# אוגדן

## איתור וניתוח קשיים  -  השבר הפשוט

הנושא העוסק בשבר הפשוט מתבסס על הקורס: "**איתור וטיפול בקשיים בנושא השברים**".

הקורס בהובלת **תמי גירון וד"ר ראיסה גוברמן** בוצע במסגרת פרויקט של מרכז המורים הארצי למתמטיקה בחינוך היסודי בשנת תשע"ג והחומרים של הקורס עלו לאתר מרכז המורים. (קישור)

**האוגדן הינו גרסה חלקית בלבד של החומרים הרבים הנמצאים בצורה מורחבת בקורס.**

## מהו שבר וקשיים בהבנת מהות השבר

חלק זה עוסק בהבנת הקשר שבין שבר לפעולות החילוק והכפל.

***דף שאלות***

***פתרו את השאלות הבאות- כל שאלה במספר דרכים. לכל אחת מהשאלות ציינו באילו מארבעת פעולות החשבון השתמשתם ובאיזו כיתה אתם חושבים שתלמידים יכולים לענות על השאלה.***

| | |
|---|---|
| **1.** 240 מטיילים נסעו ב- 8 אוטובוסים. מספר המטיילים בכל האוטובוסים היה שווה.<br><br>כמה מטיילים היו בכל אוטובוס? | **2.** בכל כיתה לומדים 30 תלמידים.<br><br>כמה תלמידים לומדים ב- 5 כיתות? |
| **3.** במסיבת יום הולדת התחלקו ביניהם שווה בשווה שמונה ילדים בפיצה אחת.<br><br>איזה חלק מהפיצה קיבל כל ילד?<br><br>לצורך משחק ביקשו מהם גם לחלק שווה בשווה שקית שהיו בה 240 דיסקיות.<br><br>כמה דיסקיות יקבל כל ילד? | **4.** להכנת קישוטים לסוכה קנו סרט צבעוני באורך 2 מטר ו- 40 ס"מ. את הסרט גזרו ל- 8 חלקים שווים. הבנות קיבלו חמישה חלקים כאלו והבנים את השאר.<br><br>כמה מטר סרט הבנות קיבלו?<br><br>כמה מטר סרט הבנים קיבלו? |
| **5.** להכנת אוהלים במחנה הקיץ קנו חבל ארוך. את החבל גזרו ל- 8 חלקים שווים. הבנות קיבלו חמישה חלקים כאלו והבנים את השאר.<br><br>איזה חלק מהחבל הבנות קיבלו?<br><br>איזה חלק מהחבל הבנים קיבלו? | **6.** לאדם היה מגרש מלבני שמידותיו 30 מ' ו- 80 מ'. הוא תכנן לבנות עליו 8 בתים, ולכן הוא חילק את המגרש ל- 8 חלקות שוות שטח. את הבנייה על $\frac{3}{8}$ מהמגרש הוא מסר לקבלן ואת השאר בנה בעצמו לילדיו. |

| | |
|---|---|
| | על איזה שטח בנה בתים לילדיו? |
| **7.** שליח אסף מכתבים ממשרדים. בכל משרד הוא אסף 30 מכתבים.<br><br>כמה מכתבים היו אצל השליח לאחר שביקר ב- 5 משרדים? | **8.** 240 אבטיחים שנקטפו נארזו ב- 8 מכלים. בכל אחד מהמכלים אותו מספר אבטיחים.<br><br>על המשאית העמיסו חמישה מכלים.<br><br>כמה אבטיחים העמיסו על המשאית? |
| **9.** כמה הם $\frac{5}{8}$ מ- 240 ? | **10.** ייצגו את השבר $\frac{5}{8}$ בדרכים שונות. |

מטרת העבודה בדף היא התנסות בסוגים שונים של שאלות שנדרשות בהן פעולות חילוק (או חלוקה) כפל, או חילוק וכפל ביחד. השאלות השונות מזמנות התבוננות במרחב גדול של סיטואציות ושל ייצוגים מוחשיים וסימבוליים (מספרים) שכולן מבוססות על אותן פעולות החשבון - חילוק ולאחר מכן כפל.

להלן התייחסות לכל אחת מהשאלות המוצגות בדף:

***שאלה 1***

**1.** 240 מטיילים נסעו ב- 8 אוטובוסים.
מספר המטיילים בכל האוטובוסים היה שווה.

כמה מטיילים היו בכל אוטובוס?

שאלת חילוק לחלקים " קלאסית" שמחלקים בה כמות לקבוצות שוות. בשאלות מסוג זה נפגשים החל מכיתה ג' . שאלה ספציפית זו מתאימה לכיתה גבוהה יותר בגלל המחולק הגדול ( 240).

אסטרטגיות צפויות:

- בחילוק 24 ל- 8 מקבלים 3. את התוצאה כופלים ב- 10, או מבינים שמדובר בחלוקת 24 עשרות ולכן גם התוצאה המתקבלת היא 3 עשרות, או באופן טכני "מוסיפים" 0 לתוצאה ומקבלים- 30.

**חילוק לחלקים ולהכלה**: אפשר להבהיר את ההבדל על-ידי הצגת אסטרטגיה לפתרון נוספת שהיא בדיקה כמה פעמים 8 " נכנס" ב- 240 . אפשר לעשות זאת על-ידי חיסור חוזר:

…… 8 – 8 – 240 וכ"ה חיסור 8 שלושים פעמים. הדרך לא נוחה.

לעומת זאת השאלה הבאה: 240 מטיילים הסתדרו בקבוצות. בכל קבוצה היו 8 מטייילים. בכמה קבוצות הסתדרו המטיילים? היא שאלת חילוק להכלה.

חיסור חוזר היא אסטרטגיה נוחה הנשענת על הבנת החילוק להכלה כשהמחלק הוא מספר גדול. לכן, סביר להניח שאם השאלה הייתה: 240 מטיילים הסתדרו בקבוצות. בכל קבוצה היו 30 מטייילים. בכמה קבוצות הסתדרו המטיילים? היה מאד נוח לבדוק כמה פעמים 30 " מוכל" ב- 240.

בהקשר של חילוק לחלקים וחילוק להכלה כדאי גם להסביר את הקשר לכפל ולכינויים:

בתרגיל: 240 = 8 x 30 , כאשר מדובר על 30 מטיילים ו- 8 קבוצות, המכפלה 240 מציינת את מספר המטיילים הכולל. המספר 8 מציין כמה פעמים הכמות הקבועה חוזרת על עצמה ולכן הוא "אופרטור"- הגורם המפעיל. מקרה זה האופרטור מפעיל את פעולת הכפל.

תרגיל החילוק: 30= 8 : 240 הוא למעשה חילוק מספר המטיילים לקבוצות ולכן התוצאה המתקבלת היא 30 מטיילים בכל קבוצה. לעומת זאת בתרגיל החילוק: 8 = 30 :240 מחלקים את מספר המטיילים הכולל במספר המטיילים בקבוצה. התוצאה המתקבלת היא מספר ללא כינוי שמציין את האופרטור- את הגורם המפעיל את פעולת הכפל ומציין כמה קבוצות היו.

***שאלה 2***

**2.** בכל כיתה לומדים 30 תלמידים.

כמה תלמידים לומדים ב- 5 כיתות?

שאלת כפל " קלאסית". בשאלות מסוג זה נפגשים החל מכיתה ב' . ( בתחום מספרים זה החל מכיתה ג')

אסטרטגיות צפויות:

- כפל 3 ב- 5. את התוצאה כופלים ב- 10, או מבינים שמדובר בכפל 3 עשרות ולכן גם התוצאה המתקבלת היא 15 עשרות, או באופן טכני "מוסיפים" 0 לתוצאה ומקבלים- 150.
- חיבור חוזר של 30 חמש פעמים.

***שאלה 3***

**3.** במסיבת יום הולדת התחלקו ביניהם שווה בשווה שמונה ילדים בפיצה אחת.

איזה חלק מהפיצה קיבל כל ילד?

לצורך משחק ביקשו מהם גם לחלק שווה בשווה שקית שהיו בה 240 דיסקיות.

כמה דיסקיות יקבל כל ילד?

שאלה הבודקת משמעות של שבר יחידה כחלק משלם וכחלק מכמות.

אסטרטגיות צפויות לחלק א':

- הסתמכות על ידע או הבנה שמחלקים שלם ל- 8 חלקים שווים מקבלים שמינית.
- שימוש באמצעי המחשה כמו גזרות ובדיקה כמה פעמים חלק אחד מכסה את השלם. (מבוסס על חילוק להכלה). למשל:

http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_274_g_2_t_1.html?open=activities&from=grade_g_2.html

נדרשת הבנה ששמינית הוא מספר המייצג חלוקה של שלם (1) לחלקים שווי שטח.

אסטרטגיות צפויות לחלק ב':

- חילוק 240 ל- 8 בדרכים שונות. או, פתרון המשוואה: 240 = ___ x 8 .

בשני חלקי השאלה נדרשת הבנה שאת השלם יש לחלק לשמונה חלקים שווים. פעם אחת השלם הוא כמות - ובמקרה זה השאלה מאד דומה לשאלת חילוק במספרים שלמים, ופעם שניה השלם הוא יחידה רציפה שמיוצגת על-ידי סרטוט של שלם שאיננו כמותי ועל-ידי המספר 1.

***שאלה 4***

**4.** להכנת קישוטים לסוכה קנו סרט צבעוני באורך 2 מטר ו- 40 ס"מ. את הסרט גזרו ל- 8 חלקים שווים. הבנות קיבלו חמישה חלקים כאלו והבנים את השאר.

כמה מטר סרט הבנות קיבלו?

כמה מטר סרט הבנים קיבלו?

שאלה שצריך למצוא בה חלק מכמות, אבל היא איננה מוגשת ב" שפה" של שברים.

אסטרטגיות צפויות:

- המרת אורך הסרט לסנטימטרים.
- חלוקת אורך הסרט (במטרים או בסנטימטרים) ל- 8 וכפל ב- 5 כדי למצוא את אורך הסרט שקיבלו הבנות. לאחר מכן אפשר לכפול ב- 3 כדי למצוא את אורך הסרט שקיבלו הבנים, או, לחילופין לחסר את אורך הסרט שקיבלו הבנות מאורך הסרט הכולל. כל אחת משתי דרכים אלו היא אסטרטגיה אחרת.
- אפשר להיעזר בסרטוט הסרט כקו. על הקו מסמנים שמונה חלקים שווים וכותבים על כל חלק מה אורכו. לאחר מכן, מחברים (או כופלים) 5 פעמים כדי למצוא את אורך הסרט שהבנות קיבלו. לאחר מכן, מחברים או כופלים את אורך הסרט שהבנים קיבלו. או, לחילופין מחשבים את ההפרש בין האורך של כל הסרט ובין אורך הסרט שהבנות קיבלו.

הערה: בשתי האסטרטגיות שהוצגו לעיל אפשר לחשב תחילה את אורך הסרט שהבנים קיבלו.

- מנתוני השאלה אפשר לראות שהבנות קיבלו $\frac{5}{8}$ מאורך הסרט. לכן, הבנים קיבלו $\frac{3}{8}$ מאורך הסרט. אפשר לחשב כמה הם $\frac{5}{8}$ מהאורך הכולל או כמה הם $\frac{3}{8}$ מהאורך הכולל על-ידי ביצוע תרגיל כפל של שלם בשבר : $\frac{5}{8}\times 240$ , או של שלם במספר עשרוני: $\frac{5}{8}\times 2.40$ או במספר מעורב : $\frac{5}{8}\times 2\frac{4}{10}$ שניתן גם להפוך לכפל שבר בשבר: $\frac{5}{8}\times 2\frac{4}{10}=\frac{5}{8}\times\frac{24}{10}$ . ( אפשר גם להשאר

בייצוג של מאיות). קיימת גם אפשרות של הפיכת השבר הפשוט לשבר עשרוני : $\frac{5}{8} = 0.625$

ולכפול את $0.625$ ב- 240 ס"מ או ב- 2.40 מטר.

המשך פתרון השאלה יהיה על-ידי חישוב אורך הסרט המתאים לחלק השני, או על-ידי חיסור האורך שחושב מהאורך הכללי של הסרט.

חשוב לציין שאסטרטגיה זו פחות טבעית לשאלה, כי ניתן לפתור את השאלה גם מבלי להכיר את המושגים הקשורים בשברים.

### *שאלה 5*

**5.** להכנת אוהלים במחנה הקיץ קנו חבל ארוך. את החבל גזרו ל- 8 חלקים שווים. הבנות קיבלו חמישה חלקים כאלו והבנים את השאר.

איזה חלק מהחבל הבנות קיבלו?

איזה חלק מהחבל הבנים קיבלו?

שאלה שצריך לזהות בה את החלק מהשלם. השאלה דומה מאד לשאלה 4, אלא שהפעם מבקשים רק לזהות את החלק (את השבר) ולא את הכמות (האורך) המתאימה לכל חלק.

אסטרטגיות צפויות:

- הבנה המבוססת על כך שהשלם חולק ל- 8 חלקים שווים ולכן אפשר לבטא את השלם כ- $\frac{8}{8}$. אם השתמשו בחמישה חלקים מתוך שמונה הרי שהשתמשו ב- $\frac{5}{8}$ מהשלם והחלק שהבנים השתמשו בו הוא המשלים לשלם - $\frac{3}{8}$.
- סרטוט סכמטי של החבל כקו ישר. חלוקת הקו לשמונה חלקים שווים וסימון חמישה חלקים ממנו. בהמשך זיהוי החלקים המסומנים- $\frac{5}{8}$ ו- $\frac{3}{8}$.

***שאלה 6***

**6.** לאדם היה מגרש מלבני שמידותיו 30 מ' ו- 80 מ'. הוא תכנן לבנות עליו 8 בתים, ולכן הוא חילק את המגרש ל- 8 חלקות שוות שטח. את הבנייה על $\frac{3}{8}$ מהחלקה הוא מסר לקבלן ואת השאר בנה בעצמו לילדיו.

על איזה שטח בנה בתים לילדיו?

שאלה שהשלם בה איננו נתון ויש לחשב בה את החלק מהשלם. השלם מיוצג על ידי שטח של מלבן שנתונות הצלעות שלו.

אסטרטגיות צפויות:

- חישוב שטח המלבן : 2400 = 80 x 30 מ"ר. לאחר מכן חישוב שטח החלק על-ידי כפל שבר בשלם. (החישוב יכול להיות מלווה בסרטוט סכמטי של המלבן וציון אורך הצלעות בסרטוט)

  אפשר לחשב את השטח שהוא מסר לקבלן: $\frac{3}{8}\times 2400$ ולאחר מכן לחסר את התוצאה שהתקבלה מ- 2400 כדי למצוא את השטח שהאדם בנה עליו לילדיו.

  אפשר גם מראש לחשב על איזה חלק מהשטח הכולל הוא בנה לילדיו על-ידי השלמה לשלם ולחשב את השטח על-ידי תרגיל הכפל: $\frac{5}{8}\times 2400$.

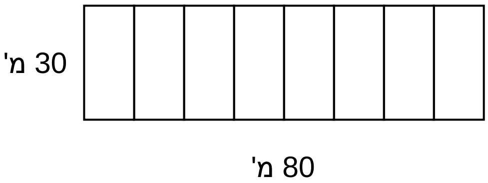
  את תרגילי הכפל אפשר לחשב בדרכים שונות. למשל,

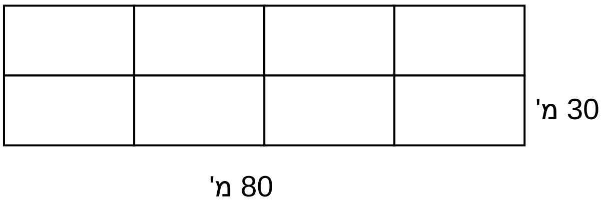
  ✓ בשלב הראשון: 300 = 8 : 2400 ובשלב השני: 1500 = 5 x 300

  ✓ בתרגיל: $= \frac{5}{8}\times 2400$ חילוק 2400 ו- 8 בגורם זוגי קטן או שווה ל- 8 ולאחר מכן כפל ב- 5 של המונה. צמצום בגורם זוגי קטן מ- 8 יצריך חילוק במכנה לאחר כפל המונים.

  ✓ אפשר גם להפוך את התרגיל לתרגיל כפל שבר בשבר: $\frac{3}{8}\times 2400=\frac{3}{8}\times\frac{2400}{1}$ בשלב זה אפשר לצמצם את 2400 ב- 8 או ב- 2 או ב- 4 ולהמשיך על-ידי כפל המונים, כפל המכנים ולבסוף חילוק התוצאה המתקבלת במונה בתוצאה שתתקבל במכנה.

- סרטוט סכמטי של המלבן וחלוקה שלו ל- 8 חלקים שווים. את החלוקה ניתן לבצע בדרכים שונות. למשל:




בכל אחד מהסרטוטים אפשר לחשב את השטח של כל שמינית. בסרטוט שמימין ניתן לראות ללא חישוב שמתקבלים שמונה מלבנים במידות 10 מ' ו- 30 מ'. כלומר השטח של כל שמינית המגרש הוא 300 מ"ר. בסרטוט שמשמאל יבוטא השטח של כל שמינית המגרש : 20 x 15 . אפשר לחלק את המלבן גם לשמונה חלקות שוות שטח כשכל חלקה איננה מלבנית וגם כשכל חלקה בצורה אחרת. בכל המקרים השטח של שמינית המגרש יהיה 300 מ"ר. לכן, יש לכפול את ה- 300 מ"ר ב- 3 כדי לחשב את השטח הכללי שניתן לקבלן וב- 5 כדי למצוא את השטח הכללי שהאדם בנה לבניו. שטח זה, כמובן, אפשר גם לחשב כהפרש בין כל שטח המגרש (המלבן) לשטח שהאדם נתן לקבלן.

### ***שאלה 7***

**7.** שליח אסף מכתבים ממשרדים. בכל משרד הוא אסף 30 מכתבים.

כמה מכתבים היו אצל השליח לאחר שביקר ב- 5 משרדים?

שאלת כפל שהסיטואציה שלה מדגישה את החיבור החוזר של הקבוצות השוות. בשאלות מסוג זה נפגשים התלמידים כבר בכיתה ב'.

אסטרטגיות צפויות:

- כפל 30 ב- 5 .
- חיבור חוזר של 30 חמש פעמים.

***שאלה 8***

**8.** 240 אבטיחים שנקטפו נארזו ב- 8 מכלים. בכל אחד מהמכלים אותו מספר אבטיחים.

על המשאית העמיסו חמישה מכלים.

כמה אבטיחים העמיסו על המשאית?

שאלה דו-שלבית של חילוק ולאחר מכן כפל. בשאלות מסוג זה התלמידים נפגשים החל מכיתה ד'.

אסטרטגיות צפויות:

- חילוק 240 ב- 8 וכפל התוצאה ב- 5.

***שאלות 9 ו- 10***

| | |
|---|---|
| **9.** כמה הם $\frac{5}{8}$ מ- 240 ? | **10.** ייצגו את השבר $\frac{5}{8}$ בדרכים שונות. |

שתי שאלות אלו מהוות מעין סיכום לשאלות הקודמות. לכן, האסטרטגיות שעלו בשאלות הקודמות חוזרות על עצמן.

בדיון על האסטרטגיות השונות חשוב להבחין בכל אסטרטגיה בפעולה שמבטאת את החילוק לחלקים שווים ובכפל (או חיבור חוזר) שמבטאים את "איסוף" החלקים לשלם כיחידה רציפה, או לכמות אחת.

בכל השאלות טופלו הנושאים של:

- משמעות השבר כפעולת חילוק ולאחריה כפל. בחלק מהשאלות טופלה רק המשמעות של חילוק או רק המשמעות של כפל.
- ייצוג החלק והשלם באמצעות ייצוגים שונים שמסייעים להבנת המשמעות של השבר ושל השאלה – כמה הוא חלק מתוך כמות נתונה. הייצוגים השונים מבהירים שמציאת חלק מכמות או חלק משלם המיוצג במודל של שטח או של אורך הם למעשה אותה פעולה של חילוק ולאחר מכן כפל.

**צפייה בסרטון – הרצאה בנושא השברים של פרופ' רון אהרוני.** (מההתחלה עד דקה 14.45)

רעיונות מרכזיים שעלו בקטע מההרצאה:

1. הגדרת השבר - ההגדרה המוצגת נשענת על פעולה. למעשה כל מספר נוצר כתוצאה מפעולות על מספרים אחרים. גם המספר הטבעי בבסיסו מציין מנייה - כמה פעמים מצוי חפץ מסוים. כאשר מציינים מספר מסוים, למשל 5, עוסקים כבר ברמת הפשטה גבוהה יותר שלמעשה מציינת ש- 5 מציין כמות של 5 ללא התייחסות לתכונות האובייקטים הנמנים. (כמו למשל גודל, סוג וכ"ו). לכן, המספר 5 מייצג חמישה פילים בדיוק באותו אופן שהוא מייצג חמישה עכברים.

   השבר מוגדר בשלב הראשון כפעולת חילוק, ושבר יחידה זהה לחילוק במכנה.

   הגדרת פעולה היא הגדרה אופרטיבית ולכן היא עשויה להיות יותר קלה ויותר ברורה לתלמידים. הגדרה אחרת של השבר יכולה להיות למשל, הגדרתו כמספר רציונלי שהוא מנת חילוק של שני מספרים שלמים, כאשר המחלק שונה מ-0

   להרחבה על מספרים רציונאליים אפשר לקרוא:

http://ymath.haifa.ac.il/images/stories/part3/teachers/terms/termndcon18.pdf

2. קשר לפעולות מוכרות: השבר מוגדר כצירוף של שתי פעולות: פעולת חילוק ולאחריה פעולת כפל. במקרה של שברי יחידה מדובר על כפל ב- 1. ולכן נבחרת ההצגה שלו כחלק מכמות. תלמידים רגילים לחלק כמויות לקבוצות שוות. חילוק עבור תלמידים הוא חלוקה לחלקים שווים וציון הכמות שיש בחלק אחד. באותו אופן שאפשר לחלק כמויות לקבוצות שוות/חלקים שווים, אפשר לחלק גם שלם לחלקים שווים. כלומר, גם בשבר, כפי שעד עכשיו היה בפעולת החילוק – מחלקים לחלקים שווים ולוקחים חלק אחד, או מספר חלקים (שזה בעצם החידוש במושג).
3. בניית שברי יחידה: שבר היחידה הוא היחידה הבסיסית עליה מסתמכים בבניית שאר השברים. כאמור, שבר היחידה נבנה כתוצאה מפעולת חילוק.
4. בניית שברים שונים: כאשר מצרפים כמה שברי יחידה נוצרים השברים האחרים והשלמים. המנייה של שברי היחידה שקולה לפעולת הכפל. לכן, השבר הוא צירוף של חילוק ושל כפל, כשדבר ראשון מבצעים את החילוק ולאחר מכן את הכפל.

   השבר נבנה בהדרגה: חמישית ועוד חמישית ועוד חמישית... בדרך זו מחוזק הקשר לפעולות המנייה, החיבור והכפל.

5. <u>בניית שלמים</u>: בבניית השלמים משתמשים גם בעיקרון של הפיכות הפעולות- קודם מחלקים/ מפרקים את השלם לחלקים שווים, ולאחר מכן מצרפים /מאחדים שוב את החלקים לשלם שפורק בהתחלה.

6. <u>עקרון ההפיכות</u>: איזכור של עקרון ההפיכות של פעולות אריתמטיות שונות, כדי לחזק את הרעיון של ביצוע שתי פעולות זו אחר זו. במקרה של השבר נוצר "יצור חדש" (מספר חדש),להבדיל מהמקרה של חיבור וחיסור. בקישור הבא תוכלו למצוא הסבר לכך:

http://ymath.haifa.ac.il/images/stories/part3/teachers/terms/termndcon2.pdf

7. <u>מהלכים/עקרונות פדגוגיים</u>

- השענות על פעולות מוכרות ועל עקרונות מתמטיים מוכרים
- חזרה על פעולה כהצגת תהליך. פעולה שמפתחת יכולת הכללה ומעשירה ב"כלי עבודה מתמטיים" שישמשו גם בנושאים אחרים.
- תיעוד מילולי צמוד ומעבר בהדרגה מתיעוד מילולי מפורט לכתיבה והסמלה מתמטיים.
- שימוש בהגדרות אינטואיטיביות ואופרטיביות

**דיון מכוון באשר לדרכי עבודה עם תלמידים שיש להם קשיים.**

התייחסות לשקפים 9- 14 במצגת 1 (קישור למצגת 1).

<u>בשקף 9</u> מוצגת שגיאה טיפוסית של חיבור מונה למונה ומכנה למכנה. שגיאה זו בדרך כלל מצביעה על קושי בהבנה של מהות השבר, או בקושי ליישם את הידע על מהות השבר גם בפעולות בשברים.

יתכן שהמורים המשתלמים גם יעירו על חוסר ההיגיון שבתשובה כי הרי מחברים מספר שגדול מחצי למספר שונה מ- 0 והתוצאה המתקבלת היא חצי ($\frac{1}{2}=\frac{5}{10}$). בהקשר לכך יש להניח שתלמיד שהתקשה בפתרון התרגיל, גם איננו מבין שהפתרון שווה לחצי. מעבר לכך, בדרך כלל ביצוע אומדן של תוצאה היא פעולה ברמת תובנה גבוהה, שנעשית בדרך כלל רק על-ידי תלמידים שמבינים את האלגוריתמים.

בכל אחד מהשקפים הבאים מוצגות שלוש אפשרויות שחשוב לדון בכל אחת מהן. חשוב לשים לב שאין תשובה אחת מוחלטת ולעיתים, מתאימה יותר מתשובה אחת. הדיון ייסוב בהקשר לטעות שהוצגה בשקף 9. אולם, יתכן שבהקשר אחר בחירת התשובות תהיה אחרת. יחד עם זאת מטרת הדיון היא לכוון לדרך

עבודה עם תלמיד מתקשה שהיא מלווה בהכנה מראש של שאלות מתאימות שניתן לבחון מהן את השליטה בידע המוקדם ההכרחי לפתרון משימה, בצפי מראש של טעויות אפשריות, בהכנת אלטרנטיבות שונות לשאלות לתלמיד ובעבודה המלווה בהמחשה קונקרטית ובהכוונה להבנת הקשר שבין ייצוגים שונים של מושגים מתמטיים ושל פעולות.

<u>בשקף 10</u>

- ✓ הקראת התרגיל- ביצוע נכון של התרגיל לאחר הקראה עשוי להצביע על חוסר הכרת הייצוג המספרי של השברים. מצד שני אינו מבטיח הבנה של התלמיד במהות השבר, כי הביטויים "שלוש חמישיות" ו"שתי חמישיות" נשמעים כאיסוף של 2 + 3 של עצם מסוים שנקרא "חמישיות". השימוש בתובנה זו חשוב כדי לפתור תרגילי חיבור וחיסור של שברים, אך איננו מספיק כדי להבין את משמעות ה"חמישית".

- ✓ לבקש מהתלמיד לבנות המחשה של התרגיל - צעד זה חיוני כדי להבין את המשמעות של כל אחד מהמחוברים ואת הצירוף שלהם. במידה ומשתמשים בעזר שבו מומחש כל אחד מהשברים $\frac{2}{5}$ ו- $\frac{3}{5}$ על-ידי יחידה אחת שכתוב עליה שם השבר - לא בהכרח שהתלמיד יוכל לרכוש הבנה של משמעות כל אחד מהמחוברים ומשמעות הסכום. לעומת זאת, בעזר שבו התלמיד בונה כל אחד מהמחוברים $\frac{2}{5}$ ו- $\frac{3}{5}$ על-ידי צירוף שברי יחידה, ולאחר מכן מצרף את שני המחוברים ל- $\frac{5}{5}$, ההבנה של משמעות השבר והחיבור הרבה יותר משמעותית.

  חשוב מאד לעבוד במקרה זה עם אמצעי המחשה קונקרטיים ו/או אינטראקטיביים המאפשרים פירוק, הזזה, הנחה אחד על השני והרכבה מחדש. בסרטוט לא ניתן לבצע את הפעולות האלה ולכן סרטוט לבד איננו מתאים.

- ✓ תרגול רב- חשוב לציין שתרגול איננו דבר פסול. במקרה זה התרגול צריך להיות מלווה בעבודה עם אמצעים קונקרטיים והמללה בקול. בשלבים הראשוניים מלווה בהכוונה שמטרתה בניית הקשר שבין בניית השברים באמצעים קונקרטיים לבין הייצוג המספרי של השברים, של תרגיל החיבור ושל התוצאה המתקבלת.

<u>בשקף 11</u>

- ✓ הסבר טכני איך לבצע תרגיל- הסבר כזה בדרך כלל אינו יעיל אם הוא נשען רק על זכרון אלגוריתמי ולא על הבנה. הנחייה אלגוריתמית של חיבור מונים, עשוייה לגרור לתפיסות שגויות בהמשך, כאשר התלמיד יצטרך לחבר שברים שהמכנים שלהם שונים זה מזה.

- ✓ הדגמה כשלעצמה לא תמיד יעילה. עדיף להנחות את התלמיד (רצוי בעזרת שאלות) איך לעבוד עם ההמחשה ולבנות בעצמו את התרגיל ואת הפתרון. יחד עם זאת, חשוב לזכור שיש תלמידים שהדגמה תוביל אותם לחיקוי. לאחר מכן יתרגלו במגוון של מספרים - עד שלבסוף יכלילו את הדרך לפתרון וגם את המשמעות.

- ✓ בדיקת הידע הקודם החיוני לפתרון תרגילי שברים הכרחית. לכן, חשוב מאד שהמורה יתכנן מערך של איתור הידע והקשיים שיש לתלמיד בנושא השבר הפשוט, לפני שהוא מסביר לתלמיד איך לחבר שברים. קיימת אפשרות של בניית ההבנה של חיבור שברים בעלי אותו מכנה, תוך כדי האיתור. לכן, תהליך איתור הידע והקשיים יכול להיות משולב בהבניית משמעות השבר.

<u>בשקף 12</u>

- ✓ מבחן וציון מדרגים את התלמיד יחסית לדרישות המבחן ויחסית לתלמידים אחרים. בדרך כלל במבחן יש שאלות מסוגים שונים . אפשר להסיק ממבחן קשיים של תלמיד בנושא מסוים, רק אם המבחן כולל מספר שאלות העוסקות באותו נושא, כשכל שאלה מוצגת מזווית אחרת, ברמת חשיבה אחרת ובצורת תשאול אחרת.

בדרך כלל במושגים בסיסיים ובשאלות קצרות לא ניתן לראות דרכי עבודה של תלמיד ובודאי שאי אפשר לעצור את התלמיד בזמן העבודה ולשאול אותו שאלות לגבי דרך העבודה או החשיבה שלו.

- ✓ כבר בסעיפים הקודמים הובהר שסביר להניח שהבעיה איננה רק חיבור וחיסור. בכל מקרה רצוי לפענח את מקור התפיסות השגויות של התלמיד ולא להתמקד בשיפור היכולת לבצע פריטים מסוג מסוים. לעיתים, נדמה שעבודה ממוקדת כזו משפרת את היכולת לבצע מיומנות מסוימת. אבל, אם קיים קושי בהבנת מושגים בסיסיים הוא יצוף שוב בהתמודדות עם מיומנויות אחרות.

- ✓ מספר משימות העוסקות במשמעויות השבר, כשהן מנוסחות באופנים שונים ומוצגות בדרכים שונות עשויות לתת תמונה כללית על הבנה ועל אי-הבנה של התלמיד, במיוחד אם המורה צופה ומתשאל את התלמיד תוך כדי עבודה. חשוב לשים לב שלעיתים קרובות התלמיד מתקשה להסביר מה הוא עושה אבל הוא מבצע נכון. אין זה מצביע על חוסר הבנת המושג המתמטי. הקושי יכול להיות ביכולת ההסבר של התלמיד.

<u>בשקף 13</u>

- ✓ שאלות מסוגים מוכרים- לעיתים קרובות, כדי שלא ליצור תסכול, אנו נוטים לתת לתלמידים (ובמיוחד למתקשים שביניהם) רק שאלות מהסוג שבהם עסקו כבר. אולם, מתברר שבמרבית המקרים אם הזיכרון לא מלווה בהבנה, התלמידים זוכרים באופן משובש את הדרך לפתרון כפי שהיא נלמדה. יתרה מכך, לעיתים שאלו שדורשות הגיון וקישור לידע אחר יותר מובנות ויותר קלות לביצוע לתלמידים מתקשים מאשר שאלות שבהם מירב המאמצים של התלמיד יתמקדו

בלנסות לשחזר את מה שהמורה עשתה בכיתה. לכן, חשוב מאד בראיון, שיחה או אוסף משימות לעבודה עצמית שניתנים כדי לאתר ידע וקשיים לשלב בין משימות בכל רמות החשיבה ומסוגים שונים.

- ✓ כאמור, תלמידים במקרים רבים יודעים לבצע אך לא להסביר. לכן, באיתור חייבות להופיע גם שאלות של זיהוי וביצוע אלגוריתמים ולא רק שאלות של הבנה ויישום.

<u>בשקף 14</u>

- ✓ הכנה מוקדמת של המורה באשר לשגיאות צפויות ומה התפיסות השגויות העומדות מאחרי כל שגיאה היא הבסיס ליכולת לבנות תכנית קידום. ידע זה של מורה הוא אחד המרכיבים החיוניים בידע פדגוגי של מורה.
- ✓ עבודה מחודשת בחוברת ללא הכוונה של מבוגר וללא התמקדות בקשיים הספציפים של התלמיד היא למידה מחודשת. לעיתים, למידה מחודשת זו עשויה להצליח במיוחד אם היא נעשית בגישה שונה מזו שהתלמיד למד בה לראשונה, או שהיא מבוססת על ידע שהיה חסר והושלם. יחד עם זאת צריך לקחת בחשבון שלמידה בחוברת ללא שיחה היא בדרך כלל לא יעילה, החוברת לא נכתבה לצרכי אותו תלמיד והיא מכילה גם נושאים שאינם קריטיים לאותו תלמיד. מומלץ שתכנית החיזוק תבנה על ידי המורה עם אפשרויות שימוש בחומרים נלווים על-פי התאמת המורה.
- ✓ בניית תכנית עבודה לתלמיד היא הכרחית. על התכנית לכלול את הנושאים והרעיונות המתמטיים הקריטיים שעל התלמיד ללמוד ולהבין. התכנית צריכה להיות מחולקת ליחידות משנה שבכל אחת מהן יש תרחישים שונים של התקדמות. תרחישים אלו ינווטו על ידי המורה, תוך כדי העבודה, בהתאם לתשובות התלמיד לשאלות המאתרות קשיים. התכנית תעודכן במהלך העבודה.

כאשר נתקלים בקשיים של תלמיד יש לאתר אצלו את מקור הקושי ואת התפיסות השגויות שלו. זיהוי הקשיים ייעשה באמצעות "כלי" שהמורה בונה ומתאים אותו לתלמיד או לקבוצת תלמידים. הכלי יכול לכלול אוסף (לא גדול) של פריטים עליהם התלמיד יעבוד בעבודה עצמית והם יתנו למורה תמונה כללית ראשונית על ההבנה של התלמיד. בהרבה מקרים איתור כזה הוא מיותר כי המורה כבר מכיר את התמונה הכללית של התלמיד.

כדי לאתר את הנושאים והמושגים שהתלמיד שולט בהם ובמקביל את התפיסות השגויות שלו המורה יתכנן מראש מפגש שבו הוא יציג לתלמיד (או למספר תלמידים) מספר לא גדול של שאלות שבמהלך הפתרון שלהם המורה יוכל גם לשוחח, לשאול ולהכיר יותר לעומק את הידע ואת התפיסות השגויות של התלמיד. במהלך מפגש כזה המורה גם יכוון את התלמיד לדרכי חשיבה ולאפשרות ליצור קשרים לידע קודם של התלמיד. מבחינה זו מפגש כזה איננו רק מפגש איתור- אלא שלב ראשון של עבודה עם התלמיד

לצורך הבניית הידע הנדרש אצלו. מסיבה זו, יש לתכנן את המפגש כך שימוקד בהבניה של רעיון מתמטי. בהמשך העבודה עם התלמיד יתוכננו מפגשים נוספים מסוג זה. בנוסף לכך יתוכננו גם מפגשים שייועדו רק להבניית ידע או תרגול של מושגים ונושאים שהוחלט שיש להבנות אותם אצל התלמיד.

כאשר מורה מתכנן יחידה שבה הוא רוצה לאתר ידע ואי-ידע עליו לחשוב מראש על תרחישים אפשריים. כלומר- אם התלמיד יענה כך... וכך... (מבוסס על הכרת שגיאות ותפיסות שגויות), זה אומר שהוא.... ולכן נמשיך...., אבל אם הוא יענה אחרת.... דרך העבודה תהיה שונה.

לצורך הכנת המפגשים והתרחישים הוכן מאגר ראשוני של שאלות בנושא השברים שניתן בעזרתו לתכנן מפגשי איתור וטיפול בקשיים של התלמידים.

לדוגמה, פריט אחד מתוך מאגר הפריטים שהמורה יכול להשתמש בהם לצורך בניית שיחת איתור וטיפול בקשיים.

**השבר הפשוט- הכרת שברי יחידה כחלק מכמות**

**<u>קשיים ותפיסות שגויות</u>**

אי הבחנה בין כמות לבין שבר שמייצג חלק יחסי מהכמות.

קושי בראיית שלם ככמות.

קשיים בביצוע פעולות כמו: חילוק מספר דו-ספרתי ל- 3

קושי בקריאה ובהבנת צורת הכתיבה של מספר רציונאלי המורכב משני מספרים טבעיים שלכל אחד מהם תפקיד שונה. ( כאשר המכנה שונה מ-0)

| | |
|---|---|
| $\frac{1}{3}$ מהספרים שבספרייה הם באנגלית.<br><br>כמה ספרים באנגלית יש בספרייה,<br><br>אם בסך הכול יש בספרייה 90 ספרים?<br><br>תשובה:_____ ספרים<br><br>(מתוך מיצ"ב תשע"א)<br>שבר פשוט מהות-2 | **מאפייני השאלה**<br>• סיטואציה מילולית שגרתית<br>• רמת חשיבה: יישום פשוט<br>השאלה בודקת הבנה בסיסית של משמעות השבר (שבר יחידה) כחלק מכמות.<br>לפתרון השאלה נדרשת:<br>• יכולת קריאה ותרגום הסיטואציה המילולית לתרגיל המתאים.<br>• הכרת צורת הייצוג של מספר רציונאלי (שבר פשוט), המורכב משני מספרים שלמים שלכל אחד מהם תפקיד שונה.<br>• יכולת לדמיין או לצייר ייצוג ויזואלי שיסייע בפתרון השאלה.<br>• יכולת חישובית לחלק את 90 ל- 3 קבוצות שוות.או לחשב כמה פעמים 3 "נכנס" ב-90 (חישוב המבוסס על המשמעות של חילוק לחלקים או על המשמעות של חילוק להכלה). |

במצגת 1 (קישור) בשקף 17 יש קישור לקובץ הפריט.

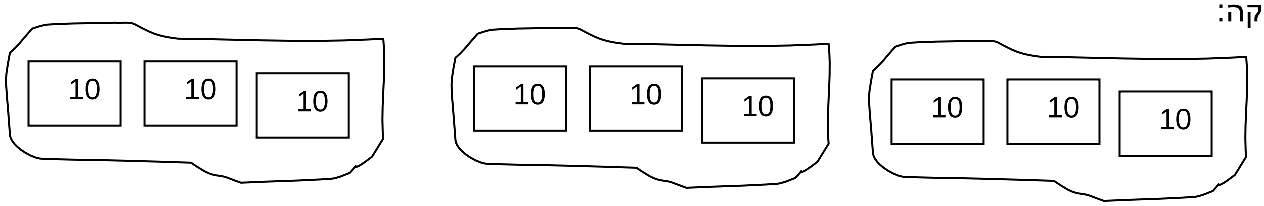
אפשר לנסות ולהשלים את החלקים החסרים בפריט נוסף (נספח 3). מקושר למצגת בשקף 17.

המטרה היא תרגול בחשיבה על אסטרטגיות חשיבה ועבודה צפויות של תלמידים, חשיבה על טעויות צפויות והסיבות להן ועל דרכים לנסות ולכוון את התלמיד השוגה לחשיבה נכונה על המושג המתמטי.

**אסטרטגיות אפשריות לפתרון השאלה**

1. באמצעות תרגיל חילוק 3 : 90 . מעיד על הבנה שהשלם מורכב מקבוצה של 90 פריטים בדידים, ועל הקשר שבין $\frac{1}{3}$ לפעולת החילוק ב- 3.
2. ייצוג השלם כקבוצה אחת בעזרת סרטוט, חלוקתו ל- 3 חלקים שווים, וחלוקת הכמות (90) שווה בשווה בין החלקים. מעיד על הצורך לראות את השבר כחלוקה של שלם רציף.
3. באמצעות תרגיל כפל: . $\frac{1}{3}\times 90$
4. מתוך כל שלושה ספרים אחד הוא באנגלית. כלומר, מחלקים את 90 הספרים לקבוצות, כך שבכל קבוצה יש שלושה ספרים. כדי לדעת כמה קבוצות כאלו יש מחלקים: 3 :90 (חילוק להכלה) . מאחר ויש 30 קבוצות, ובכל קבוצה ספר אחד – יש 30 ספרים באנגלית.
5. הצגת המספר 90 כסכום של 9 עשרות:

ואז חלוקה:




**טעויות שעשויות להצביע על קשיים בהבנת המושג/ המיומנות**

1. <u>תשובה</u>: $\frac{1}{3}$ ספרים. מעיד על ראיית המספר $\frac{1}{3}$ ככמות ולא כחלק יחסי של שלם אחר (90 ספרים).יש להניח שקיים קושי בהבנה שהמספר $\frac{1}{3}$ מבטא פעולת חילוק של שלם.
2. <u>תשובה</u>: $90\frac{1}{3}$ ספרים. מעיד על חוסר הבנת הקשרים שבין המספרים המיוצגים בשאלה. יש להניח שהמילה "בסך הכל" כיוונה את התלמיד לבצע פעולת חיבור. חוסר הבנת הקשר בין המספר $\frac{1}{3}$ למספר 90 בשאלה זו, וראיית המספר $\frac{1}{3}$ ככמות, עשוי להצביע על חוסר הבנה בסיסית של משמעות השבר.

3. <u>אי מתן תשובה</u>: עשוי להעיד:
על חוסר זיהוי הקשר שבין המספרים בשאלה, הנובע מקושי בהבנת מושג השבר כחלק מכמות,או על אי-הכרת הייצוג המספרי של שבר היחידה.
אי מתן תשובה עשוי גם להעיד על כך שהניסוח של השאלה מסובך לתלמיד (במיוחד אם הוא מתקשה בקריאה או בהבנת הנקרא).

**הצעות לשיח קצר / שימוש בייצוגים עם התלמיד בזמן או לאחר פתרון השאלה**

- מבקשים מהילד **לספר במילים שלו את השאלה**. חשוב מאד שהילד ימליל את העובדה <u>ש- 90 ספרים הם כל הספרים</u> ואת העובדה שאם רוצים לחשב <u>כמה זה שליש מכל הספרים</u> צריך <u>**לחלק** את כל כמות הספרים ל- 3 חלקים שווים.</u>

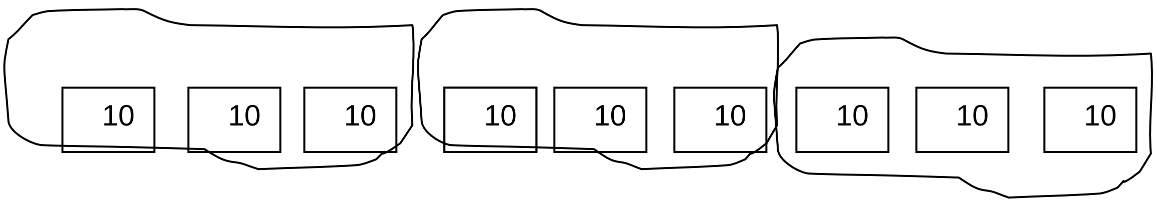
  על-ידי ההמללה ניתן לאתר או להבנות את הרעיון שהמשמעות של $\frac{1}{3}$ היא חילוק הכמות ל-3.

- מומלץ לבקש מהילד **לייצג בדרך כלשהי את השלם-"כל הספרים**". חשוב שהייצוג יהיה כזה שיאפשר חלוקה ל- 3. למשל:

| | | |
|---|---|---|
| 30 | 30 | 30 |

השלם יכול להיות מיוצג על ידי כל צורה גם אם היא סכמטית ואיננה מחולקת בצורה מדויקת. מה שחשוב הוא שהתלמיד מבין שאת הכמות (90) צריך לחלק שווה בשווה.

להלן דרך נוספת להצגת כל הכמות:




ייצוג המספר 90 בעשרות יכול להיות בעזרת אמצעי המחשה כמו לבני דינס (כוח 10) .

תלמידים מתקשים במיוחד עשויים לייצג את הכמות הכוללת בעזרת ציור של 90 קווים,

עיגולים וכ"ו. במקרה כזה כדאי לכוון אותם:

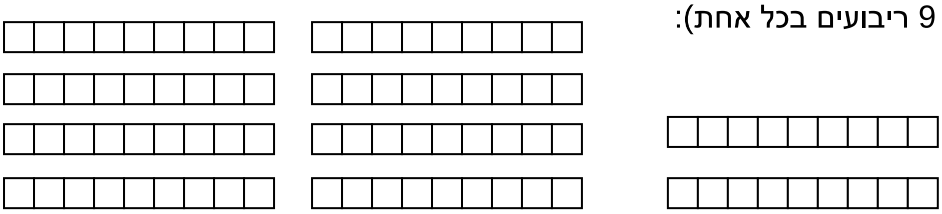
- לשאלה דומה כשהשלם בה הוא כמות קטנה. רצוי שהשאלה תעסוק באובייקטים שהתלמיד יכול להחזיק בידו (למשל, עפרונות, דפים, דיסקיות). לאחר שהתלמיד הבין שאם רוצים למצוא

$\frac{1}{3}$ מכמות, יש לחלק את הכמות ל- 3, מציגים מספר שאלות שבכל אחת מהן מעלים בהדרגה את הכמות שהשלם מהווה, ובכל שאלה השלם מיוצג על-ידי אובייקטים אחרים. בהדרגה עוברים מייצוג באובייקטים קונקרטיים לייצוג סכמטי בעזרת ציור או סרטוט.

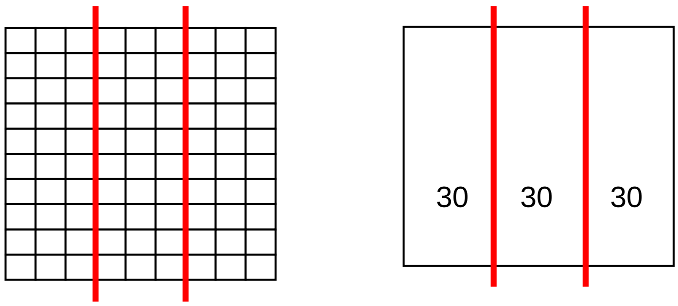
בהמשך, יש להציג לתלמיד שאלות דומות עם שבר יחידה אחר.

- לייצוג האובייקטים שבשאלה כשהם מקובצים. למשל, לעשרות כפי שהוצג לעיל. בשלב שהתלמיד מבין שאפשר לייצג אובייקטים באמצעות סימול סכמטי (קו, עיגול וכ"ו), חשוב שיבין גם שאפשר לייצג קבוצה של אובייקטים על-ידי סימן אחד, כשכותבים לצידו את המספר שהוא מייצג (ראו דוגמאות בראש העמוד).

כדי להוביל את התלמיד להבנה שניתן לייצג בצורה מקובצת את כל הכמות של 90, אפשר להשתמש ב- 9 לבני דינס שכל אחד מהם מייצג עשרת, או לסרטט 9 שורות שבכל אחת 10 ריבועים (או הפוך) ובהמשך לבנות מהם מלבן. כלומר, לייצג את 90 כמכפלה של קבוצות שוות. לדוגמה (בדוגמה מוצגות 10 קבוצות של 9 ריבועים בכל אחת):



את הקבוצות השוות האלו אפשר לסדר במערך מלבני, ל"מחוק" את כל הקווים המפרידים בין המשבצות ולציין שהמלבן מייצג 90. אפשר גם, לפני המחיקה לחלק את המשבצות ל- 3 קבוצות שוות.



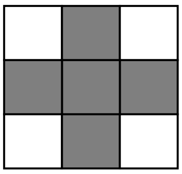

- <u>לתלמידים שמתקשים בהבנת מהות השבר</u> בכל צורה של ייצוג, ו/או תלמידים שאינם מכירים את הייצוג המספרי של שבר **אפשר להתחיל להבנות את מושג שבר היחידה על-בסיס שאלה זו.** אפשר גם להשתמש בשלבים הראשונים בשם השבר "שליש" במילים כתחליף לייצוג המספרי ולהתקדם בהבניית ההבנה של המושג המופשט.

- לתלמידים שמתקשים בביצוע החישוב יש להציג **שאלות דומות כשהשלם מיוצג על-ידי כמות קטנה יותר**. אפשר גם לבקש מהתלמיד להציג רק את התרגיל או להמליל את הפעולה הנדרשת. במקביל להיעזר בייצוגים סכמטיים (כפי שהוצגו לעיל) כדי לבצע את החלוקה ל- 3 בצורה מוחשית ולהקנות לתלמיד דרך לחישוב תוצאה של תרגיל חילוק.

**השבר הפשוט- הכרת שברים כחלק משלם (מלבן, עיגול)**

**<u>קשיים ותפיסות שגויות</u>** (להשלמה)

איזה חלק מהריבוע צבוע באפור ?



שבר פשוט מהות-1

**מאפייני השאלה**

- זיהוי שבר כחלק מכמות המאורגנת כצורה "שלמה".
- רמת חשיבה: (להשלמה)
- השאלה בודקת את הבנת משמעות השבר  כחלק מכמות, כאשר הכמות השלמה מאורגנת כצורה "שלמה".

לפתרון השאלה נדרשים:

(להשלמה)

**אסטרטגיות אפשריות לפתרון השאלה** (להשלמה)

**טעויות שעשויות להצביע על קשיים בהבנת המושג/ המיומנות** (להשלמה)

**הצעות לשיח קצר / שימוש בייצוגים עם התלמיד בזמן או לאחר פתרון השאלה** (להשלמה)

## שברים פשוטים- ייצוגים, שגיאות ותפיסות שגויות

בחלק הראשון של עסקנו בהבנת הקשר שבין ייצוג, אסטרטגיה לפתרון והבניית ההבנה של מושג או פעולה מתמטית. חלק זה עוסק בדרך עבודה עם יישומון, אסטרטגיה להקניית משמעות החילוק בשברים ולאפשרויות שונות לניצול ייצוגים לצורך הבנייה ראשונית של הבנת המושגים ולצורך תיקון הבנות שגויות.

בהמשך נעסוק בניתוח ייצוגים שונים ששימשו תלמידים בפתרון תרגילים ושאלות בשברים.

**הצגת שקף 2 ממצגת מס' 2 (קישור)**

על בסיס ההבנות שעלו בחלק הראשון - איך הייתם מציגים לתלמידים את המשמעות של חילוק שברים?

שאלות לחשיבה:

א. מה המקום של הייצוג בתהליך?

ב. באילו ייצוגים הייתם משתמשים?

צפו בסרטון ההדרכה על חילוק שברים (7.5 דקות).

לאחר הצפייה נסו להשיב על השאלה - איך ניתן להסביר /לייצג את המשמעות של

תרגיל החילוק: $\frac{1}{3} : \frac{5}{6}$ **?**

*מומלץ* להציג את הרעיונות בעזרת סרטוט ו/או יישומון

(למשל,http://almada.org.il/download.php?id=48).

חשוב להבהיר שככלי פדגוגי אנחנו חוזרים אחורה ובודקים איך לבנות ידע חדש על הידע הקודם. כלומר, אם אנחנו חושבים על משמעות לחילוק שברים, יש לבחון את המשמעויות של חילוק בשלמים.

בנוסף, חשוב להבהיר שלכל תרגיל יש את המשמעות שאנחנו מקנים לו על-פי המספרים שבתרגיל וממנה תיגזר אסטרטגיית החישוב. עקרון זה הוא העיקרון המרכזי בפיתוח תובנה חשבונית.

לדוגמה, מה המשמעות של התרגיל 2 : 100? המשמעות ש"תאומץ" כנוחה לחישוב היא חילוק 100 לשתי קבוצות שוות (חילוק לחלקים). לעומת זאת אם נשאל על המשמעות של 50 : 100, המשמעות שנוחה לחישוב היא - כמה פעמים 50 "נכנס" ב- 100? כלומר, חילוק להכלה.

בדרך כלל מקובל לחשוב שמשמעויות נגזרות מ"סיפור" ולתרגיל אין משמעויות. חשוב להבהיר שבכל בחירה מושכלת של דרך חישוב יש התאמת משמעות (סיפור) לתרגיל.

בחילוק שלמים הכרנו ארבע משמעויות מרכזיות:

- חילוק לחלקים,
- חילוק להכלה,
- חילוק כחיסור חוזר,
- וחילוק כפעולה הפוכה לכפל.

אם ננסה להתאים לתרגיל $\frac{1}{3}:\frac{5}{6}$ את המשמעויות השונות, הרי שאנחנו צריכים לשאול את השאלות הבאות:

- אם נחלק את $\frac{5}{6}$ לשליש פעמים- כמה יהיה בכל חלק? שאלה שהיא חסרת משמעות אינטואיטיבית כי פעמים בדרך כלל מוגדרים כמספרים שלמים (למרות שבהחלט אפשר גם לדבר על חצי פעם, רבע פעם וכ"ו - אבל זה לא אינטואיטיבי). לכן, לא נבחר במקרה זה במשמעות של חילוק לחלקים.

- כמה פעמים $\frac{1}{3}$ "נכנס" ב- $\frac{5}{6}$?

- כמה פעמים צריך לחסר $\frac{1}{3}$ מ- $\frac{5}{6}$ כדי להגיע ל-0 ?

- מה המספר החסר במשוואה: $\frac{5}{6} = \_\_ \times \frac{1}{3}$ ? שאלה השקולה לשאלות: כמה פעמים צריך לכפול את $\frac{1}{3}$ כדי לקבל $\frac{5}{6}$? שאלה המחזירה אותנו למשמעויות של הכלה וחיסור חוזר, שגם הוא מעין בדיקת הכלה.

לפחות את שלושת השאלות האחרונות אפשר לייצג בייצוגים שונים. כלומר, בחילוק שבר בשבר המשמעות האינטואיטיבית ביותר היא חילוק להכלה כפי שהודגמה גם בסרטון בחילוק מספר שלם או מעורב לשבר. או, חיסור חוזר שמבחינה מסוימת מאד דומה לחילוק להכלה.

המשמעות של חילוק להכלה ניתנת להדגמה באמצעות ייצוג שני השברים כחלקים של שלם רציף (עיגול או מלבן), כאשר בודקים את ה"הכלה" על-ידי השוואה ישירה של הנחת שליש על חמש שישיות. ניתן להדגים זאת באמצעות יישומון או בעזרת סרטוט 1 בשקף 2.

המשמעות של חיסור חוזר ניתנת לייצוג גם באמצעות הסרת חלקים משלם רציף (ניתן גם להדגים ביישומון) או על ישר המספרים בקפיצות המתארות בדיקה כמה פעמים $\frac{1}{3}$ יחידה "נכנסת" מהנקודה 0 על הציר ועד לנקודה $\frac{5}{6}$ ( קישור למצגת 2 - מודגם בסרטוט 2 בשקף 3).

ייצוג טוב צריך להדגיש את משמעות הפעולה, חשוב מאד שהתלמיד יוכל לשחזר את הייצוג במקרים שלא ברור לו מה החישוב שעליו לבצע.

מייצוג של תלמיד ומהגמישות בבחירת ייצוגים, אפשר גם להבין את דרך החשיבה שלו וגם תפיסות שגויות שלו.

לבחירת ייצוגים יש גם השלכות והשפעה על דרך ההוראה ופיתוח היכולת של הבנת המשמעות של המושגים המתמטיים ושל הקשרים שבין המושגים. כדוגמאות, ראו שני ייצוגים לשאלות דומות בשקפים 3-4. (קישור מצגת 2).

למעשה השאלה המוצגת בשקף 4 בשתי הוריאציות שלה עוסקת בחיבור שברים בעלי אותו מכנה. אבל, בייצוג שבו השלם מיוצג כעיגול אפשר לזהות מיד את התשובה (חצי) . גם המחוברים מאד ברורים - העיגול מחולק ל- 8 חלקים שווים ולכן, כל חלק הוא שמינית. לייצוג מוחשי זה אפשר לקשר את הייצוג המספרי של תרגילים כגון:

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2} \quad , \quad \frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2} \quad , \quad \frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{4}{8} \quad , \quad 3\times\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}$$

אפשר להוסיף תרגילים נוספים, שלעצמם יכולים להיות מאד מעניינים ומפתחים יכולת ארגון מספר בדרכים שונות. אולם, למעשה אין כאן כל עניין במציאת התשובה לשאלה – איזה חלק צבוע ביחד, כי התשובה לכך כבר נראית מיד.

לעומת זאת, בייצוג השני, שבו השלם מיוצג כמלבן והחלקים נוצרים כתוצאה מחלוקה בדרכים שונות, על התלמיד להגיע בעצמו לכך שכל אחד מהחלקים הצבועים הוא שמינית (למרות שצורתם שונה), ועליהם לבצע מניפולציות שונות כדי להבין שהצרוף של שני החלקים הוא רבע. עד כמה שהייצוג כאן נראה קשה ומורכב יותר- הוא מפתח את ההבנה של משמעות השבר בהקשר לחילוק שלם לחלקים שווים במשמעות של שווי שטח לאו דווקא חופפים, הרבה יותר מאשר הייצוג הקודם בעיגול.

בשקף 5  אפשר לראות עבודות של תלמידים המעידות על כך שנעשתה עבודה פעילה שכרוכה גם בחלוקת השלם לחלקים שווים, גם במשמעות של חילוק להכלה על-ידי בדיקה כמה פעמים כל חלק "נכנס" בשלם וכך יודעים איזה חלק הוא, וגם כתיבת תרגילים המתעדים את השלבים השונים של העבודה ומחזקים את הצגת המספרים בדרכי ארגון שונות.

משני שקפים אלו ניתן להסיק את המרכזיות והחשיבות של ייצוג בלמידת מתמטיקה, שבה נלמדים מושגים מופשטים.

כאשר מנסים לסייע לתלמיד להתגבר על קשיים יש לפתח אצלו את היכולת להשתמש בייצוגים. יכולת זו תסייע לתלמידים להבין את המושגים המופשטים וגם לפתור תרגילים ושאלות. מן הראוי לבדוק ולשפר את היכולת שלו להשתמש בייצוגים בצורה יעילה.

**אסטרטגיות של תלמידים ושימוש בייצוגים ככלי מסייע להבנה ולפתרון השאלה:**

בשקף 5

בדוגמה 1 – אפשר לראות שימוש בייצוג של עיגול כשלם. לאחר מכן, התלמיד סרטט את כל השלבים המוצגים בסיטואציה ובעזרת הייצוג הגיע לתשובה הנכונה.

תלמידים רבים שלא יצרו ייצוג ויזואלי של הסיטואציה ונאחזו רק בכתוב, הסתמכו על החלוקה ל-5 ולכן כתבו שכל חבר קיבל חמישית מהעוגה. כלומר, התעלמו מחצי העוגה שדני אכל לפני שחילק לחמשת חבריו את מה שנותר. אין ספק שסרטוט חצי העוגה מסייע בהתייחסות לכל הנתונים המוצגים בשאלה ובהבנת הקשרים ביניהם.

בדוגמה 2 – מוצגת ההתחלה של  שאלה, כשלצידה ייצוג שהתלמיד יצר. הייצוג הוא הצגה מדויקת של מה שמוצג בסיטואציה המילולית. כלומר, ניתן ללמוד על התלמיד:

א. שהוא מבין את הקשר שבין חלק של שלם לבין הכמות החלקית המתאימה לכל חלק.

ב. שיש לתלמיד יכולת לייצג את השלם (ואת הכמות השלמה) כאשר הוא יודע מה הוא החלק (והכמות החלקית).

ג. שסרטוט של ייצוג המבהיר את החלקים ואת השלם מסייע לו בפתרון שאלות בשברים.

בדוגמה 3 -  בשאלה הוצגו חמישה חלקים צבועים מתוך 12 כשהם מפוזרים. השאלות: איזה חלק מהשלם צבוע? והאם החלק הצבוע גדול או קטן מחצי המלבן?

מהייצוג ניתן לראות שהתלמיד "שינה" את המיקום של החלקים הצבועים כדי שהם יהיו ממוקמים אחד ליד השני. ניתן גם לראות שההשוואה לחצי נעשתה על-ידי זיהוי חצי מהמלבן בצורה ויזואלית ולא על-ידי הבנה שאם צבועים יותר מ- 6 חלקים (מתוך 12), הרי שצבוע יותר מחצי מהמלבן. יש להניח שאצל התלמיד תפיסת השלם והחלקים כחלק מייצוג רציף משמעותית יותר מאשר התפיסה כחלק מכמות.

<u>בדוגמה 4</u> - גם בדוגמה זו ניתן לראות שהתלמיד משתמש בייצוג שבו השלם הוא רציף (מלבן). בעזרת חלוקה לחלקים שווים של השלם, הוא מייצג את הכמויות המוזכרות בשאלה.

יש להניח שאצל תלמיד זה הייצוג של השלם כשלם רציף חזק יותר מאשר ייצוג של פריטים המהווים קבוצה. לכן, אם תלמיד כזה יתקשה בשאלות הקשורות לחלק מכמות – מומלץ להפנות אותו לייצג את הכמות כשהיא מאורגנת במבנה של מלבן עם שורות וטורים סדורים, ולא בתפזורת.

<u>בדוגמה 5</u> - כמו בדוגמה 2, אפשר לראות שהתלמיד משתמש בייצוג סכמטי שבעזרתו יקל עליו להתאים את הכמויות לחלקים ולראות את מה צריך לחשב בשאלה. הפעם, יתכן שהתלמיד ייצג את השלם כמלבן, אולם יתכן גם שצייר באופן סכמטי את הכוס עליה מספרים בשאלה. בכל מקרה עצם הייצוג במבנה של מלבן מאפשר לו לחלק לחלקים שווים.

<u>בשקף 6:</u>

בשלב הראשון מוצגת שאלה שלצידה שני ייצוגים של תלמידים. הימני הוא ייצוג כמותי, בעזרתו התלמיד מחלק את הכמות לקבוצות שוות, השמאלי – גם הוא ייצוג כמותי, אך הוא מאורגן כצורה גיאומטרית רציפה ואפשר לראות בו את החלוקה לחצאים ולרבעים, שיש להניח שהיא מבוססת על חלוקת השלם על-פי המשמעות של רבע - לחלק לארבעה חלקים שווים - קודם מחלקים ל- 2 ואחר כך שוב ל- 2. סביר להניח שחלוקה זו נעשתה ללא קשר לחלוקה ל-12.

חשוב לציין שהתלמידים אמורים להבין את הקשר שבין ייצוג בכמויות לבין ייצוג כשלם רציף, אך אין העדפה לצורת ייצוג זו או אחרת. יש גם תלמידים שיעדיפו ייצוג בדרכים אחרות לדוגמה טבלאות של מספרים. לפעמים ראיית קשרים בין מספרים חזק אצלם יותר מאשר תפיסה וויזואלית. למשל, בדוגמה הנוספת בשקף זה אפשר לראות שהתלמיד לא היה זקוק לייצוג ויזואלי ותרגם את המשמעות של מציאת שליש מכמות נתונה לחילוק הכמות ב- 3 בעזרת חישוב.

לתלמידים שמגלים קשיים בתחום השברים חשוב להציע ולכוון אותם לבנות ייצוג ויזואלי כלשהו, ולגלות איזה ייצוג ברור להם ויוכל לשמש כאמצעי להמחשת מצבים שונים.

**שקף 8:**

<u>להלן אסטרטגיות אפשריות לפתרון השאלה.</u>

6. חלוקת כמות העיגולים ל- 5 קבוצות שוות (בכל אחת מהן יהיו 3 עיגולים), וצביעת העיגולים בשתי קבוצות כאלו – בסך הכל צביעה של 6 עיגולים. אסטרטגיה זו מבוססת על הבנת החילוק כחילוק לחלקים.
7. מניית מספר העיגולים (או חישוב על ידי חיבור חוזר או כפל) ולאחר מכן , חישוב כמה עיגולים מהווים חמישית – על-ידי חילוק ב- 5 , וכפל ב-2 כדי לחשב כמה עיגולים יש ב- $\frac{2}{5}$.
8. חלוקת כמות העיגולים לקבוצות שבכל אחת מהן יש 5 עיגולים. לאחר מכן צביעת שני עיגולים מתוך כל קבוצה של 5 עיגולים. בסך-הכל צביעה של 6 עיגולים. אסטרטגיה זו מבוססת על שימוש בתובנה של חילוק להכלה.
9. לאחר מנייה או חישוב של כמות העיגולים, חישוב באמצעות תרגיל כפל: $\frac{2}{5}\times 15$. באסטרטגיה זו עשויים להשתמש תלמידים שלמדו שפעולת הכפל בשבר מבטאת את המשמעות של – "כמה הם $\frac{2}{5}$ מ- 15". פתרון תרגיל הכפל יכול להתבצע על-ידי כפל 2 ב- 15 ולאחר מכן חילוק התוצאה ב- 5, או על-ידי כתיבת התרגיל כך : $\frac{2}{5}\times 15$ או כך : $\frac{2}{5}\times\frac{15}{1}$ וחילוק 15 ו- 5 בגורם 5 ( צמצום) ולאחר מכן כפל 2 ב- 3.
במקרה של כתיבת התרגיל כמכפלה של שבר בשבר יתווסף גם השלב של מכפלת המכנים וחלוקת המונה במכנה. ( עם צמצום או ללא צמצום)

**טעויות אפשריות לפתרון השאלה**:

4. צביעה של שני עיגולים בלבד. טעות זו יכולה לנבוע מהתפיסה השגויה שהמכנה מציין את הכמות הכוללת שבשלם, כשלמעשה הכמות הכוללת יכולה להיות גם גדולה או קטנה ממנו.
5. טעות זו יכולה גם לנבוע מקריאה לא נכונה של המספר- במקום שתי חמישיות קוראים " שתיים מתוך חמש". במקרה כזה לעיתים התלמיד גם מסמן בדרך כלשהיא קבוצה של חמישה עיגולים, אליהם יתייחס כאל שלם.

חשוב לציין שאם התלמיד היה מבין שיש לו שלוש פעמים קבוצות של חמש ,והיה מסמן בכל אחת מהקבוצות שני עיגולים –הוא היה מקבל תשובה נכונה שנובעת משיקולים נכונים. בהתחלה הבנת החילוק להכלה (כמה פעמים 5 "נכנס" ב- 15), ולאחר מכן כפל 3 ב- 2.

6. צביעה של "שתי חמשות". טעות זו עשויה להעיד על קושי בהבנת מהות השבר ותפקידי המונה והמכנה.

**5. לאחר העלאת האסטרטגיות והשגיאות מעלים את השאלות:**

- **מה השאלה בודקת?**
- **מה הידע הנדרש לפתרון השאלה?**
- **באיזו רמת חשיבה השאלה?**

**סיכום אפיון השאלה בעזרת שקף 10**

**6. שאלה: גילינו אצל תלמיד שגיאה שכנראה אנחנו גם יודעים להסביר את המקור שלה.**

**האם מהשגיאה אפשר להסיק שיש תפיסה שגויה ומהי התפיסה השגויה?**

**חשוב להבהיר:**

- על בסיס שאלה אחת (או בכלל מיעוט פריטים) אי אפשר להסיק **כלום.** בדרך אגב, חשוב להבהיר שגם כאשר עושים מיפוי לכיתה ויש שאלה אחת או שתיים שעוסקות בנושא זה לא נכון להסיק מההצלחה במעט פריטים על ידע הכיתה או הפרט. לפעמים, שאילת שאלה באותו נושא בדרך קצת אחרת עשויה להציף תמונה אחרת לגמרי של הצלחה.

- תפיסה שגויה היא דפוס של עבודה שגוי שחוזר על עצמו שמבוסס על הבנה שגויה כלשהי.

- כדי להחליט שמדובר בתפיסה שגויה צריך לראות מספר מקרים שבהם התלמיד מתנהל באותו דפוס של עבודה. רק לאחר מכן אפשר להתחיל לשער ולחקור מהי ההבנה הלקויה שיתכן שהיא משפיעה על העבודה על-פי הדפוס השגוי.

- לפעמים אנחנו רואים שבתרגיל שונה התלמיד הולך בדרך אחרת שגם היא שגויה. במקרה זה כדאי גם לראות מה דומה ומה שונה בין שני התרגילים, ולנסות להבין מה מוביל את התלמיד לשגיאות השונות. לפעמים, אותה תפיסה שגויה מובילה לכמה סוגים של שגיאות.

2. **נבהיר את ההבדל בין טעות לתפיסה שגויה באמצעות ההפעלה שבשקפים 11- 15 (קישור למצגת 2)**

בשקף 11 מוצגת שאלה דומה לשאלה שהוצגה בשקף 8, אך קצת יותר קלה ממנה. בשקף מוצגות שתי תשובות נכונות של תלמידים, שכל אחת מייצגת אסטרטגיה אחרת לפתרון.

השאלה היא שאלה יותר פשוטה משום שבה שואלים על שבר יחידה. בשאלה זו אפשר לבדוק אם קיימת הבנה שכמות הפריטים היא קבוצה שלמה, ללא קשר במספר הפריטים (סוג ומספר הפריטים כאן אינו

זהה למה שהוצג בשאלה הקודמת), ואם קיימת הבנה שיש לחלק את הכמות השלמה למספר חלקים המצוין במכנה.

חשוב לזכור שיתכן שבמקרה של שבר יחידה תהיה שליטה והשגיאה לא תעלה. כלומר, ההבנה יציבה במקרה שהמונה 1 , כאשר המונה גדול מ- 1 , כל ההבנה משתבשת. לכן, חשוב שהתרגילים שניתנים כדי לבדוק מהי התפיסה השגויה יהיו מגוונים מתמטית.

בכל מקרה, כאשר מזהים מה התלמיד כן מבין ויודע חשוב להתבסס על ההבנה הזו בתהליך "שיקום" ההבנה השגויה.

<u>בשקף 11 בדוגמה מימין</u> , אפשר לראות באופן ברור את חלוקת הכמות ל- 5 קבוצות שוות וצביעה של כל הלבבות בקבוצה אחת. בדיוק לפי ההגדרה האופרטיבית של השבר חמישית: חלוקת כל הקבוצה ל- 5 חלקים שווים ולקיחת חלק אחד מתוך חמשת החלקים (מה ששקול לכפל ב-1).

<u>בשקף 11 בדוגמה משמאל</u> , אפשר לראות את חלוקת הכמות לקבוצות שבכל אחת מהן יש 5 לבבות (חילוק להכלה), ולאחר מכן צביעה של לב אחד מכל קבוצה. אפשר לראות זאת כייצוג של חמישית מקבוצה שיש בה רק חמישה איברים, כשהייצוג חוזר על עצמו ארבע פעמים. בסך הכל צבועים ארבעה לבבות שהם חמישית מכל הקבוצה.

<u>בשקף 12</u>: מוצגת שגיאה. אפשר לראות שהתלמיד הקיף "חמש לבבות". יש להניח שאיננו מבין את משמעות השבר והוא מפרש את השבר "חמישית" כחמישיה אחת .

אם הטעות של התלמיד היא לא מקרית, והיא נשענת על תפיסה שגויה יש להניח שיפעל באותו דפוס גם בשאלה המוצגת <u>בשקף 13</u>, ויציג את הפתרון שבשקף.

צבעו "שלושה רבעים" על-פי אותו דפוס קבוע של שגיאה. התשובה הצפויה היא צביעת כל העיגולים. מתשובה שגויה זו אפשר גם להסיק באופן שגוי ששלושה רבעים שווים לכל הכמות.

נבחן באותה דרך טעות שכיחה נוספת לאותה שאלה.

<u>בשקף 14</u>: מוצגת התשובה השגויה של התלמיד - אפשר לראות בבירור שעבור התלמיד הכמות הכללית שנמצאת בשלם שווה למספר שכתוב במכנה. לכן, כדי לסמן חמישית, מתוך כל הלבבות שבתמונה התלמיד תוחם חמש לבבות ומהן הוא צובע אחד.

<u>בשקף 15</u>, מוצגת התשובה הצפויה מתלמיד הפועל בדפוס השגיאה שהופיעה בשקף הקודם לשאלה נוספת. נבקש מהמשתלמים לצבוע "שלושה רבעים" על-פי הדפוס השגוי שהוצג בשקף הקודם. התשובה הצפויה היא תיחום של ארבעה לבבות וצביעה של שלושה מהם.

**שאלה ונקודות לדיון - שקף 16**

- השאלה בודקת אומדן של סכום של שני שברים ביחס לשלם. למעשה, לא נדרש ידע בחיבור שברים אלא הבנה ברמה אינטואיטיבית של צירוף שני שברים.

- כדי לענות על השאלה נדרשות: היכרות עם שברים בייצוג של מספר רציונאלי, יכולת ליצור ייצוג (או דימוי של ייצוג) של שני השברים ושל שלם, יכולת השוואה של הייצוג של שני השברים באופן יחסי לחלקים אחרים (למשל, לחצי ולשלם), והבנה מיהו השלם בסיטואציה.

  חשוב לשים לב שלמרות שהשאלה איננה שאלה בסיסית בשברים, ניתן לזהות בתשובות לשאלה הבנה או אי-הבנה של רעיונות מאד מרכזיים בהבנה הבסיסית של השבר הפשוט. למשל, יכולת ייצוג של שבר יחידה ושל שבר אחר, הבנה שאפשר לצרף שני שברים ולקבל יותר משלם, השלמה של חצי לשלם, השלמה של שני שליש לשלם, השוואה בין שברי יחידה (הנשענת על הבנה בסיסית של תכונות החילוק: ככל שמחלקים את השלם, או את הקבוצה השלמה ליותר חלקים, כל חלק קטן יותר).

- השאלה היא איננה שאלה שגרתית שנדרש בה ביצוע אלגוריתם מוכר. לכן, כדי לענות על השאלה יש להפעיל תובנה חשבונית שהיא מיומנות חשיבה ברמה גבוהה. כתיבת נימוק נחשבת גם היא לרמת חשיבה גבוהה . כאן, לא נעסוק באיכות הנימוק, אלא נשתמש בנימוקים כדי לנסות ולדעת על הליכי החשיבה של התלמיד.

אסטרטגיות צפויות לפתרון השאלה:

<u>בשקף 17</u> מוצגות שלוש תשובות נכונות שכל אחת מהן מציגה אסטרטגיה אחרת:

- בתשובה הראשונה התלמיד השווה לחצי את החלקים ששתי הבנות רוצות לתת לחברות. מרים רוצה לתת יותר מחצי ושרון בדיוק חצי. מאחר והוא יודע שהמשלים לשלם של חצי הוא חצי, ויש להניח שהוא יודע ששני שליש גדול מחצי- הוא מסיק שאי אפשר לתת יותר מחצי עוגה לאחר שלקחו כבר חצי ממנה.

- בתשובה השנייה התלמיד חישב כמה יישאר לאחר שמרים תיתן שני שליש מהעוגה לחברותיה- יישאר שליש. יש להניח שהתלמיד יודע שחצי גדול משליש, הוא הבין שאי אפשר לתת חצי עוגה לאחר שנותנים שני שליש ממנה.

- בתשובה השלישית התלמיד השתמש בתרגיל וחישב את סכום שני החלקים ששתי הבנות רוצות לתת לחברות. התוצאה גדולה מ- 1, (ה- 1 מייצג עבורו את כל העוגה), ולכן הוא הסיק שהמצב בלתי אפשרי.

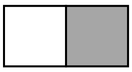
<u>בשקף 18</u> מוצגות שלוש תשובות שגויות. חשוב לתת למשתלמים זמן כדי לפענח את השגיאות.

- בתשובה הראשונה התלמיד השתמש בייצוג של שלם, חילק את השלם לשני חלקים שווים וסימן אחד מהם כחצי ששרון רוצה לתת לחברותיה. לאחר מכן הוא חילק את מה שנשאר לשלושה חלקים שווים וסימן שניים מהם (שני שליש) כחלקים שמרים רוצה לתת לחברותיה.

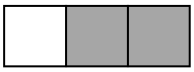
התלמיד עבד בצורה דינמית ולא הבין שהשלם לא השתנה ושתי הבנות צריכות לקחת את החלקים שהן רצות מאותה עוגה.

- בתשובה השנייה לא ברור איך התלמיד הגיע לכך שיישארו עוד שני חלקים. יתכן שהוא חיבר את שני השברים: $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$ בצורה שגויה על-ידי חיבור המונים וחיבור המכנים. כתוצאה מכך קיבל $\frac{3}{5}$ . כדי להשלים את $\frac{3}{5}$ לשלם יש להוסיף עוד שתי חמישיות. אם מאסטרטגיה זו נבעה הטעות, הרי שיש להניח שהתלמיד מבין את העקרונות הבסיסיים של שברים, אבל איננו מבין את המשמעות של חיבור שברים. ייצוג החיבור באמצעות אמצעי המחשה או ייצוג ויזואלי אחר עשוי להבהיר לתלמיד שיש לו טעות בדרך שהוא מחבר.

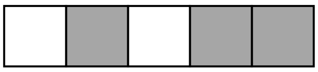
יתכן שמקור השגיאה הוא אחר- התלמיד קרא את השבר: $\frac{1}{2}$ כ- 1 מתוך 2,



ואת השבר $\frac{2}{3}$ כ- 2 מתוך 3.



הוא הבין שיש כאן סיטואציה של צרוף (חיבור) ולכן חיבר את שניהם וביחד קיבל 3 מתוך 5.



- בתשובה השלישית לא ברור מה האסטרטגיה של הפתרון. אולם, מ"השפה" ניתן להבין שהתלמיד לא התייחס לשני השברים במשמעות הנכונה שלהם. יש להניח שבשלב הראשון הוא הבין שאם מרים רוצה לתת לחברותיה $\frac{2}{3}$ הרי שיש לחלק את העוגה ל- 3 חלקים שווים. מאותו רגע ההסתכלות היא רק על המונים של השברים והם מציינים כמה "חתיכות" כל ילדה רוצה לתת לחברותיה. מרים רוצה לתת 2 חתיכות ושרון רוצה לתת חתיכה אחת. סכום ה"חתיכות" מסתדר לו עם החלוקה שביצע בעוגה.

## שברים פשוטים – שגיאות או תפיסות שגויות ?

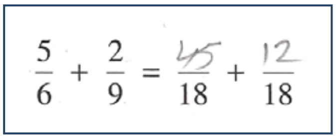
לפניכם מספר סריקות של תשובות של תלמידים לשאלות בשברים פשוטים.

א. נתחו את השגיאה והסבירו אותה במילים.

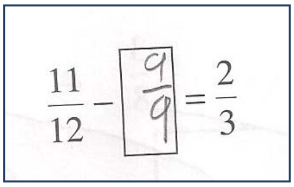
ב. המציאו שאלה דומה  ובצעו בה את אותה השגיאה שאיתרתם.

ג. כתבו מספר שאלות שהייתם מציגים לתלמיד ששגה, כדי לברר אם הוא פועל כל הזמן באותו דפוס שגוי שעשוי להצביע על תפיסה שגויה של מושג או מיומנות .

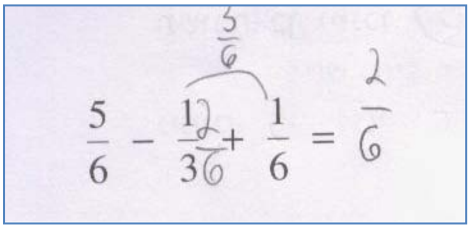
דוגמה מס' 1



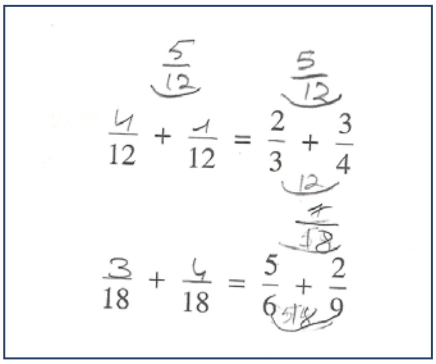

דוגמה מס' 2



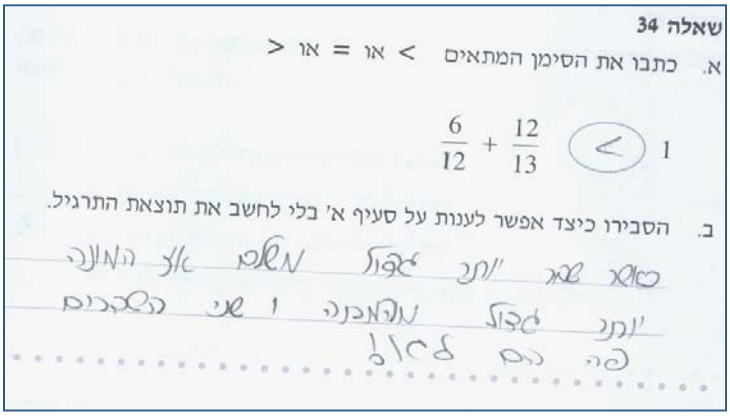

דוגמה מס' 3



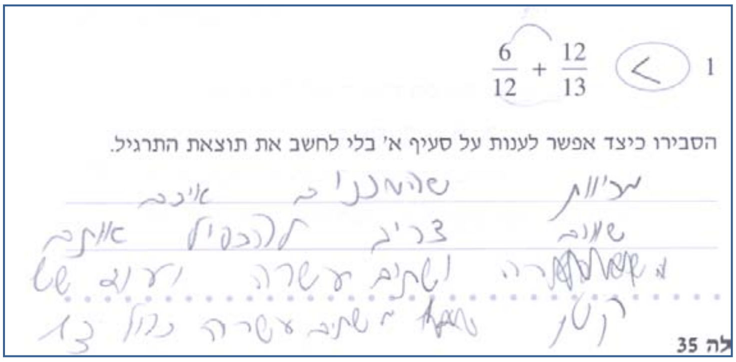

דוגמה מס' 4



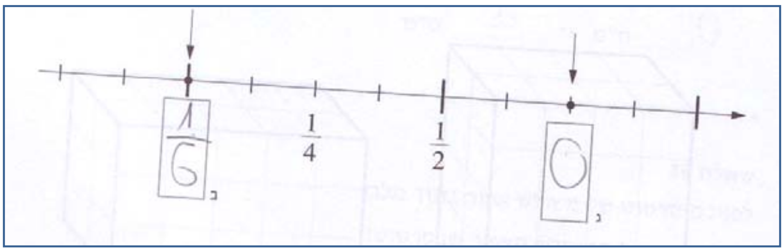

דוגמה מס' 5




דוגמה מס' 6



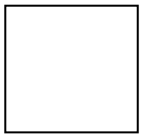

דוגמה מס' 7



## שברים פשוטים - שגיאה או תפיסה שגויה? (המשך)

חידוד משמעויות של: חלק מ.. חלק של.., הגדלה והקטנה של מונה, מכנה או של שניהם, משמעות השלם

**דף עבודה – משמעות השבר ומשמעות הכפל**

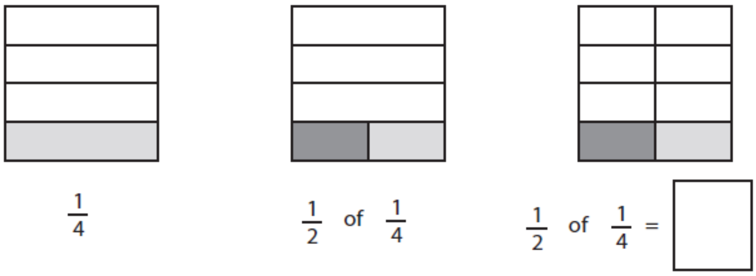
1. צבעו $\frac{1}{4}$ מהריבוע :  כתבו תרגיל / תרגילים שיבטאו את הפעולות שעשיתם.

2. חלקו את $\frac{1}{4}$ מהריבוע שצבעתם ל- 2 חלקים שווים.

   כתבו תרגיל / תרגילים שיבטאו את הפעולה שעשיתם.

3. להכנת עוגיות שוקולד צריך $\frac{1}{4}$ כוס קמח. אילנה רוצה להכין $\frac{1}{2}$ מהכמות של העוגיות.

   באיזה חלק של כוס קמח היא צריכה להשתמש?




   כתבו תרגיל/תרגילים המתאימים לפתרון השאלה.

4. להכנת עוגיות וניל צריך $\frac{3}{4}$ כוס קמח. דניאל רוצה להכין $\frac{1}{2}$ מהכמות של העוגיות.

   באיזה חלק של כוס קמח הוא צריך להשתמש? ( סרטטו ייצוג דומה לייצוג שבשאלה 3)

   כתבו תרגיל/תרגילים המתאימים לפתרון השאלה.

5. חצי משטח הגן הציבורי הוקצה לגידול פרחים. ב- $\frac{3}{4}$ של השטח המיועד לפרחים, שתלו איריסים.

   באיזה חלק של הגן הציבורי שתלו איריסים? (סרטטו ייצוג דומה לייצוג שבשאלה 3) כתבו תרגיל/תרגילים המתאימים לפתרון השאלה.

6. כתבו שאלות לתרגילים הבאים:

$\boxed{\frac{2}{5}\times 1}$ $\boxed{\frac{2}{5}\times 4}$ $\boxed{4\times\frac{2}{5}}$ $\boxed{\frac{2}{5}:4}$ $\boxed{\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}}$ $\boxed{\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}}$ $\boxed{4:\frac{2}{5}}$

**ניתוח המשימות מתוך דף העבודה:**

1. קיימות אפשרויות שונות לצביעת $\frac{1}{4}$ מהריבוע. בכל מקרה התהליך של הצביעה יכלול:

א. חלוקת הריבוע לארבעה חלקים שווים ב . צביעה של אחד מהם.

התרגילים האפשריים שיבטאו את שתי הפעולות שנעשו: 4 : 1 או ( על-פי הגדרת השבר שהכרנו במפגש הראשון) - $1\times\frac{1}{4}$, או פשוט: $\frac{1}{4}$.

למעשה, בפעולה שבוצעה מצאנו "חלק" של השלם, כאשר ה"שלם" הוא הריבוע. לכן, אפשר גם לבטא את הפעולה שנעשתה באמצעות התרגיל: $1\times\frac{1}{4}$. נשים לב שהתרגיל המבטא " רבע של 1" זהה לתרגיל המבטא 1 לחלק ל- 4 כפול 1. ( כלומר פעם אחת המנה של 1 לחלק 4)

2.כאשר מחלקים את ה- $\frac{1}{4}$ לשני חלקים שווים, למעשה מוצאים את ה"חצי של הרבע". לכן, גם כאן אפשר לבטא את הפעולה באמצעות התרגיל: $2 : \frac{1}{4}$ או באמצעות התרגיל: $\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$ שמבטא "חצי של רבע".

חשוב לשים לב שבשני המקרים מצאו חלק של שלם, חלק מהשלם. בשאלה 2 <u>השלם השתנה</u>, אבל עדיין התשובה הסופית מבוטאת במספר שמייצג חלק מהשלם הראשון.

3. במשימה 3 מוצגת למעשה אותה שאלה שהוצגה במשימה 2. אולם, כאן היא מוצגת בהקשר של מציאת חצי מהרבע, בעוד שבמשימה 2 ההקשר היה לחלק את הרבע לשני חלקים שווים.

נשים לב לאסטרטגיות שונות לחישוב $2 : \frac{1}{4}$.

- אפשר להשתמש בהיכרות האינטואיטיבית עם השברים ולדעת שאם מחלקים $\frac{1}{4}$ לשני חלקים שווים מקבלים $\frac{1}{8}$. אם ננסה להבין את משמעות כל הפעולות שנעשו, הרי שבהתחלה חילקנו את השלם ל- 4 חלקים שווים ועכשיו מחלקים כל חלק ל- 2 חלקים. כלומר, במכלול הפעולות חילקנו את השלם ל- 2 x 4 חלקים, ולכן מקבלים $\frac{1}{8}$, ומכאן גם פעולת כפל המכנים בתרגיל: $\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$.

- מאחר ויש רק רבע אחד, קיים קושי לחלק אותו ל- 2 קבוצות. במקרה זה, אפשר להרחיב את השבר על-ידי הגדלת המונה והמכנה פי 2. במקרה זה נקבל: $\frac{2}{8}:2=\frac{1}{8}$

פעולה זו אפשר להמחיש ביישומון. ההמחשה מדגישה את העובדה שחילוק הרבע ל- 2 הוא למעשה מציאת החצי של הרבע.

4. משימה 4 מאד דומה למשימה 3 , אלא שכאן השלם ה"חדש" איננו שבר יחידה. גם כאן התרגילים שיתאימו הם:

$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}$ שיבטא חישוב חצי של שלושה רבעים. או, $\frac{3}{4}:2$ שמבטא את משמעות מציאת החצי של שלם על-ידי חלוקתו ב- 2.

<u>חשוב לשים לב לשיטתיות ולהתפתחות בהצגת השאלות – אסטרטגיה פדגוגית שמאפשרת קישור לידע הקודם, ובניית הבנה המבוססת על הכללה והרחבה של ידע קודם.</u>

את המעבר מהתרגיל $\frac{3}{4}:2$ לתרגיל $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}$ אפשר להסביר גם על בסיס ההסבר של המעבר בין התרגילים הקודמים: $\frac{1}{4}:2$ ו- $\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$.

במקרה של חלוקת שבר יחידה ל- 2 קיבלנו שבר יחידה שהמכנה שלו גדול פי 2 מהמכנה של השבר שחילקו אותו ל- 2. כאשר מחלקים שלושה שברי יחידה כאלו הרי שמקבלים 3 פעמים את שבר היחידה שמכנהו גדול פי 2.

אפשר להמחיש זאת ביישומון וגם בעזרת התרגיל (לעשה שימוש בחוק הפילוג, כאשר "מפלגים" את המחולק. זו פעולה המוכרת משלמים):

$$\frac{3}{4}:2=(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}):2=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=3\times\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

כאשר רוצים לחלק את $\frac{3}{4}$ ל- 2 חלקים שווים (כלומר, כדי לבצע את התרגיל: $\frac{3}{4}:2$ ) קיים קושי לחלק את 3 ל- 2 . במקרה זה, נוכל שוב להשתמש באסטרטגיה של הרחבת השבר על-ידי כפל המונה והמכנה ב- 2 , ונקבל את התרגיל: $\frac{6}{8}:2=\frac{3}{8}$.

אפשר לראות שלשתי שיטות החישוב מתאים הייצוג בעזרת הסרטוט.

העבודה על שתי השיטות מחזקת את הרעיון ששני הביטויים "מציאת חצי של" וחילוק ב- 2 הם אותו דבר.

5.במשימה 5 מוצגת שאלה שהמספרים שלה זהים למספרים שהופיעו במשימה 4, אולם המשמעות שונה. בשאלה 5 צריך למצוא כמה הם $\frac{3}{4}$ של חצי, ואילו במשימה הקודמת חישבו מהו החצי מ- $\frac{3}{4}$.

למרות שהמשמעות היא שונה, והייצוג שונה בשלבים הראשונים שלו, הרי שלאחר ביצוע הפעולות מקבלים את אותו הייצוג.

המשמעות של חישוב חצי משלושה רבעים ושל חישוב שלושה רבעים מחצי היא שונה. אולם, בשל חוק החילוף של הכפל החישוב זהה.

ננסה לבחון את המשמעויות השונות:

חצי של שלושה רבעים הוא חילוק שלושה רבעים ל- 2 ולקיחת חלק אחד מהחלקים שהתקבלו.

במקרה זה ה- $\frac{3}{4}$ הוא ה"שלם" שיש לו גם כינוי. במקרה של שאלה 4 מדובר על $\frac{3}{4}$ של כוס קמח. לעומת זאת ה- $\frac{1}{2}$ הוא "גורם" שמציין פי כמה כופלים (אופרטור). על-פי הגדרת השבר הפעולה שתתבצע כאן תהיה חילוק ב- 2 בלבד.

כאשר מדובר על שלושה רבעים של חצי הוא חילוק חצי ל-3 ולקיחת שלושה חלקים מאלו שהתקבלו. במקרה זה ה- $\frac{1}{2}$ הוא ה"שלם" שיש לו כינוי. במקרה של שאלה 5 הוא $\frac{1}{2}$ השטח של גן ציבורי. לעומת זאת ה- $\frac{3}{4}$ הוא "גורם" שמציין פי כמה כופלים (אופרטור). על-פי הגדרת השבר הפעולה שתתבצע כאן תהיה חילוק ב- 4 ולאחר מכן כפל ב- 3.

נוכל להצדיק את החוק החילוף על ידי הצגת השוויון שבין שני התרגילים:

$$\frac{1}{2} : 4 \times 3 = \frac{1}{8} \times 3 = \frac{3}{8} \quad \text{ו-} \quad \frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{8}$$

כלומר, חישוב חצי של שלושה רבעים הוא בדיוק אותו דבר כמו חישוב שלושה רבעים של חצי.

6. משימה 6 נועדה כדי לחדד את מגוון המשמעויות המילוליות שאפשר לייחס לכל תרגיל. במקרים רבים מבחינה מתמטית זו אותה משמעת.

- התרגיל $1\times\frac{2}{5}$ יכול לבטא פעם אחת $\frac{2}{5}$. במקרה זה ל- $\frac{2}{5}$ צריך להיות כינוי. הוא צריך להיות $\frac{2}{5}$ של שלם כלשהו.

  התרגיל יכול גם לייצג $\frac{2}{5}$ של 1. במקרה זה השלם (1) צריך להיות עם כינוי.

- התרגיל $4\times\frac{2}{5}$ יכול לייצג $\frac{2}{5}$ של 4 . במקרה זה ה"שלם" הוא 4 וצריך להיות לו כינוי.

  התרגיל גם יכול לייצג 4 פעמים $\frac{2}{5}$. במקרה זה ל- $\frac{2}{5}$ צריך להיות כינוי.

<u>הערה:</u> בגישות שונות של הוראה נוהגים לציין מקום קבוע למספר שאין לו כינוי והוא מציין את הגורם המכפיל. אסטרטגיה זו יכולה להקל על תלמידים, בתנאי שלצורך החישובים הם מודעים לאפשרות של חילוף בכפל.

חשוב לציין שבעוד שבארץ נהוג לכתוב את הגורם שמציין פי כמה כופלים כמספר הראשון משמאל, הרי שביפן כותבים אותו דווקא כמספר השני בתרגיל.

- התרגיל $\frac{2}{5}\times 4$ יקבל את אותן המשמעויות שהוצגו בתרגיל הקודם.

- תרגיל החילוק $\frac{2}{5}:4$ יכול לבטא שאלת חילוק לחלקים. כלומר, חלוקת $\frac{2}{5}$ (שיש לו כינוי והוא מייצג חלק של שלם כלשהו) ל- 4 חלקים שווים. למנה שתתקבל יהיה אותו כינוי שהיה ל- $\frac{2}{5}$.

  תרגיל זה יכול גם לבטא שאלת חילוק להכלה. כלומר, כמה פעמים 4 "נכנס" ב- $\frac{2}{5}$. במקרה זה גם ל- 4 וגם ל- $\frac{2}{5}$ יש אותו כינוי- שניהם מייצגים חלק ופעמים של "משהו". למשל- כמה פעמים "נכנס" 4 ג' ב- $\frac{2}{5}$ג'. משמעות זו מאד לא אינטואיטיבית מאחר שהתשובה שתתקבל תהיה מספר פעמים שאיננו שלם (מספר ללא כינוי).

- התרגיל $\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}$ יכול לבטא את המשמעות של $\frac{2}{5}$ מתוך רבע (של שלם שיש לו כינוי), יכול לבטא את המשמעות של $\frac{1}{4}$ מתוך שלם שהוא $\frac{2}{5}$ של "משהו", או של $\frac{2}{5}$ של "משהו" שחולק ל- 4

חלקים שווים. חשוב לזכור שהפתרון שיתקבל יבטא חלק מהשלם הראשון. כלומר, מהשלם שנתון שבתרגיל מיוצג $\frac{2}{5}$ ממנו.

- התרגיל $\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}$ יכול לבטא את המשמעות של $\frac{2}{5}$ של "שלם" שהוא $\frac{3}{4}$ של שלם אחר (שיש לו כינוי), או את המשמעות של $\frac{3}{4}$ משלם שהוא- $\frac{2}{5}$ של שלם אחר. גם כאן, חשוב לזכור שהפתרון יבטא חלק מהשלם האחר.

- התרגיל $\frac{2}{5}:4$ מבטא את המשמעות "כמה פעמים $\frac{2}{5}$ "נכנס" ב- 4.

בהקשר לתרגיל זה חשוב להזכיר שתמיד אפשר לבצע חילוק שברים על-ידי חילוק המונה במונה והמכנה במכנה. לנוחיות כדאי להביא את שני השברים למכנים זהים על-ידי הרחבה. לדוגמה:

$$4:\frac{2}{5}=\frac{4}{1}:\frac{2}{5}=\frac{20}{5}:\frac{2}{5}=10$$

**צפו בסרטון של חלק מההרצאה של פרופ' רון אהרוני עד הדקה 13:25**

http://video.cet.ac.il/VideoPlayer.aspx?xmlConfigPath=Mafilim/2012/math/HORAAT_SHVARIM_HELEK_4_mdi.xml

חשוב לתכנן מראש משימות/ שאלות שיוכלו להוביל במהלך מפגש העבודה לתובנה אם לתלמיד יש תפיסה שגויה באשר לחיבור שברים בעלי מכנים שונים או לא. במהלך האיתור מומלץ להציג משימות שאינן רק "בוחנות", אלא גם מהוות גשר להבנה. בדרך זו המורה גם יוכל ביתר קלות להבין את תהליכי החשיבה של התלמיד.

## ניהול מפגש ודיון משמעותי עם תלמידים מתקשים  ושאלות בשברים

קישור לסרטון:

http://video.cet.ac.il/VideoPlayer.aspx?xmlConfigPath=Math/Lessons/Lora_ShvarimPshutim_mdi.xml

בסרטון המורה דואגת לתת משובים חיוביים לתלמידים. אולם, המשובים מגיעים מהר מאד ומהווים מעין

"חתימה" או "סגירה" של אותה שאלה. מתן המשוב החיובי אמנם נעים ומחזק את התלמידים, אךעולות השאלות:

- מה קורה לתלמיד שלא הבין את התשובה שניתנה? האם המשוב הזה, שניתן לאחד מחבריו, עוזר לו? מה קורה לשאר התלמידים?
- האם הסיבה  לתשובה שניתנה הודגשה והוצפה? האם העיקרון המתמטי נשמע בכיתה?

כתחליף למשובים הנעימים של המורה מומלץ להגיב  באמצעות שאלות. בין השאר שאלות שגורמות לערעור הביטחון של התלמידים בתשובה, שאלות שמעלות את הצורך להצדיק את התשובה שניתנה.

- אפשר לבקש כתחליף מהתלמיד שענה או ממישהו אחר להמחיש ולהסביר.
- אפשר לבקש להציג דוגמאות לעקרונות מתמטיים ולכללים שמתקיימים גם בקבוצות מספרים אחרות , כפי שעשתה המורה במקרה של חילוק ב-1.

<u>תגובת המורה לתשובות שגויות -</u> בסרטון המורה מתקנת את התלמיד. אמנם השגיאה שהוצגה כנראה מקורה בהיסח הדעת של התלמיד, אך במקרים של שגיאות רצוי בדרך כלל להפנות את תשומת לב התלמידים לתשובה  על-ידי שאילת שאלות כמו " מה דעתכם?"

בהמשך,

- אפשר לבקש מתלמיד אחר שיסביר מדוע הוא חושב שהייתה טעות. אפשר גם לבקש מהתלמיד ששגה שיסביר את הטעות שלו ( כמובן, לאחר שהבין אותה)
- אפשר לבקש מהתלמידים לחבר תרגיל שיתאים לתשובה השגויה.  במקרה שהוצג בסרטון  אפשר היה לבקש מהתלמיד שיאמר את התרגיל שמתאים לתשובה שנתן, ולכתוב אותו על הלוח כדי שגם באופן חזותי התלמידים יראו את ההבדל בין החילוק לחיסור.

<u>תגובת המורה לעקרונות מתמטיים</u> בסרטון, רק במקרה אחד המורה הגיבה לעקרון וביקשה את ההכללה שלו ודוגמאות נוספות מתחומי מספרים שונים. למעשה, הוצפו כאן שני עקרונות-

האחד חילוק ב- 1 , והשני רעיון החלת חוקים שמתקיימים בשלמים על עולם מספרים חדש . במקרה זה החלת החוק של חילוק ב- 1 גם בשברים.

זו דוגמה לדרך להצפת הרעיונות המתמטיים, וכדאי לעשות זאת עם כל הרעיונות.

אם המורה הייתה חוזרת על הרעיונות, או מבקשת מתלמיד אחר שידגיש כל רעיון שעלה, ובמקביל, הייתה גם מרכזת את העקרונות כתובים על הלוח, היה מתקבל בסופו של דבר ריכוז של עקרונות חשובים הקשורים למשמעויות שונות של חילוק (לחלקים, להכלה) ושל חילוק וכפל ב- 1. לכל אחד מהעקרונות האלו אפשר היה לצרף בעל-פה דוגמאות מתחום המספרים השלמים ומתחום השברים.

פעולות כאלו היו מציפות ומעלות לתודעה את הרעיונות החשובים, את הקשר שבין תחומי המספרים ואת החלת החוקים והמשמעויות כאשר מרחיבים את עולם המספרים.

כמו כן הריכוז על הלוח היה ויזואלי והלמידה הייתה הן בערוץ השמיעתי והן בערוץ החזותי.

אסטרטגיות אלו של ניהול דיון מתאימות גם לתלמידים חזקים. יש להניח שכל אלו לא נעשו כי הכיתה חזקה והמורה לא הרגישה שיש צורך לחזר על העקרונות, כי היא ראתה שהתלמידים פועלים לפיהם. אין ספק שבכיתה הטרוגנית ממוצעת, ובמיוחד בכיתות שיש בהן תלמידים מתקשים- ביצוע פעולות כאלו יסייע להבנה של כל התלמידים, ויהפוך את הלמידה ללמידה דיפרנציאלית.

במקרים מסוימים אפשר ורצוי גם להדגים את הרעיונות ואת הפתרון באמצעות המחשה ויזואלית.

<u>ניתוב השיחה מדו-שיח לרב-שיח</u> השיחה שהתנהלה הייתה למעשה "שיחת פינג פונג". המורה_נתנה רשות דיבור, שמעה תשובה, הגיבה או במשוב או בשאלה. כאשר נענתה הגיבה במשוב ועברה לתלמיד אחר. שאר התלמידים לא היו מעורבים בשיחה.

כתחליף,

- אפשר לבקש מהתלמידים שיגיבו לתשובות.
- אפשר לבקש מתלמידים שיחזרו על ההסבר שנתן תלמיד, או לשאול אם הם הבינו ולבקש שיסבירו.
- אפשר גם לבקש מתלמיד להדגים באמצעות המחשה את התשובה שתלמיד אחר נתן.
- אפשר מראש, כאשר תלמיד מסביר את האסטרטגיה שלו לבקש מילד אחד או שניים להציג את מה שהתלמיד מסביר באמצעות ייצוגים על הלוח. לאחר מכן אפשר לקיים שיחה על הקשר שבין הייצוגים לבין ההסבר שהתלמיד נתן.

שיחות כאלו מקדמות מאד את ההבנה המושגית.

- אפשר גם לתת לתלמיד שענה לבחור תלמיד אחר שיגיב לתשובה שלו. (רשות דיבור שעוברת מאחד לשני ולא מהמורה לתלמיד)

כאמור, יש להניח שכל המרכיבים האלו לא עלו כי בכיתה הספציפית הזו אין תלמידים מתקשים, ומטרת השיחה הייתה כנראה רק הקדמה לפעילות נוספת.

קראו את העקרונות המוצגים בשקף 4. (קישור למצגת 4)

מבין העקרונות האלו חשוב להדגיש את החשיבות של:

- שמירת מצב של ערנות, התעניינות ושיחה שיתופית בין כל התלמידים השותפים בשיחה

- הצפה בדרך מפורשת של קשרים שבין ייצוגים שונים. (באמצעות שאלות כמו- איך רואים את .... בייצוג השני?, מה הקשר בין אלמנט אחד בייצוג אחד לאלמנט אחר בייצוג שני?

- הצפה מפורשת של עקרונות מתמטיים, יצירת קישוריות ומתן דוגמאות מתוך תחומי מספרים שונים, הצגת דוגמאות מגוונות וניסוח מפורש בשפה מובנת לילדים. ( חשוב להימנע מ" שינון" חוקים, כללים או הקפדת יתר על שימוש במונחים או ניסוחים מתמטיים)

- הצפת העקרונות הן על ידי הילדים והן על ידי המורה. בין השאר, על-ידי פרשנות שהתלמידים עושים לדברי חבריהם.

להלן דף התרגילים. יש להניח שהתרגילים שייבחרו יהיו: ב, ד, ו, ז, ט, יב, יג, יד.

• העתיקו למחברתכם רק את התרגילים שאתם יודעים לפתור **בלי** לכפול במספר ההפוך ופתרו אותם.

| | |
|---|---|
| ח) $\frac{2}{3} : \frac{3}{5} =$ | א) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} =$ |
| ט) $2 : 9 =$ | ב) $\frac{7}{9} : \frac{1}{9} =$ |
| י) $1\frac{1}{4} : 3 =$ | ג) $1 : \frac{3}{4} =$ |
| יא) $4 : \frac{5}{4} =$ | ד) $\frac{6}{7} : 6 =$ |
| יב) $1\frac{1}{2} : 3 =$ | ה) $\frac{5}{3} : \frac{2}{9} =$ |
| יג) $1\frac{3}{5} : \frac{2}{5} =$ | ו) $3 : 1\frac{1}{2} =$ |
| יד) $\frac{8}{9} : 1 =$ | ז) $\frac{7}{10} : \frac{7}{10} =$ |

• פתרו את שאר התרגילים בדרך של כפל במספר ההפוך.

<u>הרעיונות המתמטיים בתרגילים שנבחרו הם:</u>

תרגיל ב – חילוק להכלה , משמעות של המכנה ככינוי לשבר וכמציין לכמה חלקים חילקו את השלם.

תרגיל ד – חילוק לחלקים, משמעות של המכנה ככינוי לשבר וכמציין לכמה חלקים חילקו את השלם, משמעות המונה כתוצאת חיבור חוזר, מנייה חוזרת של יחידות שוות.

תרגיל ו – חילוק להכלה, מספר מעורב, הכלה של שבר בשלם ובמספר מעורב

תרגיל ז – חילוק מספר בעצמו. החלת חוקים ותכונות של פעולות על השברים ( הרחבה משלמים)

תרגיל ט – משמעות השבר כמנת חילוק. אפשר להציג שני שלמים ולחלק אותם ל-9 חלקים שווים. ( הדרך היחידה היא לחלק כל אחד מהם ל-9 חלקים שווים) ולחבר . אפשר להציג את $\frac{2}{9}=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{1}{9}\times 2$ ובדרך זו להציג את משמעות החילוק של שלם ב-9 , המשמעות של שבר יחידה, של חיבור שברי יחידה, של המונה ושל כפל שברים בשלם.

תרגיל יב – חילוק לחלקים, מספר מעורב, שבר שהמונה שלו גדול מהמכנה

תרגיל יג – חילוק להכלה, משמעות המכנה ככינוי, מספר מעורב, שבר שהמונה גדול מהמכנה

תרגיל יד- חילוק ב- 1 , החלת חוקים ותכונות של פעולות על השברים ( הרחבה משלמים)

לצפייה בשיחה פרטנית  עם תלמידה על שברים:

השבר כחלק משלם:

http://www3.cet.ac.il/WindowedPlayer.aspx?sVidPath=http://storage.cet.ac.il/video/Perah/Math/ShevetHelekMiShalem.flv

השבר כחלק מכמות:

http://www3.cet.ac.il/WindowedPlayer.aspx?sVidPath=http://storage.cet.ac.il/video/Perah/Math/ShevetHelekMiKamut.flv

חשוב לשים לב בסרטונים למרכיבים הבאים:

הסרטון: **השבר כחלק משלם**

- בקשת הסבר מילולי מהתלמידה תוך כדי עבודה – להמללה יש  חשיבות רבה להעלאה למודעות של התלמיד של מה שהוא עושה. מסייע בהמשגה. מסייע גם למורה להבין את הליך החשיבה של התלמידה.

- הקפדה על המללה נכונה, עד כדי תיקון והשלמת מילים במשפטים – מומלץ להעלות את השאלה - האם יש צורך בהקפדה כזו? האם אי אפשר להסתפק באמירה פעם אחת שמדובר על חלקים שווים ושידוע שבחילוק מדברים על חלקים שווים?  הקפדת יתר עשויה גם לגרום לחשש מהמללה, ולמעשה בהרבה מקרים אנחנו לא אומרים את " כל האמת" . למשל, כאשר מדברים על רצף של מספרים שלמים לא מציינים כל פעם שמדובר על שלמים.

- לפני כל פעילות שאילת השאלה: "מה את יכולה לומר על השבר "– מאפשר  למורה ללמוד עוד על ההבנה והידע של התלמיד. מצד שני מחנך להסתכלות " על", לבחינת המצב הכללי במקום לעבוד על-פי אלגוריתם מכוון. היכולת להסתכל  במבט " על" היא יכולת מתמטית חשובה מאד שנדרשת באלגברה ובעוד תחומים מתמטיים.

( בהקשר לזה אפשר  להציע למשתלמים את ה" משחק" של " לא תשובה בבקשה" – לפני מתן פתרון לכל תרגיל שנרשם על הלוח לבקש מהתלמידים לומר משהו על התרגיל אבל " לא תשובה בבקשה".

את המשחק המציאה והפעילה מירב אמסלם (מדריכה ממחוז חיפה) כבר בכיתות א'  ואפשר היה לראות ממחברות התלמידים ומהשיחות בכיתה את ההשפעה החיובית שלו ואת התפתחות היכולת של התלמידים לראות  תופעות ועקרונות מתמטיים מעבר למתן פתרון.

- ההקנייה נעשית בדרך כלל באמצעות שאלות
- במהלך העבודה המורה מאד מכוונת ומנחה לכיוון עבודה מאד מסוים.

חשוב להעלות את השאלה האם זה הכרחי? במה זה תורם? ( חשוב להבדיל בין ילדים

שלא יפעלו ללא הכוונה כזו , לבין ילדים שעשויים לפעול לבד ואולי בדרכים אחרות)

- ההבנייה של המפגש . מתן קביים וכלי עבודה לפני הצגת השאלה המרכזית .

אפשר היה גם לתכנן את המפגש הפוך- להתחיל מהשאלה המרכזית ולאפשר לתלמידה לחשוב על אסטרטגיות לפתרון . כפי שהמפגש תוכנן ונעשה אסטרטגיה הפתרון ( סרטוט של השברים) נעשתה על-ידי המורה.

יש להניח שלבחירה לפעול בדרך שנבחרה יש רציונאל וסיבה. בכל תכנון על המורה לשקול את כל האופציות ולהחליט מה יותר מתאים לתלמידים.

הסרטון: **השבר כחלק מכמות**

- בתחילת המפגש הוצגה משימה של ניחוש ולסוכריות שהיו במעטפה הוצג ייצוג נוסף בצורת העיגולים. מה המטרה ? האם זה תרם?

לעיתים משימה כזו מעוררת, מוסיפה עניין, מתח ורצון לפתור. אולם, לעיתים היא מכניסה רעשים ומסבה את תשומת הלב.

במקרה זה קשה מאד לראות שנוצר קישור בין המשימה הראשונה לבין המתמטיקה שנעשתהלאחר מכן. הקישור הוא רק סיפורי ולא ברור מה הערך המתמטי שלו. יתכן אפילו שהייצוגים השונים התחילו לבלבל את הילדה והמורה הבחינה בכך ונמנעה בהמשך מקישור שבין העיגולים לסוכריות שבשקית.

- ההכוונה של המורה להמחשה, לעבודה בדרך מאד מסויימת- גם כשהתלמידה הציגה פתרון. נשאלות השאלות:

האם הנחיה כל כך מכוונת תורמת ?

- באיזו מידה צריך להתעקש שתלמיד יסביר ( לפעמים בדרך של המורה) גם אם הציג פתרון נכון? מה החלופות האפשריות? כעיקרון צריך להקפיד מאד על הקשבה ומתן הזדמנות לתלמיד לעלות את ההסבר ואת הדרך שלו. גם אם זה גוזל זמן

- האם  שאלת ההשוואה בין שני שליש וארבע שישיות ( בייצוג של הסוכריות- מוצגת בשקף 6) התאימה לשלב  הלמידה שהמפגש התקיים?

ניתן לראות  מדרך הפתרון ש" ברחו" קצת  מהעובדה שבשני המקרים התקבלה אותה כמות. התלמידה והמורה טענו שהם יודעים שהשברים שווים ולכן הכמויות צריכות להיות שוות. לא היתה התיחסות לכך שבגלל שהכמויות שוות השברים שווים, אלא ההפך.  למעשה המתמטיקה הסבירה את ההמחשה ולא ההמחשה את המתמטיקה.

## עוד זווית על הוראה מתקנת והתאמת פעילויות ושאלות לדיון במפגש פרטני

המושג "הוראה מתקנת"  היה שגור במהלך הרבה שנים במערכת החינוך. ההתייחסות לדרך הוראה זו אפיינה התייחסות לילדים שאינם מאובחנים או "מאותגרים" ( כפי שנהוג היום לכנות אותם) .

כאשר מתייחסים להוראה מתקנת יש להתייחס לשלושה מרכיבים שהם שונים מההוראה הרגילה בכיתה:

1. ארגון הלומדים הוא בקבוצה אחת קטנה, או פרטני.
2. האוכלוסייה היא של תלמידים שמוגדרים כתלמידים מתקשים, או תלמידים שהתגלה אצלם קושי בהבנת תכנים ומושגים מסוימים.
3. החומר הנלמד איננו נלמד בפעם הראשונה.

במערכת החינוך בארץ ובעולם אין הגדרות קבועות ל"תלמיד מתקשה". הגורמים המשפיעים על כך שתלמיד יהיה מתקשה הם רבים, חלקם מאד טעונים (כמו סביבה סוציואקונומית, סביבה שלא אפשרה לתלמיד בעל יכולות תקינות  ללמוד, הוראה שלא התאימה לתלמיד ועוד). לכן, מאד קשה להגדיר בצורה כמותית מי הוא תלמיד מתקשה.

למרות זאת, במחקרים שונים וגם בתוכניות לקידום שונות שהופעלו במקומות שונים, נעשו ניסיונות להגדיר מהו תלמיד מתקשה. למרות זאת,  אין הגדרה קבועה שמשתמשים בה בכל המקומות.

בדרך כלל מדובר על תלמידים שהפער בינם לבין הנדרש בגילם הוא פער של כשנתיים. במחקרים ארוכי טווח שנערכו (בין השאר בבית החולים שערי צדק בירושלים, על-ידי פרופ' רות שלו וצוותה, נמצא שתלמידים רבים שהוגדרו כבעלי פער של יותר משנתיים, הם תלמידים תקינים לחלוטין מבחינת יכולות הלמידה והאינטליגנציה, ובהוראה מתאימה הם הצליחו להשלים במהירות את הפערים שהיו להם. מכאן, שההגדרה הזו לתלמידים מתקשים מוטלת בספק. יחד עם זאת, אין ספק שתלמיד כזה, שיש לו פער של

כשנתיים זקוק להתערבות ולתמיכה כדי להשלים את הפער. אחרת, מהר מאד הוא עשוי להיות מוגדר כבעל קשיים, ולפתח גם קשיים התנהגותיים שעשויים להשפיע על התפקוד הכולל שלו.

חשוב לזכור שבאמצעות ההוראה המתקנת אפשר לעבוד עם ילדים שהם תקינים ברמת האינטליגנציה שלהם, ואם יש להם ליקויים, הרי שאלו ליקויים הניתנים לגישור על ידי הוראה מתאימה במסגרת סטנדרטית, שאיננה מותאמת לסוגים שונים של חינוך מיוחד.

<u>דפוסי התנהגות של תלמידים מתקשים</u>

למרות שמדובר בדרך כלל בתלמידים בעלי אינטליגנציה תקינה, לתלמידים שאותרו אצלם קשיים שהם לא נקודתיים, יש דפוסי התנהגות שחשוב שהמורה יכיר.

- הם נוטים ל"הסתיר" את אי ההבנה שלהם ומתנהגים כאילו הם מבינים הכל. בשיחות איתם הם עשויים להפגין שהכל מובן להם. כל מגע עם חומר ישן שלמדו (ולא הבינו) גורר אצלם עלבון ואי בטחון ולכן, הם יטענו שהם כבר למדו את החומר.

  מסיבה זו חשוב מאד לזמן אותם עם מטלות לא מוכרות שדורשות יישום ידע, ולא מטלות שהן שחזור דרך פתרון שאיננו דורש הבנה.

  בדרך כלל מורים נמנעים מלהגיש לתלמידים כאלו משימות ברמת יישום ו/או רמות חשיבה גבוהות, כי הם מפחדים לתסכל אותם. חשוב להדגיש ששחזור " איך מבצעים" איננו משקף הבנה, ידע או יכולת ביצוע . מרבית בני האדם מתקשים לשחזר ידע כזה כשהיא איננה בסמוך למודל החיקוי, אם אין מאחריו הבנה.

  יתרה מכך, כאשר תלמיד מתקשה נפגש שוב ושוב עם משימה שכבר לא הצליח בה- הוא מאבד את הרצון ואת האמונה שיצליח ללמוד לבצע אותה.

- חלקם איבדו את הביטחון העצמי ואת האמונה שהם יכולים להבין. לכן, הם עשויים לחסום את עצמם ולא לנסות להבין. בנוסף, הם עשויים לכנות את עצמם בכינויים שמביעים את הדימוי העצמי הנמוך שיש להם לגבי היכולת ללמוד את הנושאים המתמטיים שבהם נכשלו.

- בשל חוסר הביטחון הם עשויים להיאחז בכוח ב"מקום בו הם נמצאים" והם יסרבו לפעול בכלים ובאמצעים שנחשבים עבורם כעין "קביים שמיועדים רק לחלשים". למשל, שימוש בהמחשות, סרטוטים סכמטיים או כתיבת דרך הפתרון. לעיתים, השימוש בכלים אלו נחשב בסביבתם כמיועד לתלמידים חלשים או קטנים, ולכן הם ימנעו מלהשתמש בהם.

- כתוצאה מחוסר ההבנה של מושגים ותהליכים מתמטיים, התלמידים מאמצים לפעמים חוקים וכללים שהם אינם מבינים ומחילים אותם במקומות שגויים. גישה זו משקפת את הקשיחות, את

חוסר המוכנות לחשוב ולהתמודד עם מצבים חדשים ואת הפחד מכישלון או ממצב לא ברור ולא בטוח.

- חלק מהילדים שנתקלים בכישלונות במתמטיקה שוב ושוב, מפתחים חרדת מתמטיקה. לכן, חשוב ליצור סביבה אוהדת ותומכת ולבנות את ההבנה שלב אחר שלב כשהיא מבוססת על מה שהילד יודע ובטוח בו.

העבודה בקבוצה קטנה ותומכת, שיש בה עוד ילדים שמתקשים עשויה מאד לתמוך ביכולת של התלמידים האלו לחוות הרגשת הצלחה והבנה ולהשתחרר מהחרדה שיש להם מהמקצוע.

בשל מאפייני ההתנהגות האלו חשוב מאד בהוראה המתקנת:

1. למצוא דרך הוראה לנושא שהיא חדשה, איננה משחזרת את הדרך שהתלמיד כבר נכשל בה, ונשענת על גופי ידע שהתלמיד שולט בהם.
2. לזהות את הידע של התלמיד בנושא עליו עובדים, או בנושא שהוא תשתית לחומר שעליו צריך לעבוד. לאחר הזיהוי, לבנות תוכנית שהיא מתבססת ומקושרת באופן מוצהר וגלוי לעקרונות המתמטיים שכבר הובנו והתלמיד שולט בהם.
3. להמעיט במתן משובים שיאפשרו לתלמיד להגיע להחלטות שהוא יודע או שאיננו יודע. על השיח להתמקד בניתוח החשיבה, האסטרטגיה והתשובה של התלמיד, ולא בנכונות או האי-נכונות של התשובה.

ההתמקדות בתשובה ובדרכי החשיבה תפתח פתח לשימוש בסרטוטי עזר ובהמחשה, כי הם יהיו נחוצים כדי להסביר את החשיבה (ולא כדי שהילד יבין). תוך כדי העבודה התלמיד יוכל בעצמו לשפוט ולהבין אם פעל בכיוון נכון או לא. המורה אמנם יסייע לו על ידי שאלות להגיע לתובנה זו, אבל ההכרה בכך ששגה תהיה שלו ולא תנבע משיפוט של המורה.

<u>ההוראה המתקנת במתמטיקה</u>

מכל הגורמים שהוזכרו לעיל עולה ההוראה המתקנת במתמטיקה צריכה להיות מצד אחד שונה מהוראה רגילה, ומאידך צריכה לכלול את אסטרטגיות ההוראה הטובות שמשתמשים בהן גם בהוראה של כיתה שלמה.

צפייה בקטע משיעור בכיתה ה'.

צפו בדקות: 5:30 - 18:10 מהסרט:

http://video.cet.ac.il/VideoPlayer.aspx?xmlConfigPath=mafilim/2012/Perach/Math_Ashdod_mdi.xml

מומלץ לשים לב למרכיבים הבאים שעלו בסרט:

- החזרה כמה פעמים על האסטרטגיה שכל תלמיד מציג, כל פעם מעט אחרת.
- רמת הפתיחות הגבוהה של המשימה שניתנה לכיתה.
- המשימה (והפתיח שלפניה) שמלווים בעשייה פעלתנית.
- האפשרות (עם הרבה סבלנות) להציג אסטרטגיות שונות שהשתמשו בהן התלמידים כדי להגיע לתשובה.
- הכתיבה במספרים שמלווה את הצגת האסטרטגיות השונות והפתרונות השונים.

חשוב להדגיש שהשילוב בין הייצוגים השונים הוא מרכיב חשוב מאד בלמידה.

## בניית מסלול עבודה עם תלמידים על בסיס ניתוח ראיון, עבודות בכתב והתאמה לחבילת ידע

ניתוח ראיון עם קבוצת תלמידים והעלאת השערות באשר לידע ולקשיים של התלמידים המרואיינים ומיפויים באמצעות "חבילת ידע".

העקרונות החשובים של ניתוח הראיון מופיעים בשקפים 1- 7 . (קישור למצגת 6)

1. בשאלה שהוצגה לכיתה (ההשוואה בין חצי ל- ארבע שישיות) אפשר להגיע לתשובה נכונה מסיבה לא נכונה- כי 4 גדול מ- 1 ו- 6 גדול מ- 2. לכן, בשאלות מסוג זה יש חשיבות רבה לשיחה עם הילדים על מנת להבין את דרך חשיבתם.

2. השאלה ניתנה לתלמידים בשלב שבו למדו לזהות את השבר על פי המכנה, את מספר החלקים על-פי המונה, והם התנסו בהשוואת שברים בעזרת השוואה ישירה.

במסגרת ההשוואה התלמידים גם הכירו את הרעיון שניתן לייצג את אותו שבר בדרכים שונות. כלומר, ניתן לצפות שחלקם גם זוכרים שחצי שווה לשלוש שישיות.

3. מהתשובות הראשונות של התלמידים אפשר לזהות בצורה מאד ברורה:

א. קיים אצלם דימוי מאד חזק של חצי (או שעבדו עם ההמחשה). הם יודעים שההשוואה היא השוואה ישירה של שטחים, ולכן מדברים על החלק "הכי גדול" ועל כך שחצי יותר גדול.

ב. אפשר לזהות את ההיאחזות ב"כלל" שגוי לפיו ככל שהמספר שבמכנה יותר גדול, כך השבר יהיה יותר קטן והפוך. כלומר, בשברים הכל "הפוך" לעומת המספרים השלמים.

4. בתחילת הראיון נראה שהילדים (או חלקם) ממקדים את ההסתכלות במכנה, שמראה להם לכמה חלקים חילקו את העיגול. על פי המספר שבמכנה הם בוחרים את העיגול המחולק המתאים, כשהם לא בטוחים שצריך לקחת רק חלק אחד. כלומר, ההסתכלות על המונה היא שולית, ולא בטוח שהם מבינים את תפקיד המונה. באופן כללי, אפשר לראות שעדיין קיים אצל תלמידים אלו קושי לראות את שני המספרים שבכתיבת השבר כמספר אחד המייצג שתי פעולות – האחת חלוקת השלם למספר חלקים שווים, והשנייה מניית חלקים שווים.

גם הרעיון של חלוקה לחלקים שווים לא "יושב" אצל כולם.

5. ניתן לראות שהמורה הבחינה בחוסר הביטחון בנקודות אלו. חשוב מאד לדון עם המשתלמים על הדרך שבה המורה נקטה. אפשר לשאול את המשתלמים:

- מה המורה הבחינה בשלב זה של הראיון?
- מה הייתה האסטרטגיה שהיא נקטה בה?

חשוב מאד לשים לב שהמורה מציגה בפני התלמידים שאלה "מכשילה" שאמורה לערער אצלם את התפיסה המקובעת רק במספר החלקים. המורה לא מסבירה, לא מראה מצב שבו יש שש גזרות שבונות את השלם ואומרת שהן לא שישיות- אלא מציגה מצב שבו התלמידים מנתחים אותו בעצמם על-ידי שיחה ומגיעים לתובנות הרצויות.

6. לאחר העבודה על "שוויון" החלקים, המורה פונה לעבודה על תפקיד המונה. חשוב לשים לב לכך שהעבודה מלווה כל הזמן בהמחשה ובכתיבה סימבולית של השברים.

7. אפשר לראות **שליאור ולינוי** גם בהמשך העבודה  עדיין מקובעים בהסתכלות על מספר החלקים המצוין במכנה, ולא מייחסים חשיבות למספר החלקים המצוין במונה.

חשוב לעורר את תשומת לב המשתלמים שיתכן ויש מקום לתכנון עבודה נוספת או שונה, לשני תלמידים אלו.

8. בחלק האחרון של הראיון המורה למעשה "חוזרת אחורה" ועוסקת בהשוואה של שברי יחידה. מומלץ להעלות בפני המשתלמים את השאלה- האם לדעתם, היא פנתה לכיוון הנכון? האם זה היה בתכנון שלה? מה דעתם על שיקול הדעת שלה?

לאור הראיון נראה <u>שקיימים מספר נושאים שחשוב לבסס אצל התלמידים</u>:

א. את הרעיון של **חלוקה לחלקים שווים**. רעיון זה הוא המשך הרעיון של חילוק לחלקים שנלמד בשלמים. הרעיון מבוסס על ההבנה שבאותו אופן  שמחלקים קבוצה של עצמים למספר קבוצות שוות, כלומר, כך שבכל קבוצה היה אותו מספר עצמים, כך מחלקים שלם לחלקים שווים.

בהקשר לכך חשוב מאד לדון ברעיון שככל שמחלקים את השלם (כמות שלמה) ליותר קבוצות, בכל קבוצה יהיו פחות עצמים, וההפך – ככל שמחלקים לפחות קבוצות- בכל קבוצה יהיו יותר עצמים. בהמשך להבנת רעיון בסיסי זה של חילוק, יש לבנות את אותו רעיון כשמחלקים שלם אחד.

ב. **הכתיבה של השבר**- המספר שכתוב במכנה מציין לכמה חלקים שווים חילקו את השלם, ואילו המספר שבמונה מציין כמה החלקים כאלו יש.

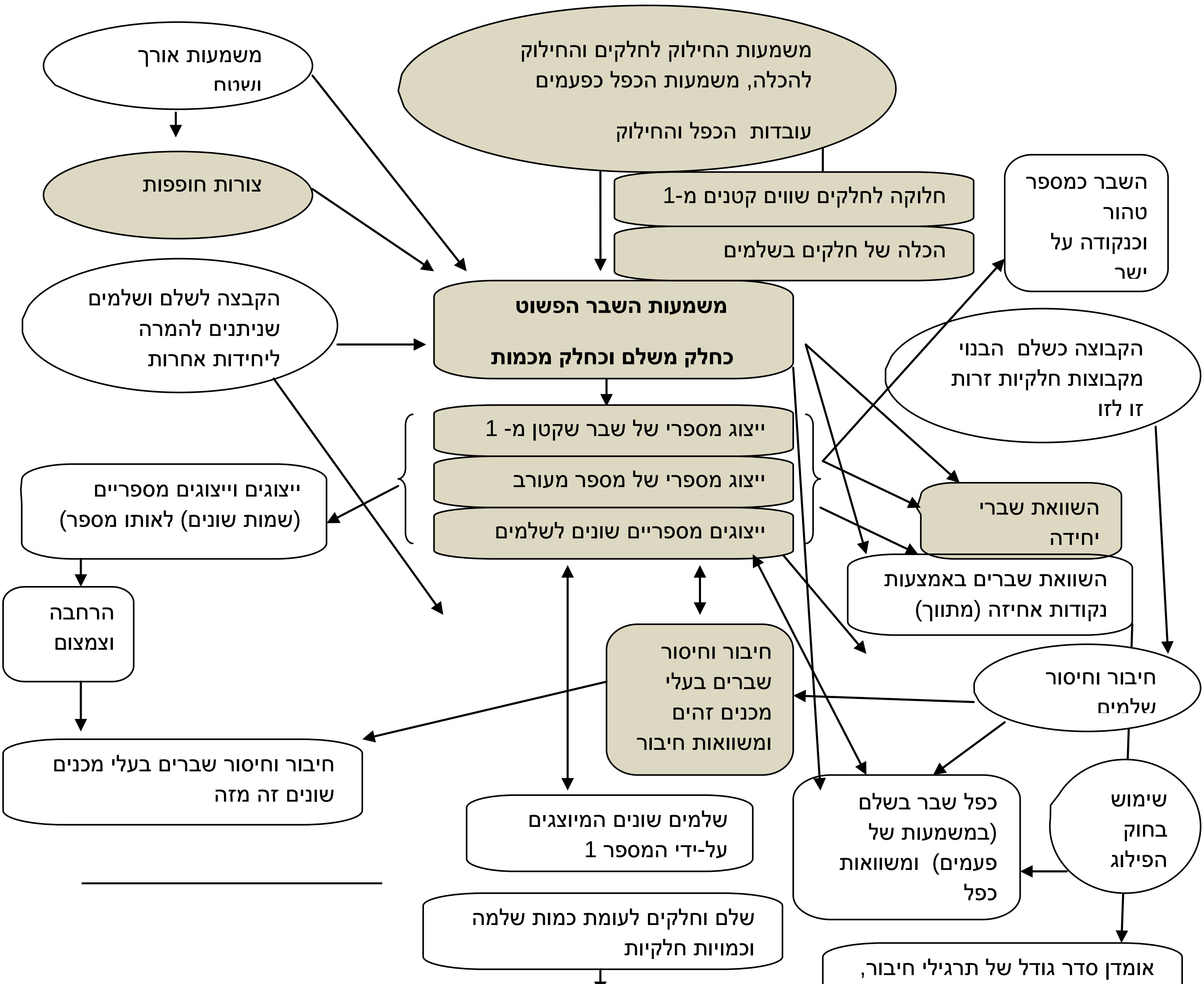
ג. כאשר **משווים שברים, צריך לקחת בחשבון שני גדלים בו זמנית**. האחד נקבע  על-ידי גודל החלק שהוא תלוי בממספר החלקים שחילקו את השלם, והשני  נקבע על-ידי מספר החלקים שיש באותו שבר.

ד. חשוב לדון גם **בשימוש באמצעי המחשה**- האם יש חשיבות לסרטוט עצמי של ההמחשה, או מספיק שימוש בהמחשה מוכנה?

ה. יתכן שעם תלמידים שמתקשים בהבנת הכתיבה של השבר ותפקיד כל אחד מהמספרים, כדאי לעבוד בהתחלה באמצעות כתיבת השבר במילים.

חבילת הידע  המוצעת בנושא  משמעות השבר היא: ( שקף 8)

( חשוב לציין שחבילת הידע נבנית על-ידי המורה, איננה אחידה וניתנת לשינוי. לכל  נושא שמוזכר בה אפשר ליצור חבילת ידע מפורטת יותר שיהיו בה קשרים לנושאים נוספים ואחרים שנלמדו בעבר וכאלו שילמדו בהמשך)



המונח "חבילת ידע" הוטבע על ידי חוקרת בתחום החינוך המתמטי בשם ליפינג מה (Liping Ma).

ליפינג מה היא סינית שבתקופת השלטון הקומוניסטי נשלחה כילדה בת 15 להכשרה לעבודה בכפר. בכפר, גילו את היכולות שלה להיות מורה והיא עבדה הרבה שנים כמורה למתמטיקה לילדים בכפר. כאשר בגרה, השלימה את לימודי המתמטיקה שלה ועברה להתגורר בארצות הבית. שם, לפני כ- 15 שנה, חקרה את ההבדל בין הידע של מורים אמריקאים לבין הידע של מורים סיניים.

המחקר התבצע בתקופה בה נושא ידע המורים עלה לכותרות ועסקו בו הרבה במחקר, בעקבות מחקר הטימס ( TIMSS, אותו מחקר שהציב את מדינת ישראל במקום ה- 39 בהישגי התלמידים). במהלכו של מחקר זה נבדקו הבדלים בתחום החינוך בנושאים רבים, כשמבחני ההישגים היו רק חלק קטן מהם. מבין הנושאים שנבדקו בהם ההבדלים בין ארצות שונות היו: הידע של המורים, התנהלות שיעור, פיתוח מקצועי של מורה וההכנה של המורה לקראת השיעור.

במחקרה מצביעה ליפינג מה על כך שלמורה האמריקאי יש יותר ידע אקדמי של תכנים מתמטיים גבוהים שנלמדים באוניברסיטה. לעומת זאת, למורה הסיני יש הרבה יותר ידע מעמיק בהבנת האריתמטיקה והתכנים שהוא מלמד. למשל, המורים הסינים היו הרבה יותר גמישים מחבריהם האמריקאים והציגו מגוון גדול יותר של אסטרטגיות לפתרון והסברים מעמיקים לאלגוריתמים שגרתיים כמו חיבור במאונך או חילוק שברים.

ליפינג מה( Liping Ma ) מציעה למורים לבנות "חבילת ידע" לכל נושא שהוא מלמד חבילות הידע נבנות ברמות שונות- החל מתמונה כללית של כל הנושא וכלה תרשים שמציג את הקשרים שבין הנושאים והרעיונות בתת-נושא שנלמד במשך שבוע או שבועיים.

בחבילת הידע מציגים את הידע הקודם הנדרש כדי ללמוד נושא חדש, אילו נושאים עתידיים יתקשרו לנושא הנלמד ומה הם הקשרים שבין תת-הנושאים הנלמדים.

חבילת הידע מאפשרת לראות רעיונות מתמטיים גדולים שעליהם מושתתת כל הבנת הנושא הנלמד.

2. <u>חבילת הידע בתחום משמעות השבר הפשוט כחלק משלם וכחלק מכמות</u>

הנושאים החיוניים הם: משמעות **החילוק לחלקים** (הבנה שבחלוקה כזו כל הקבוצות הן שוות) ומשמעות **החילוק להכלה.** משמעויות אלו לא רק שהן חיוניות, אלא שמומלץ לקשר את הוראת השברים אליהן. התלמידים צריכים להבין שבאותו אופן שמחלקים 20 עצמים ל- 5 קבוצות שוות, אפשר לחלק, 10 עצמים, 5 עצמים וגם עצם אחד (שניתן לחלוקה לשטחים שווים). בהמשך, התלמיד יבין שאפשר גם לחלק מספרים אחרים ל- 5 חלקים שווים.

לצד הבנת החילוק לחלקים שווים – ההסבר מדוע כל חלק הוא חמישית יבוסס על ההכלה- אותו חלק "נכנס" בשלם בדיוק חמש פעמים. או, שאם כופלים את הכמות שבכל קבוצה ב- 5, תתקבל

הקבוצה כולה. לכן, השלם גדול פי 5 מחמישית ממנו, והכמות שבקבוצה כולה גדולה פי 5 מהכמות שבחמישית ממנה.

**משמעות הכפל כפעמים** חיונית להבין שברים שהם אינם שברי יחידה. שברים אלו יהיו סכום של חיבור חוזר של שברי יחידה.

בנוסף למשמעות פעולות הכפל והחילוק שליפה של **עובדות הכפל והחילוק** חיונית לביצוע פעולות בשברים ולהבנת הרעיון של ייצוגים מספריים שונים לאותו מספר.

נושאים נוספים שחיוניים להבנת משמעויות אלו של השברים הם: משמעות **השטח והאורך** והבנה אינטואיטיבית של **צורות חופפות**. ללא מוכנות גיאומטרית זו, התלמידים לא יוכלו לחלק שלמים לחלקים שווים ולהבין את משמעות החלק מהשלם.

רעיון **השלם והחלקים** הוא רעיון בסיסי במתמטיקה שנלמד כבר עם לימוד פעולת החיבור והחיסור. למעשה, כאשר לומדים חיבור מגדירים כל פעם שלם אחר (שהוא הסכום) ומתרגלים חלוקת השלם לחלקים שהם מהווים קבוצות זרות של הקבוצה הכוללת. לרעיון שהשלם כל פעם משתנה, מתווסף בלימוד השברים הסימול של השלם באמצעות המספר 1.

לתלמידים שאין להם גמישות והבנה שהשלם (ש- 1 רק מייצג אותו) יכול לשנות את גודלו (כשטח, כאורך או ככמות) ושקיימות אפשרויות רבות של פירוק השלם לחלקים, יהיה מאד קשה להבין את רעיון השבר.

בדרך כלל רווחת הסברה שדי לבחון ולהעריך אם לתלמיד יש את המיומנויות הדרושות כידע קודם. אנו מציעים לשלב בדרכי ההוראה את הקשרים. להישען כל הזמן על הרעיונות המתמטיים שהיו חלק מלימוד השלמים ולהרחיבם לעולם השברים. רעיונות אלו הוצגו בצורה ברורה בסרטונים שהוצגו בתחילת הקורס (הרצאתו של פרופ' אהרוני).

- האם חבילת הידע מציגה סדר הוראה אחד ויחיד?

חבילת הידע שהוצגה כאן איננה מציגה סדר הוראה אחד ויחיד. בדרך כלל מומלץ לבנות את הקשרים שבין הרעיונות המתמטיים ועל-פיהם לתכנן את סדר ההוראה- קרי "מסלול ההוראה". כאשר עוסקים בהוראה מתקנת רצוי, במידת האפשר, גם לשנות את סדר ההוראה שנלמד כבר בשלבים הראשוניים.

למשל, את נושא החיבור והחיסור של שברים בעלי אותו מכנה אפשר ללמוד תוך כדי בניית מושגי השבר, ולאו דווקא לאחר הכרת המספרים השונים. בדרך זו ייבנה מספר כמו שלושה רבעים כסכום של רבע ועוד רבע ועוד רבע, או כמכפלה של 3 פעמים רבע או כתוצאה של פעולת חיסור שבין 1 לרבע.

3. בניית מסלול לתלמידים (מהראיון) על גבי חבילת הידע.

בסיכום הראיון אפשר להצביע על הצורך בחיזוק משמעות פעולת החילוק (במיוחד כחלוקה לחלקים שווים) , על הקשר שבין פעולת החילוק למשמעות השבר, על הקשר שבין חילוק לצורת הכתיבה של השבר ולתפקיד המונה והמכנה . במקביל לכך יש לעבוד על הרעיון שככל שמחלקים ליותר חלקים כל חלק קטן יותר וההפך.

רק לאחר ביסוס נושאים אלו אפשר להמשיך ולבסס נושאים נוספים בשברים.

מהתמונה המתקבלת בחבילת הידע אפשר לבנות מסלולי הוראה שונים. מומלץ לבקש מהמשתלמים להציע מסלולי הוראה , לדון בהצעות שלהם ורק לאחר מכן להציג בפניהם את ההצעה הבאה.

להלן מסלול לדוגמה:

1. חלוקת צורות לחלקים חופפים. שיחה על שוויון השטח של החלקים .השוואה ישירה. שיחה על כך שכל חלק מוכל כמה פעמים בשלם, שטח השלם גדול פי... משטח החלק, שטח החלק קטן פי... משטח השלם. התאמת שמות של שברי יחידה לחלקים. סכום כל שברי היחידה שווה לשלם. מכפלת שבר היחידה במספר הפעמים שווה לשלם.

2. עבודה על שאלות חילוק בשלמים, כבדיקה ביצוע כפל . חיזוק עובדות כפל וחילוק (במידת הצורך). אפשר להציג מספר מצבי חילוק כ"סדרה". למשל:

שאלת חילוק של 24 ב- 6 , אותה שאלת חילוק של 12 ב- 6, אותה שאלת חילוק של 6 ב-6, אותה שאלת חילוק של 1 ב-6.

עקרון מודגש: חלוקה לקבוצות שוות, חלוקה לחלקים שווים.

3. השוואת שברי יחידה. ייצוג השברים גם בעיגול וגם בכמות. דיון על הקשר שבין מספר החלקים לגודלם.

4. בניית שברים משברי יחידה על ידי סכום של שברי יחידה וכפל . ייצוג בשלם רציף ( עיגול). כתיבה של התרגילים המתאימים.

מעבר מתרגיל לייצוג.

בין השברים יוצגו שברים שהם שווים ל- 1 וגם גדולים מ-1.

5. ייצוג מספרים מעורבים.

6. חיבור וחיסור שברים ומספרים מעורבים בעלי אותו מכנה. עבודה על ייצוג, סרטוט ואומדן סדר גודל של התוצאה.

**השלב שלאחר בניית המסלול הוא תכנון מפגשים.**

**לכל תחנה יתכן שיהיה מפגש אחד או מספר מפגשים. בכל מפגש יש להתייחס למערכת קשרים מבין הקשרים המוצגים ( על-ידי החיצים) בחבילת הידע.**

ניתוח ראשוני של המבחנים:

ניתוח ראשוני של מקבץ המבחנים של התלמידים: פלג, אביב, איתי ותמוז.

פלג בעבודה של פלג רואים שליטה יפה בזיהוי וסרטוט של שברים בייצוגים שונים ומציאת הכמות המתאימה לשבר ( שאלות 1-5 , 7א, 8 , 11, 14, 15, 16, 17) בין השאר זיהוי מספרים שלמים ומספרים מעורבים המיוצגים כשבר , והבנת מהות השלם, הכלת חלקים בשלמים שונים וחלקים של השלם המיוצגים בייצוגים מספריים שונים.

כאשר מדובר על השוואת כמויות שאינן ידועות אבל ידוע איזה חלק הן מהשלם.בשאלה אחת (שאלה 6) התשובה נכונה ובשאלה השנייה ( שאלה 7) עולה טענה שאי אפשר להשוות את הכמויות. – נקודה זו דרושה בירור ידע של התלמיד. צריך לקחת בחשבון שבשאלה יש טעות.

בפעולות החיבור, החיסור והכפל ניתן לזהות חוסר שליטה ותפיסה שגויה של חיבור מונים וחיבור מכנים. כמו כן, של חיסור שגוי ( שאלות 9 – 10 , 12)

תמונת המצב בהשוואת שברים לא ברורה מחוסר נימוקים והסברים המתייחסים להשוואה בין השברים ( שאלה 13)

אביב בעבודה של אביב אפשר לראות שהתלמיד מזהה שבר שהמכנה שלו שווה למספר החלקים המיוצגים. לעומת זאת, כאשר מספר החלקים גדול יותר ויש צורך לחלק אותם לקבוצות שוות התלמיד מתקשה (שאלה 2). למרות הקושי הזה בשאלות שיש למצוא את החלק או השלם על בסיס שבר יחידה התשובות נכונות ( שאלות 7א, 8, 15, 16).

גם הבנת ההכלה של חלק בשלמים ( שאלה 16) לא ברורה.

בזיהוי מספרים שלמים ומעורבים המיוצגים כשברים- רצוי לבדוק שוב את השליטה וההבנה.

כאשר מדובר על השוואת כמויות שאינן ידועות אבל ידוע איזה חלק הן מהשלם- בשאלה אחת (שאלה 6) התשובה נכונה ובשאלה השנייה ( שאלה 7) עולה טענה שאי אפשר להשוות את הכמויות. – נקודה זו דרושה בירור ידע של התלמיד. צריך לקחת בחשבון שבשאלה יש טעות.

בתרגילי החיבור והחיסור, כאשר המכנים שווים הפתרון נכון . יש שימוש נכון בהמחשה, כולל למקרה של פריטה. אולם, כאשר המכנים שונים ( מוכלים) אין שימוש נכון ואין שמירה על גודל החלקים .( יתכן שיש מקום לעבוד על צורות חופפות). ( שאלה 9 ).

למרות קושי זה והקושי שבא לידי ביטוי בשאלה 2 – זיהוי ייצוג אחר של שבר בשאלות 11 ו- 13 הוא נכון. יש מקום לבדוק את ההבנה של ייצוגים מספריים שונים של שבר ואת הצורך בשימוש באותו ייצוג לצורך חיבור וחיסור.

יתכן שחיבור בעל-פה הנשען על דימוי של שברים מתבצע נכון ( שאלה 12).

תרגילי הכפל שגויים ולא ברורה השליטה במשמעות הכפל כפעמים בתחום השברים.

תמונת המצב בהשוואת שברים לא ברורה מחוסר נימוקים והסברים המתייחסים להשוואה בין השברים ( שאלה 13)

<u>איתי ותמוז </u>רואים שליטה יפה בזיהוי וסרטוט של שברים בייצוגים שונים ומציאת הכמות המתאימה לשבר ( שאלות 1,2,4,5 , 7א, 8 , 11, 14, 15, 16, 17) בין השאר זיהוי מספרים מעורבים המיוצגים כשבר , והבנת מהות השלם, הכלת חלקים בשלמים שונים וחלקים של השלם המיוצגים בייצוגים מספריים שונים.

בפעולות החיבור, החיסור והכפל יש שליטה מלאה ( שאלות 9 – 10 , 12)

גם בהשוואת שברים כנראה שיש שליטה, אולם התמונה לא ברורה מחוסר נימוקים שמסבירים את דרך ההשוואה. גם בהשוואת הכמויות שאינן ידועות אבל החלקים ידועים כנראה שהתלמיד איתר את הטעות שבשאלה והתייחס בתשובה שלו אליה. נקודה זו דורשת בירור עם כל הקבוצה.

בעבודה של תמוז הנימוקים יותר מבוססים וכנראה שמעידים על הבנה . אולם, כדאי לראיין את שני התלמידים רק בהקשר הזה ול" סלק" חששות של אי הבנה.

התלמידים נתקלו בקושי בהבנת המושג " מספר שלם".

<u>מארבעת העבודות </u>אפשר לראות בצורה ברורה שלמרות שאצל איתי ותמוז נראה חוסר הביטחון וקושי בכתיבה, לעומת שני התלמידים האחרים. גם איתי וגם תמוז שולטים יפה במהות השבר . ואילו, לפלג ולאביב יש קשיים שצריך לאתר ולטפל בהם.