



מחשבים בראש

מדריך למורה

אחד הכישורים הנדרשים מתלמידים על-פי תכנית הלימודים במתמטיקה היא התבונה החשבונית. כדי לפתח אצל התלמידים תובנה חשבונית מציגה התכנית מספר תחומים שמומלץ לעסוק בהם – ביניהם חישובים בעל-פה.

במסגרת החישובים בעל-פה ניתן גם לעסוק בגודל הכמותי של מספרים, בחיפוש ובבחירת אסטרטגיות יעילות לחישובים, באומדן ובשינון עובדות.

חישובים בעל-פה, הנקראים גם "אלגוריתמים מנטליים" יכולים לכלול:

- תרגילים המושמעים בקול-רם, לא נכתבים ונשמרים בזיכרון בשעת החישוב בעל-פה.
- תרגילים המוצגים לעיני התלמידים, אולם כל החישוב נעשה בעל-פה.
- תרגילים שבשעת הפתרון שלהם נעשה רישום של נקודות אחיזה, אולם כל החישוב נעשה בעל-פה.

כל הדרכים האלו שונות מאלגוריתמים שבהם כל החישוב נעשה בכתב.

מומלץ לשלב חישובים בעל-פה בשלבים שונים בלמידה.

שילוב חישובים בעל-פה בכיתה יכול להוות חימום בתחילת שיעור או גורם מעורר ומגוון במהלך השיעור. ניתן לשלב חישובים בעל-פה בנושא שנלמד באותו זמן או כחזרה על נושאים שנלמדו בעבר. חישובים בעל-פה יכולים להיות גם גורם מזמן לשיחות שהרחבתן תזמן למידה של תכנים חדשים. מומלץ שלכל צוות מורים יהיה מאגר של רעיונות לחישובים בעל-פה, אותם ניתן לשלב בהוראה בכיתות השונות.

ביחידה זו 10 פעילויות המיועדות לחישובים בעל-פה ולשיחות שילוו את החישובים. בכל דף מוצג רעיון אחר של חישוב בעל-פה. ניתן לבחור את אחת הפעילויות ולהציגה לכיתה באמצעות הקרנה של שקף. משך כל פעילות לא יארך יותר מ-10 דקות.

פעילויות מסוג זה מומלץ לארגן על שקפים בקלסר בחדר המורים ומידי פעם ל"שלוף" שקף אחר. לאחר השימוש השקף יוחזר לשימושם של מורים אחרים בכיתות אחרות.

לאחר התרגול המהיר בעל-פה אפשר גם לתלות את הפעילות בפינת החשבון ולכתוב לידה אחת מהשאלות הדורשות זמן חקירה ארוך יותר. חקירת התשובה לשאלה יכולה להיות פעילות העמקה נוספת לכל תלמידי הכיתה או לתלמידים המתקדמים.

פעילות מס' 1

נושא: חיבור מספרים שלמים עד 150

נושאים מקושרים: זוגיות של סכומים

מתאים לת"ל: מכיתה ב' ומעלה

הצעות לשאלות נוספות שאפשר להציג להרחבת הדיון:

1. **בסעיף א:** אילו מספרים, מהמספרים הנתונים, ניתן להציג כסכום של שני מספרים זוגיים, שני מספרים אי-זוגיים, מספר זוגי ומספר אי-זוגי, שני מספרים עוקבים. (מה ההבדל בין שתי האפשרויות האחרונות). מהי האסטרטגיה למציאת שני המספרים העוקבים המתאימים?
2. **בסעיף ב:** אילו מספרים, מהמספרים הנתונים, ניתן להציג כסכום של שלושה מספרים זוגיים, שלושה מספרים אי-זוגיים, שני מספרים זוגיים ומספר אי-זוגי, שני מספרים אי-זוגיים ואחד זוגי, שלושה מספרים עוקבים. מהי האסטרטגיה למציאת שלשת המספרים העוקבים המתאימים?
3. **בסעיף א:** כמה זוגות של מספרים שלמים שונים יש בכל אחד מהמקרים? מהי האסטרטגיה למציאת התשובה?

פעילות מס' 2

נושא: פירוק לגורמים

נושאים מקושרים: סימני התחלקות, גורמים ראשוניים, זוגיות של מכפלות

מתאים לת"ל: מכיתה ד' ומעלה

הצעות לשאלות נוספות שאפשר להציג להרחבת הדיון:

1. **בסעיף א:** לשער מראש איזה מספר אפשר יהיה להציג במספר הגדול ביותר של אפשרויות? האם ככל שהמספר יהיה יותר גדול כך יהיו עברו יותר אפשרויות לפתרון? לדוגמה: 121? 131? – דיון בדרכים לבדיקה (כפולות, סימני התחלקות, מספרים ראשוניים) הערה: שינוי סדר הגורמים איננו אפשרות אחרת לפתרון.
2. **בסעיף ב:** אילו מספרים, מהמספרים הנתונים, ניתן להציג כמכפלה של יותר משלושה גורמים? מהי האסטרטגיה למציאתם.
3. **בסעיף א:** להסביר מראש באילו מקרים יתכנו שני גורמים זוגיים? אי-זוגיים? אחד זוגי והשני אי-זוגי?
4. **בסעיף ב:** לשער מראש באילו מקרים יתכנו שלושה גורמים זוגיים? אי-זוגיים? אחד זוגי והשני אי-זוגי? צירופים שונים של מספרים זוגיים ואי-זוגיים?

פעילות מס' 3

נושא: כפל בעשרות ובמאות שלמות

נושאים מקושרים: פירוק לגורמים

מתאים לת"ל: מכיתה ג' ומעלה

הערות והצעות לשאלות נוספות שאפשר להציג להרחבת הדין:

באילו אסטרטגיות אפשר לפעול כדי לדעת שבתרגילים שונים מתקבלת אותה תוצאה ?

דוגמאות:

- א. את התרגיל 4×500 אפשר גם להציג כ- $2 \times 2 \times 500$ (פרוק 4 לגורמים). בעזרת חוק הקיבוץ ניתן לראות ש: $2 \times 2 \times 500 = 2 \times 1000$.
- ב. את השוויון בין שני התרגילים: $2 \times 1,000$ ו- 4×500 , אפשר לראות גם על-ידי הבנה שאם כופלים את אחד הגורמים פי 2 ומחלקים את הגורם השני פי-2 התוצאה נשמרת.
- ג. את התרגיל 40×50 אפשר גם להציג כ- $4 \times 10 \times 5 \times 10$. בעזרת חוק החילוף והקיבוץ ניתן להציגו כ- $4 \times 5 \times 10 \times 10$ וכ- $4 \times 5 \times 100 = 4 \times 500$.

פעילות מס' 4

נושא: חישוב ערך האחוז מכמות

נושאים מקושרים: שברים פשוטים ועשרוניים

מתאים לת"ל: מכיתה ו' ומעלה

הערות והצעות לשאלות נוספות שאפשר להציג להרחבת הדין:

אסטרטגית החישוב שתיבחר על-ידי התלמיד היא שתקבע את רמת הקושי של מציאת הפתרון. לכן, תלמידים שונים יבחרו תרגילים שונים כ"קלים ביותר". חשוב לשוחח בכיתה על האסטרטגיות השונות לפתרון ולדון ברעיון של התאמת האסטרטגיה הנוחה לחישוב בהתאם למספרים שבתרגיל. למשל, 99% מ-75 מאד נוח לחשב על ידי חישוב הערך של 1% מ-75 וחיסורו מ-75. אם היה צריך לחשב, לדוגמה, 78% מ-75 – אסטרטגיה זו לא הייתה יעילה.

פעילות מס' 5

נושא: חיבור מספרים עשרוניים

מתאים לת"ל: מכיתה ה' ומעלה

הערות והצעות לשאלות נוספות שאפשר להציג להרחבת הדין:

- פעילות זו מיועדת ל"הצפת" אסטרטגיה נוחה לחישוב במקרים שבהם החלק השברי שבמספרים מתחבר לשלם או לעשירית. חשוב לדון במקרים המיוחדים שבהם נוח לחשב בדרך זו ולבקש מהתלמידים להציג תרגילים שלא נוח בהם לחשב בדרך זו.
- אפשר לדון עם התלמידים בחוקי החשבון שמשמשים בהם באסטרטגיה לחישוב. החוקים שמשמשים בהם הם חילוף וקיבוץ:
לדוגמה:

$$14.07 + 2.03 = 14 + \frac{7}{100} + 2 + \frac{3}{100} = 14 + 2 + \frac{7}{100} + \frac{3}{100} = 16 + \frac{10}{100} = 16 + \frac{1}{10} = 16.1$$

פעילות מס' 6

נושא: חיבור מספרים שלמים בתחום הרבבה, חלוקה ב- 10, 100 ו-1,000.

נושאים מקושרים: אומדן סכומים, סימני התחלקות ב- 10, 100 ו-1,000.

מתאים לת"ל: מכיתה ג' ומעלה

הערות והצעות לשאלות נוספות שאפשר להציג להרחבת הדיון:

1. מומלץ לדון באסטרטגיה שבה נקטו התלמידים כדי למצוא את התרגיל שהתוצאה שלו היא הגדולה ביותר. חשוב לעודד אסטרטגיות המבוססות על אומדן והערכה ולא על חישוב כל התוצאות. אחת האסטרטגיות היא השוואה ל-1,000 וניפוי כל התרגילים שהתוצאה שלהם קטנה מ-1,000. ההשוואה ל-1,000 מתבקשת שהרי תוצאת התרגיל הראשון היא 1,000.
2. אפשר להעלות את הקשר שבין שלושת השאלות שבסוף הפעילות, ולברר עם הילדים את השאלות הבאות:

- האם כל מספר שמתחלק ב-10 יתחלק גם ב-100 וב-1,000?
- האם כל מספר שמתחלק ב-1,000 יתחלק גם ב-10 וב-100?
- האם כל מספר שיתחלק ב-100 יתחלק גם ב-1,000 וב-10?

בכל אחד מהמקרים חשוב להסביר, להציג דוגמאות שמקיימות את הכלל או שמפריכות אותו. חשוב להבהיר את העיקרון שדוגמה אחת שאיננה מקיימת כלל מונעת את השימוש במילה "כל מספר" - בדרך זו ניתן להבהיר את המשמעות הלוגית של "כל מספר".

פעילות מס' 7

נושא: עובדות חילוק בתחום ה-100, מחלקים של מספר

נושאים מקושרים: כפל, סימני התחלקות, מספרים ראשוניים ופריקים.

מתאים לת"ל: מכיתה ג' ומעלה

הערות והצעות לשאלות נוספות שאפשר להציג להרחבת הדיון:

1. עבור איזה מספר, בכל מלבן, אפשר למצוא את מספר האפשרויות הגדול ביותר של תרגילי חילוק? עבור איזה מספר, בכל הדף, אפשר למצוא את מספר האפשרויות הגדול ביותר של תרגילי חילוק? מצאו מספר גדול ממנו שיש עבורו יותר אפשרויות של תרגילי חילוק. האם הגדלת המספר המחולק תבטיח תמיד שיהיו לו מספר גדול יותר של תרגילי חילוק?
2. מה הקשרים בין תרגילי החילוק שמצאתם לתרגיל: $____ = ____ : 64$ לתרגילי החילוק שמצאתם לתרגיל: $____ = ____ : 32$?
3. מה המספר הקטן ביותר של תרגילים שאפשר למצוא לכל מחולק בדף? (2) האם לכל מחולק שנבחר יהיו לפחות שני תרגילים? נמקו. איזה מספרים צריכים להיות במחולקים כדי שיהיו להם רק שני תרגילי חילוק?
4. לתלמידים מתקדמים אפשר להציע לבדוק לאילו מהמספרים שבדף אפשר לכתוב מספר אי-זוגי של תרגילי חילוק, לאחר מכן לשער ולמצוא עוד מספרים כאלו ולהכליל. (כל המספרים הריבועיים-יש להם מספר אי-זוגי של מחלקים).

5. בכל מלבן המחולקים הם מספרים עוקבים- האם צורת כתיבה זו עוזרת למצוא את המחלקים של המספרים? הסבירו מתי וכיצד.

חשוב שהתלמידים ישימו לב שאם המספר הראשון במלבן מתחלק ב-3 (לדוגמה), הרי ששני המספרים שאחריו לא יתחלקו ב-3, ואילו המספר השלישי יתחלק שוב ב-3. הבחנה זו מחזקת את הראייה הסדרתית של כפולות ומסייעת להבין ולהיעזר בקשר שבין הכפולות לחישובים ולהבנת תכונות של המספרים.

פעילות מס' 8

נושא: פירוק מספר לגורמים, שוויון מכפלות.

נושאים מקושרים: יחס, גדול/קטן פי

מתאים לת"ל: מכיתה ג' ומעלה

הערות והצעות לשאלות נוספות שאפשר להציג להרחבת הדיון:

1. מומלץ לשוחח עם התלמידים על האסטרטגיה למציאת המספרים החסרים, ללא חישוב תוצאת המכפלה. האסטרטגיה תתבסס על הגדלה והקטנה פי אותו גורם של גורמי המכפלה. חשוב לברר בדיון אם לתלמידים ברור שהכמויות נשמרות לאחר ההגדלה וההקטנה של הגורמים ולכן מתקיים השוויון.

2. בכל מלבן מתקבלים שלושה תרגילי כפל שהתוצאה שלהם שווה. לדוגמה:

$$6 \times 4 = 3 \times 8$$

$$6 \times 4 = 12 \times 2$$

כדי לתרגל את הרעיון של הגדלה והקטנה פי אותו גורם, אפשר לבקש מהתלמידים להציג עוד תרגיל כפל שהתוצאה שלהם 24 והם נבנו מהגדלה והקטנה פי אותו גורם של הגורמים. בכיתות גבוהות

אפשר גם להשתמש בשברים כגורמים. למשל: $16 \times \frac{1}{2}$ (הקטנה והגדלה פי 4 של 6×4).

3. לבקש מהתלמידים לפתור בעל-פה את התרגילים, תוך כדי בחירת התרגיל מכל מקבץ שהוא הנוח ביותר לחישוב התוצאה בעל-פה. חשוב להעלות את השאלה מדוע התרגיל שנבחר הוא הקל ביותר לחישוב ולהציג דוגמאות נוספות בהן התלמידים יגדילו ויקטינו פי אותו גורם גורמי מכפלה, על-מנת לחשב את התוצאה בצורה מהירה ויעילה.

4. לדון בעקרון הטרגיטיביביות. לדוגמה, בתרגילים:

$$12 \times 5 = 6 \times 10$$

$$12 \times 5 = 4 \times 15$$

האם משני התרגילים אפשר להסיק ש: $15 \times 4 = 10 \times 6$ ללא חישוב התוצאות?

הערה: כדי להדגיש את רעיון הטרגיטיביביות רצוי לבחור בתרגילים שגורם ההגדלה וההקטנה של המספרים איננו מספר שלם ולכן השוויון איננו בולט לעין.

פעילות מס' 9

נושא: חיבור מספרים תלת-ספרתיים

נושאים מקושרים: השלמה לעשרות ולמאות, מיצוי אפשרויות להצגת מספרים כסכומים של מספרים שלמים.

מתאים לת"ל: מכיתה ב' ומעלה

הערות והצעות לשאלות נוספות שאפשר להציג להרחבת הדין:

1. מומלץ לשוחח עם התלמידים על האסטרטגיות בהן מצאו את זוגות המספרים. חשוב להבדיל בין אסטרטגיות שבהן מחשבים את סכום שני המספרים לבין אסטרטגיות שבהן רק מזהים סכום העשרות ייתן מאה שלמה. בכל מקרה יש חשיבות רבה לדין על האסטרטגיה לחישוב מדויק של הסכום של שני המספרים.
2. גם במשימה השנייה, בה התלמידים מתבקשים להוסיף בכל טור שני מספרים חשוב מאד לשוחח על האסטרטגיות לפתרון ועל אפשרויות שונות לפתרון.
3. במשימה הראשונה אפשר לשנות את האילוצים. לדוגמה:
 - למצוא שלושה מספרים שסכומם מאות שלמות
 - שני מספרים שסכומם מאות שלמות אבל קטן מ-500.
4. בהוספת שני מספרים לכל טור אפשר לשאול באיזה טור ההוספה היא הקלה ביותר ומדוע?
5. באילו טורים אפשר להוסיף שני מספרים תלת ספרתיים, להגיע לתוצאה שהיא מאות שלמות אבל קטנה מ-1,000. לתאר בעל-פה או בכתב את האסטרטגיה שבה מצאו את הפתרון.

פעילות מס' 10

נושא: השוואת שברים פשוטים

מתאים לת"ל: מכיתה ד' ומעלה

הערות והצעות לשאלות נוספות שאפשר להציג להרחבת הדין:

1. מומלץ לבקש מהתלמידים לנמק בקול רם איך הם יודעים שהשברים קטנים מהשבר שבחרו ראשון.
2. אפשר להוסיף אילוצים כגון:
 - מצאו שלושה שברים קטנים מהשבר הראשון שבחרתם, שהמכנה שלהם שונה ממכנה השבר הראשון שבחרתם.
 - מצאו שלושה שברים שכל אחד מהם קטן מהשבר שמצאתם לפניו.