פינה דידקטית

גילוי כיתתי:
הפרש מספר ו-"היפוכו"

ד"ר אלכס פרידלנדר
חבר בצוות קבוצת המתמטיקה,
המחלקה להוראת המדעים - מכון ויצמן

גילוי כיתתי: הפרש מספר ו-"היפוכו"

אלכס פרידלנדר

מבוא

הרעיון לפעילות הזאת "צץ" בעקבות בעיה מילולית כמעט סטנדרטית שמצאתי בספר לימודים לחטיבת הביניים:

ספרת העשרות של מספר דו-ספרתי גדולה ב-3 מספרת היחידות שלו. ההפרש בין מספר זה ובין המספר הכתוב באותן הספרות בסדר הפוך הוא 27. מצאו את המספר או את המספרים המקוריים.

פתרון הבעיה בדרך אלגברית הוא יחסית פשוט, אך התוצאה הפתיעה אותי. אתם מוזמנים לנסות את כוחכם או להסתכל בנספח - אם כי הדבר אינו דרוש למעקב אחרי תיאור הפעילות בהמשך - ואולי אף יקלקל את אלמנט ההפתעה...

הפעילות המתוארת כאן היא התאמה של הבעיה הזאת לתלמידי בית-הספר היסודי, ובמידה מסוימת אף הרחבתה.

הפעילות

בשל היותה פעילות מדורגת, מורים יכולים להפסיק את הפעלת המשימה בכיתה בכל שלב, בהתאם לשיקולים הקשורים בגיל וברמת היכולת המתמטית של תלמידיהם. תיאור המהלך כאן כולל את שיח המורה (בכתב ירוק) ופעולות המורה ותגובות צפויות של תלמידים (בכתב רגיל).

הפעלה

- [מחלקים פתקית אחת או שתיים (רצוי דביקה) לכל תלמיד/ה.]
  כתבו בבקשה על החלק העליון של הפתקית מספר דו-ספרתי כרצונכם, בתנאי ששתי ספרותיו שונות זו מזו.
  [בודקים שההוראה הובנה, ושהתלמידים כותבים בכתב קריא ויחסית גדול.]

- **עכשיו, כתבו מתחת למספר שבחרתם מספר הכתוב באותן ספרות, אך בסדר הפוך.**
  למשל [מדביקים פתקית ריקה על הלוח וכותבים עליה] **אם המספר שבחרתי הוא 83, אכתוב מתחתיו את המספר 38; אם בחרתי 70, המספר ההפוך הוא חד-ספרתי 7.**
  [בודקים שההוראה הובנה.]

- **בשלב הבא, חשבו את ההפרש בין המספר הגדול יותר לבין המספר הקטן יותר מבין השניים - כתבו אותו בכתב גדול יותר והקיפו אותו בעיגול. בדוגמה שלי** [כותבים על הפתקית שעל הלוח - ראו איור 1.] **אכתוב 45 כהפרש בין 83 ו- 38 ואקיף אותו בעיגול.**

- **הדביקו את הפתקית שלכם על הלוח.**
  [ראו דוגמה באיור 2.]

- **הציעו דרך לסידור הפתקיות בקבוצות (בעמודות). במקרה של פתקיות זהות, נניח אותן אחת על-גבי השנייה.**
  [בדרך כלל ההצעה היא סידור לפי ההפרשים שהתקבלו - ראו דוגמה באיור 3.]

- **האם קיבלנו את 18 כהפרש בין מספר והיפוכו? האם קיבלנו את 31 כהפרש?**
  [אם מספר הפתקיות גדול דיו, יש סיכויים גבוהים ש- 18 יופיע כהפרש על מספר פתקיות - לדוגמה, $42 - 24 = 18$, אך המספר 31 לא יתקבל בוודאות כהפרש בין מספר והיפוכו. במידה ו- 18 אינו מופיע בין ההפרשים שהתקבלו, שואלים לגבי הפרש אחר המופיע על הלוח.]

- [מחלקים לכמה תלמידים פתקית נוספת ריקה.]
  כל אחד מכם בוחר עמודה מסוימת, ומוסיף לאותה עמודה, אם הדבר אפשרי, פתקית שבה הפרש מתאים נוסף.
  [למשל, אם בעמודה שבה הפרשים של 72 כבר

מופיעות הפתקיות 19 – 91 ו- 8 – 80, לא ניתן למצוא דוגמה מתאימה נוספת לעמודה זאת.]

דיון

- **האם לדעתכם, ישנן עמודות של הפרשים בין מספר והיפוכו שאינן מופיעות על הלוח שלנו, אך היו יכולות להתקבל, לו היינו בודקים הפרשים של מספרים דו-ספרתיים נוספים?**

[למשל, בדוגמה שבאיור 3 לא התקבלו ההפרשים 54, 63, 72 ו- 81. התשובה היא יחסית פשוטה, אם בשלב זה התלמידים כבר גילו שההפרשים האלה חייבים להיות כפולות של 9. במידה ולא, הם יענו על השאלה הזאת באמצעות ניסויים עם מספרים דו-ספרתיים נוספים.]

- **מהי התכונה המשותפת לכל ההפרשים בין מספר דו-ספרתי והיפוכו?**

[רק בשלב זה מבקשים את ההכללה המפורשת של החוקיות. ההכללה יכולה להיעשות בשתי רמות. בשלב זה אפשר להסתפק בגילוי העובדה כי ההפרשים הם כפולות של 9.]

- **מהי התכונה המשותפת לכל המספרים היוצרים את ההפרש 18? ואת ההפרש 36?**

[במקרה הראשון, ההפרש בין ספרותיהם הוא 2, ובמקרה השני הפרש הספרות הוא 4. בשלב זה, אולי התלמידים יגלו את ההכללה ברמה הגבוהה יותר: ההפרש בין מספר דו-ספרתי והיפוכו הוא המכפלה בין 9 והפרש ספרותיו.]

- **לו היינו בודקים את כל המספרים הדו-ספרתיים בעלי ספרות שונות (מ-10 עד 98) - כמה פתקיות היו מופיעות בטור של 27? בטור של 45? בטור של 72?**

[7 פתקיות, 5 פתקיות ו- 2 פתקיות בהתאמה. התשובה מתקבלת על-ידי מיצוי כל זוגות המספרים בעלי הפרש ספרות מסוים. למשל, 27 מתקבל מן ההפרשים בין המספרים שהפרש ספרותיהם 3 ובין היפוכם: 3 – 30, 14 – 41, 25 – 52, 36 – 63, 47 – 74, 58 – 85, 69 – 96]

הנמקה

מבחינה מתמטית, כל הכללה של חוקיות חייבת להיות מלווה בהנמקה המראה כי החוקיות מתקיימת **בכל** המקרים אליהם מתייחסת אותה החוקיות. לאחרונה, הדגש על הסברים והנמקות גדל גם בלימודי המתמטיקה בבית-ספר היסודי. יחד עם זאת, במקרה של הכללות מורכבות, אפשר להסתפק בהנמקות בעלות היקף מצומצם יותר. במקרה שלנו, אפשר להסתפק בהנמקה לגבי הפרש ספרות מסוים. נדגים זאת באמצעות שתי הנמקות לכך שאם ההפרש בין הספרות של מספר דו-ספרתי הוא 3, אז ההפרש בין מספר זה והיפוכו הוא 27.

- ספרת העשרות של המחוסר (המספר הגדול יותר) גדולה ב- 3 מספרת היחידות. כתוצאה מהחלפת הסדר בין ספרותיו, חלים שני שינויים בגודלו:
  - ספרת העשרות שלו קטנה ב- 3, ולכן המספר קטן ב- 30.
  - ספרת היחידות של המספר גדלה ב- 3 ולכן המספר גדל ב- 3.

  כתוצאה משני השינויים האלה, המספר "ההפוך" קטן ב- 27 לעומת המספר המקורי, וההפרש בין שני המספרים יהיה 27.

- כאמור, ספרת העשרות של המחוסר (המספר הגדול יותר) גדולה ב- 3 מספרת היחידות.
  נוכל לייצג את ספרת היחידות כ- □, ואת ספרת העשרות כ- (□ + 3).
  אם נצמיד את שתי הספרות, נייצג את המספר כולו (□ + 3) □ ואת היפוכו (□ + 3) □.

נציג את ההפרש בין מספר והיפוכו בחיסור במאונך:

$$\begin{array}{rcc} & (\square + 3) & \square \\ - & \square & (\square + 3) \\ \hline \end{array}$$

כדי לחסר את ספרות היחידות, נפרוט עשרת אחת:

$$\begin{array}{rcc} & (\square + 2) & (10 + \square) \\ - & \square & (\square + 3) \\ \hline & \mathbf{2} & \mathbf{7} \end{array}$$

ותוצאת החיסור תהיה:

נציין כאן, כי במקרים בהם מעריכים שהידע המתמטי של התלמידים אינו מאפשר יצירת הנמקות מעין אלה, יכולים להציג אותן ולהסתפק בהבנתן בלבד, או שאפשר לוותר בכלל על שלב ההנמקה.

פיתוח יכולות מתמטיות

בדומה לפעילויות רבות אחרות של גילוי חוקיות, גם הפעילות הזאת היא בעלת פוטנציאל לפיתוח יכולות מתמטיות רבות ומגוונות. לסיכום, נמנה כאן חלק מהדרישות המוצבות בפני התלמידים במהלך הפעילות:

- **העמקת ההבנה של מושגים** - מכירים היבטים נוספים של המבנה העשרוני ופעולות החשבון
- **יכולת חישוב** - מבצעים תרגילי חיסור רבים
- **חשיבה הפוכה** - משחזרים תרגילים בעלי תוצאה נתונה
- **מתן דוגמאות** - יוצרים דוגמאות לתרגילים המתאימים לתנאי נתון
- **מיצוי אפשרויות** - בוחנים את ההפרשים שהתקבלו ומוצאים את ההפרשים החסרים
- **חשיבה על חשיבה** - מפעילים תהליכי בקרה על העבודה העצמית ועל עבודת החברים
- **העלאת השערות** - מעלים השערות לגבי החוקיות הכללית ולגבי הפרשים המתקבלים במקרים ספציפיים, ובודקים את נכונותם
- **גילוי, הכללה והנמקה של חוקיות** - כאמור, תהליכים אלה יכולים להתבצע ברמות שונות.

לסיום, נציין כי דרך ההצגה של השאלות בפעילות זו נועדה להבטיח דירוג ביכולות המתמטיות הנדרשות בכל שלב, וכתוצאה מכך לאפשר גילוי עצמי וקבוצתי מצד התלמידים, תוך התערבות מינימאלית מצד המורה.

נספח -
פתרון אלגברי של הבעיה המקורית

x מייצג את ספרת היחידות של המספר המקורי

$x + 3$ מייצג את ספרת העשרות של המספר המקורי

$10(x + 3) + x$ מייצג את המספר המקורי.

$10x + (x + 3)$ מייצג את "המספר ההפוך".

המשוואה המתאימה לתנאי הבעיה היא:

$$[10(x + 3) + x] - [10x + (x + 3)] = 27$$

ותחום הבעיה הוא המספרים השלמים בין 0 ל- 9.

לאחר פישוט המשוואה, כל המחוברים מתבטלים (כלומר, מגיעים לשוויון $0 = 0$ או $27 = 27$).

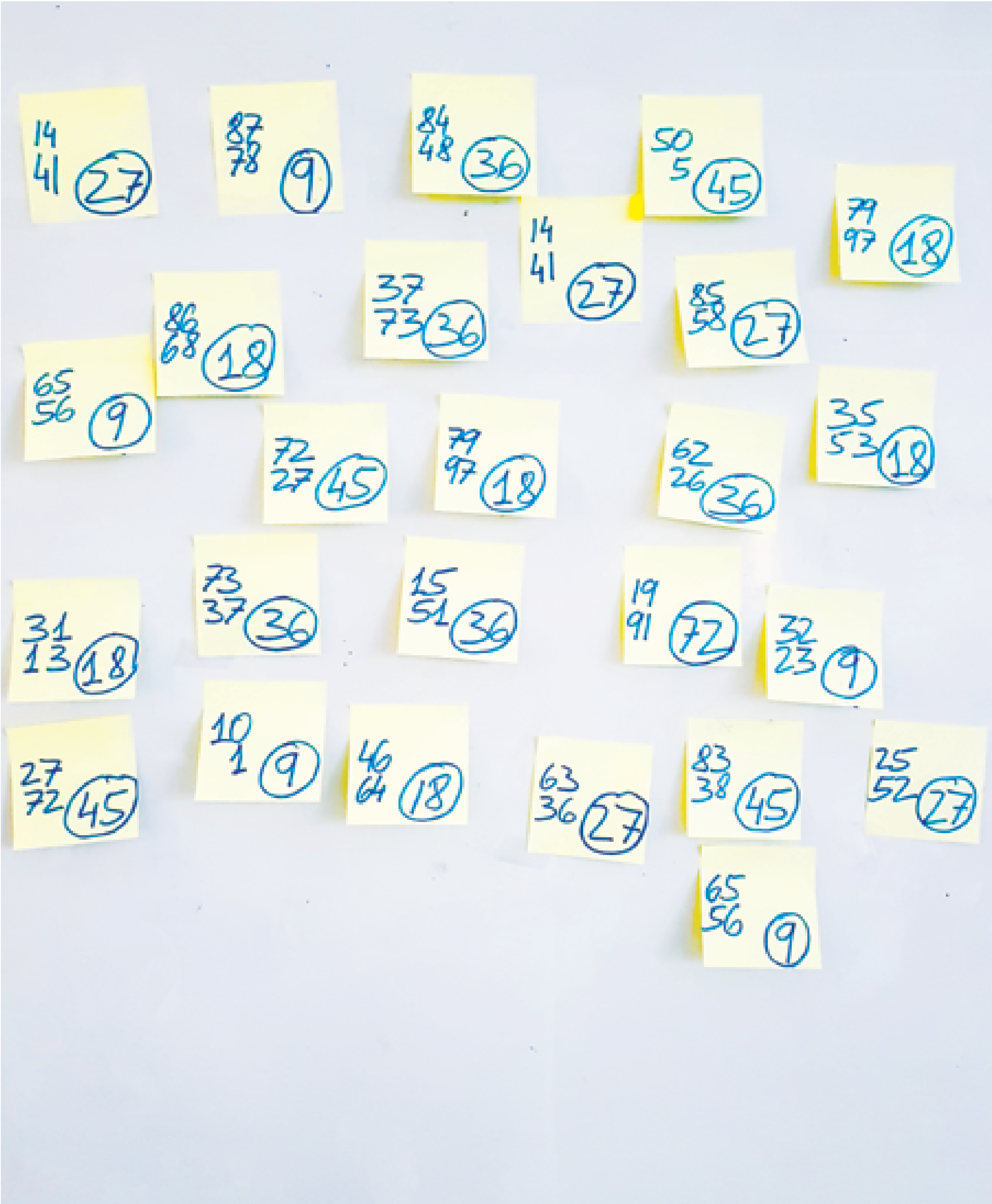
מכך מסיקים כי זאת זהות - כלומר, זוהי משוואה שפתרונה הוא כל המספרים שבתחום הבעיה.

לכן המספר הדרוש יכול להיות כל מספר העונה לתנאי הבעיה (דו-ספרתי שהפרש ספרותיו 3).

נוכל למצוא מספרים אלה באמצעות מיצוי כל האפשרויות: 30, 41, 52, 63, 74, 85, 96.

איור 1 - הדגמה של הפרש על הלוח

איור 2 - איסוף נתונים



איור 3 - סידור ההפרשים לפי ערכם