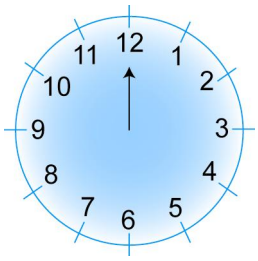
פעולות בשעון



נתבונן בשעון.

נגדיר קבוצת מספרים A כקבוצת כל המספרים השלמים הרשומים על השעון:

{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

על השעון ישנו מחוג (שתפקידו כתפקיד המחוג הקטן בשעון מחוגים רגיל) והוא מכוון כלפי השעה 12.

נגדיר פעולת **חיבור בשעון** בין שני מספרים a ו- b בקבוצה זו כך:

המחוג יוצא תמיד מ- 12. תחילה המחוג מסתובב a שעות עם כיוון השעון, ואחר כך הוא מסתובב b שעות עם כיוון השעון.

השעה אליה הגיע המחוג היא התוצאה.

נסמן את הפעולה כך: $a \oplus b$

1. חשבו.

א. $6 \oplus 3 =$ ב. $9 \oplus 4 =$ ג. $10 \oplus 10 =$ ד. $7 \oplus 12 =$

2. השלימו.

א. $4 \oplus$ ___ $= 7$ ב. $7 \oplus$ ___ $= 4$ ג. $3 \oplus$ ___ $= 3$

3. האם הפעולה $\oplus$ היא חילופית? נמקו.

4. הציעו הגדרה ל**חיסור בשעון** בין שני מספרים בקבוצה. סמנו: $a \ominus b$.

5. פתרו לפי הגדרתכם.

א. $6 \ominus 2 =$ ב. $2 \ominus 6 =$ ג. $10 \ominus 10 =$ ד. $3 \ominus 12 =$

חיסור רגיל בין מספרים היא פעולה הפוכה לחיבור.

כלומר: אם $a + b = c$ אז $c - a = b$ וכן $c - b = a$.

למשל, אם רוצים לחשב בעל-פה את התוצאה של $514 - 475$ אפשר לעשות זאת על-ידי השלמה בפעולת החיבור: $475 + \_\_\_\_ = 514$.

6. האם ההגדרה שהצעתם **לחיסור בשעון** היא פעולה הפוכה **לחיבור בשעון**?

נגדיר פעולת **חיסור בשעון** בין שני מספרים a ו- b בקבוצה זו כפעולה הפוכה לחיבור כך:
תחילה המחוג מסתובב a שעות עם כיוון השעון, ואחר כך הוא מסתובב b שעות נגד כיוון השעון.
השעה אליה הגיע המחוג היא התוצאה. נסמן: $a \ominus b$

7. א. הראו שהפעולה $a \ominus b$ היא אכן הפוכה ל- $a \oplus b$.

ב. האם הפעולה $\ominus$ היא חילופית? נמקו.

קבוצה של מספרים נקראת **סגורה לגבי פעולה מסוימת**, אם התוצאה של הפעולה בין כל שני מספרים בקבוצה היא מספר הנמצא בקבוצה.
למשל קבוצת **המספרים הטבעיים** סגורה לגבי **החיבור**, כי תוצאת החיבור בין **כל** שני מספרים טבעיים היא מספר טבעי.

8. א. האם הקבוצה שהגדרנו למעלה סגורה לגבי הפעולה $\oplus$?

ב. האם הקבוצה שהגדרנו למעלה סגורה לגבי הפעולה $\ominus$?

9. חשבו.

$7 \oplus \_\_\_ = 7$ $\qquad$ $4 \oplus \_\_\_ = 4$ $\qquad$ $12 \oplus \_\_\_ = 12$

המספר 12 לא שינה את התוצאה.

אם בקבוצת מספרים עם פעולה כלשהי יש מספר אחד שאינו משנה את התוצאה, המספר נקרא **איבר נייטרלי** (או איבר יחידה).
אם נסמן את המספר הנייטרלי ב- e ואת הפעולה ב- $*$, אז לכל a בקבוצה מתקיים:

$$a * e = e * a = a$$

למשל, 0 הוא מספר נייטרלי **בקבוצת השלמים** עם הפעולה **חיבור**.

10. א. האם בקבוצת הטבעיים יש איבר נייטרלי לגבי החיבור?

ב. האם לקבוצת המספרים על השעון עם הפעולה $\oplus$ יש איבר נייטרלי? אם כן, מיהו?

ג. האם לקבוצת המספרים על השעון עם הפעולה $\ominus$ יש איבר נייטרלי? אם כן, מיהו?

11. חשבו.

א. $4 \oplus \_\_\_ = 12$ ב. $7 \oplus \_\_\_ = 12$ ג. $12 \oplus \_\_\_ = 12$

המספרים 4 ו- 8 נקראים **מספרים הופכיים** זה לזה לגבי הפעולה $\oplus$, כי הפעולה ביניהם נותנת את המספר הנייטרלי.

שני מספרים אשר תוצאת הפעולה ביניהם היא האיבר הנייטרלי, נקראים **מספרים הופכיים זה לזה.**

12. בשאלה זו התייחסו לקבוצת המספרים על השעון עם הפעולה $\oplus$.

א. מצאו את המספרים ההופכיים למספרים הבאים 3, 5, 7, 10.

ב. האם יש מספרים שהם הופכיים לעצמם? אם כן, מיהם?

ג. האם לכל מספר יש איבר הופכי?
אם לא, למי אין? אם כן, איך מוצאים אותו?

13. בשאלה זו התייחסו לקבוצת המספרים על השעון עם הפעולה $\ominus$.

א. מצאו את המספרים ההופכיים למספרים הבאים 3, 5, 7, 10.

ב. האם יש מספרים שהם הופכיים לעצמם? אם כן, מיהם?

ג. האם לכל מספר יש איבר הופכי?
אם לא, למי אין? אם כן, איך מוצאים אותו?

14. חשבו.

א. $(2 \oplus 5) \oplus 8 =$ $2 \oplus (5 \oplus 8) =$

ב. $(11 \ominus 4) \ominus 12 =$ $11 \ominus (4 \ominus 12) =$

בקבוצת המספרים הטבעיים, עם פעולת חיבור, מתקיים החוק הבא לגבי כל שלושה מספרים:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

כלומר סדר **הפעולות** אינו משנה את התוצאה. זהו חוק הקיבוץ.

אומרים שקבוצת המספרים הטבעיים מקיימת את **חוק הקיבוץ** לגבי פעולת החיבור.

15. א. האם חוק הקיבוץ מתקיים בקבוצת המספרים על שעון לגבי הפעולה $\oplus$?

אם כן, נמקו. אם לא, תנו דוגמה נגדית.

ב. האם חוק הקיבוץ מתקיים בקבוצת המספרים על שעון לגבי הפעולה $\ominus$?

אם כן, נמקו. אם לא, תנו דוגמה נגדית.

קבוצת מספרים נקראת **חבורה לגבי פעולה מסוימת** אם היא מקיימת את ארבע התכונות הבאות:

1. הקבוצה סגורה לגבי הפעולה.
2. לקבוצה יש איבר נייטרלי לגבי הפעולה.
3. לכל איבר בקבוצה יש איבר הופכי.
4. הפעולה מקיימת את חוק הקיבוץ.

אם הפעולה היא גם חילופית, קוראים לקבוצה **חבורה חילופית**.

16. א. האם קבוצת המספרים על השעון היא חבורה לגבי הפעולה $\oplus$? נמקו.

ב. האם קבוצת המספרים על השעון היא חבורה לגבי הפעולה $\ominus$? נמקו.

על סגירות

17. נגדיר שש פעולות שונות בקבוצת המספרים הטבעיים.
נסמן בסולמית (a # b) את הפעולה בין המספרים a ו- b.
סמנו את הפעולות שקבוצת המספרים הטבעיים סגורה לגביהן (כלומר, שתוצאת הפעולה בין **כל** שני מספרים טבעיים תיתן מספר טבעי). תנו דוגמה נגדית לכל פעולה שקבוצת המספרים הטבעיים אינה סגורה לגביה.

א. סכום העוקבים:	$a \# b = (a + 1) + (b + 1)$	לדוגמה:	$5 \# 7 = 14$
ב. סכום הקטנים ב- 2:	$a \# b = (a - 2) + (b - 2)$	לדוגמה:	$5 \# 7 = 3 + 5 = 8$
ג. ריבוע הסכום:	$a \# b = (a + b)^2$	לדוגמה:	$5 \# 7 = (5 + 7)^2 = 144$
ד. ריבוע ההפרש:	$a \# b = (a - b)^2$	לדוגמה:	$5 \# 7 = (5 - 7)^2 = 4$
ה. הממוצע:	$a \# b = \frac{a+b}{2}$	לדוגמה:	$5 \# 7 = \frac{5+7}{2} = 6$
ו. צמצום המנה:	$a \# b = \frac{2a+2b}{a+b}$	לדוגמה:	$5 \# 7 = \frac{2 \cdot 5 + 2 \cdot 7}{5+7} = 2$

18. נוסיף את 0 לקבוצת המספרים הטבעיים. האם הקבוצה החדשה סגורה לגבי הפעולות שהוגדרו לעיל?
אם כן, לגבי אילו פעולות?

19. נחליף את קבוצת המספרים הטבעיים בקבוצת המספרים הזוגיים החיוביים. האם הקבוצה החדשה סגורה לגבי הפעולות שהוגדרו לעיל?
אם כן, לגבי אילו פעולות?

20. נחליף את קבוצת המספרים הטבעיים בקבוצת המספרים האיזוגיים החיוביים. האם הקבוצה החדשה סגורה לגבי הפעולות שהוגדרו לעיל?
אם כן, לגבי אילו פעולות?

אתגר

21. נסו למצוא קבוצה שתהיה סגורה לגבי כל שש הפעולות שהגדרנו.