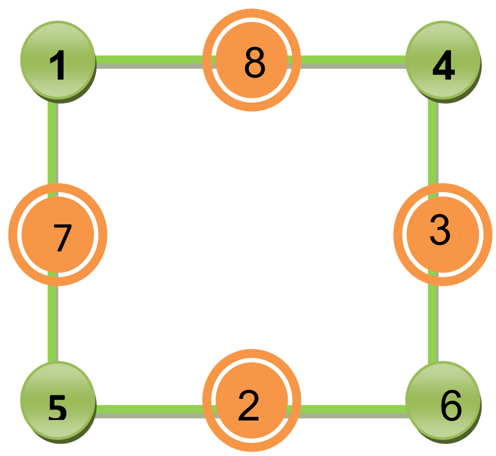


השלישייה האחרת שכוללת את מספר 1 היא: 1,5,7. מספר 7 לא יכול להיות בפינה כי הוא שותף בשלישייה אחרת עם מספר 4 שתפוס. מכאן נקבל:



מעבר לקובץ לתלמיד

נשאר לשבץ רק שלושה מספרים 2 ו – 6 בשורה השלישית ו – 3 מתחת ל – 4.
והתשובה הסופית היא:



כיוון שלאורך כל הדרך הבחירות שלנו היו חד משמעיות אפשר להסיק שיש רק שני פתרונות אפשריים (ללא פתרונות סימטריים לאלה שנמצאו).

מעובד מתוך:
הרצאה של ד"ר מארק אפלבאום בכנס:
FIRST JERUSALEM CONFERENCE FOR RESEARCH ON MATHEMATICS EDUCATION. 18-19.2.2013

מעבר לקובץ לתלמיד

דרך הסתכלות "מרחוק":

כאן המיוחד הוא להגיע לפתרון אלגנטי תוך ניתוח מבנה הבעיה, מבלי הצורך לשלב את המספרים בעיגולים.

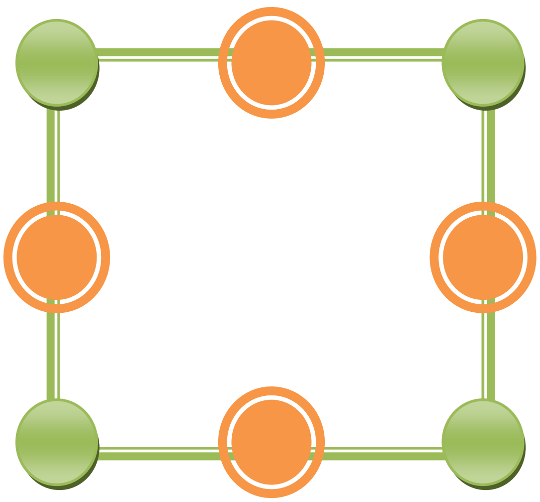
אפשר להסתכל על הבעיה כך:

אם הסכום בכל צלע הוא 13, הסכום בארבע צלעות יהיה 13x4=52

אם נחבר את המספרים 1 עד 8 נקבל את הסכום 36.

1+2+3+4+5+6+7+8=36

ההפרש בין 52 ל 36 שווה ל - 16.



מאחר והמספרים בקודקודי הריבוע (בעיגולים הירוקים) יחזרו פעמיים בסכום (המספר המופיע בכל אחד מהקודקודים של הריבוע יחזור בסיכום פעמיים, פעם בצלע אחת ופעם בצלע השניה היוצאת מאותו קודקוד) אנחנו יודעים שההפרש 16 נוצר מעצם החזרה פעם שניה על חלק מהמספרים, אלה המופיעים בקודקודים. מכאן, שסכום המספרים בקודקודים הוא 16.

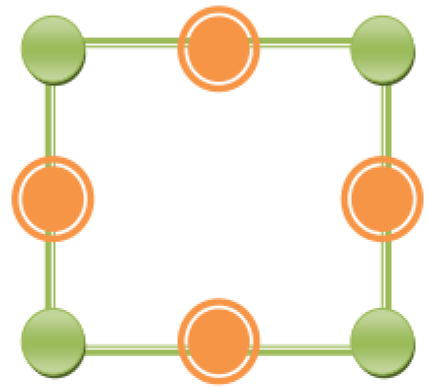
מאחר והסכום של כל המספרים 1 עד 8 הוא 36, והסכום של אלה שבקודקודים הוא 16, הרי שסכום המספרים באמצעי הצלעות (בעיגולים הכתומים) הוא 20.

יכולנו לעבוד בשיטתיות על כל השלשות האפשריות ליצירת סכום 13, אבל כאן הפתרון היה כללי יותר.

הפתרון השני דורש אומץ, לא ללכת בדרך השיטתית והבטוחה ולהסתכל בגדול ובהכללה על הפתרון.

החיסרון של הפתרון האלגנטי (דרך הסתכלות מרחוק) בכך שאין אנחנו יודעים האם השיבוץ של המספרים המקיימים את התנאי קיים בכלל. אנו ממליצים לאחר מציאת התשובה (הסכום של המספרים בעיגולים הכתומים שווה ל – 20) להשלים את השיבוץ ולבדוק פתרונות שונים.

שימוש בחשיבה תבניתית:



ידוע כי סכום המספרים לאורך כל אחת מהצלעות שווה ל – 13 .

מכאן נובע שסכום המספרים לאורך שתי צלעות נגדיות (לדוגמה, הצלע העליונה והצלע התחתונה) שווה ל - 26. נזכור כי סכום כל המספרים המשובצים מ – 1 עד 8 שווה ל – 36 .

כעת אם נחסיר 36-26=10 נקבל את הסכום של שני המספרים הממוקמים בעיגולים כתומים ומנוגדים.

נשתמש באותה איסטרטגיה ביחס לשתי צלעות נגדיות אחרות ונגלה שסכום המספרים הרשומים בשני עיגולים אחרים שווה גם הוא ל – 10.

מכאן שסכום המספרים שבכל העיגולים הכתומים הינו **20.**

הכללה:

שמונה מספרים $a_1, a_2, a_3,.., a_8$ משובצים בעיגולים. בהנחה שסכום המספרים לאורך כל צלע שווה ל- M, מצא את סכום המספרים הרשומים בעיגולים הכתומים.

פתרון:

- נסמן את סכום של כל שמונת המספרים $a_1 + a_2 + a_3 + .. + a_8 = A$
- מכאן שסכום המספרים שבשני העיגולים הכתומים והמנוגדים שווה ל- $A - 2M$
- ואם כך, נקבל שסכום המספרים שרשומים בעיגולים הכתומים שווה ל - $2(A - 2M) = 2A - 4M$