סיכום מאמרים בנושא: חוקי הפעולות בדגש על חוק הקיבוץ בכפל

ערכה וסיכמה: ברכה סגליס

מבוא

נושא "חוקי הפעולות" מופיע בתוכנית הלימודים למתמטיקה לביה"ס היסודי של משרד החינוך [4] באופן מפורש בכיתות א'-ג', אם כי הציפייה מהתלמידים היא רק ליישם אותו באמצעות ביצוע דרכי חישוב, ובמיוחד בחישובים מורכבים.

לגבי כיתה א' נכתב (שם, עמ' 20): "שימוש בחוקי הפעולות ייעשה בעיקר על סמך הבנה אינטואיטיבית הנשענת על העובדה שאפשר למנות בקבוצות ובכל סדר. בשלב זה אין צורך לתת שמות לחוקים – חוק החילוף, חוק הקיבוץ וכו' – או לנסחם באופן פורמלי".

אשר לכיתה ב' נכתב (שם, עמ' 43): "שימוש בחוקי הפעולות (חילוף וקיבוץ של החיבור והכפל). אין לשים דגש על ניסוח פורמלי של החוקים, אלא יש להשתמש בתכונות הפעולות להקלת החישובים... התלמידים גם ישתמשו בחוק הפילוג מבלי לציין זאת, להכפלת מספר דו־ספרתי בחד־ספרתי".

בנוגע לכיתה ג' נכתב (שם, עמ' 58): "בכיתה ג' יילמד חוק הפילוג תוך פעילות במודל מתאים. אין הכרח לדרוש ניסוח פורמלי של החוקים. יש לנצל את החוקים לפתירה נוחה של תרגילים. השימוש בחוקים ייעשה באופן אינטואיטיבי ולא בדרך אנליטית, ואין לדרוש מהתלמידים לפרט באילו חוקים השתמשו."

בתוכנית הלימודים בכיתה ד' אין אזכור של חוקי הפעולות כחלק מהנושאים ללימוד, אבל בפרק על לימוד החילוק הארוך נכתב (שם, עמ' 81): "הסבר האלגוריתם של החילוק הארוך יסתמך על המבנה העשרוני ועל חוק הפילוג."

בלימוד פעולות השבר הפשוט והשבר העשרוני בכיתות ד'-ו' אין אזכור של חוקי הפעולות למרות שחוקי החילוף והקיבוץ בחיבור ובכפל תקפים גם לשברים.

נשאלת השאלה: האם כאשר מלמדים ילדים אסטרטגיות לבצע חישובים בעל־פה ובכתב באופן יעיל, הם מסוגלים בעצמם להגיע להבחנה והכללה של החוקים העומדים מאחורי אסטרטגיות אלה, או שהם לומדים כי "ככה עושים את זה, כיוון שהמורה אמרה"? (ישנן עדויות שכאשר תלמידים מתבקשים לנמק ולהצדיק פעולות שביצעו, אחת ההצדקות היא: ככה המורה אמר[1]). שאלה נוספת היא: בהגיע התלמידים לכיתות העל-יסודי וללימוד פרק "חוקי הפעולות באופן אלגברי", האם הם יודעים לקשר את הנלמד ליכולת האינטואיטיבית שלהם לבצע חישובים המסתמכים על חוקים אלה?

[1] ראו סיכום מאמרים בנושא "פיתוח חשיבה והנמקה מתמטית בכיתות היסוד" (טבלה 1 – רמות הצדקה: פנייה למקור סמכות).

המחקר בנושא של לימוד חוקי הפעולות בבית הספר היסודי הוא בצעדיו הראשונים, ומציג בעיקר את הבעיות הנחשפות בקרב התלמידים בכיתות, הלכה למעשה.
בסיכום זה יוצגו שלושה מאמרים העוסקים בחוקי הפעולות בדגש על פעולת הכפל וחוק הקיבוץ בפעולת הכפל. המאמר הראשון מציג מחקר שבדק את האופן שבו מורות ומורים בכיתות א'-ד' מלמדים נושאים הקשורים לחוק הקיבוץ, ועד כמה נלמד החוק באופן מפורש. המאמר השני מציג מחקר שבדק את הידע של פרחי הוראה בנושא חוקי הפעולות בכפל, וחשף למעשה את חוסר הידע והבלבול שמאפיין אותם לגבי הנושא. המאמר השלישי מציג מחקר שבדק את ההבנה של תלמידים בכיתות ה'-ו' על אודות היישום של חוק הקיבוץ בפתירת תרגילי כפל בראש בעזרת אסטרטגיות שנועדו להקל את החישוב.

היבטים תאורטיים

על פעולות, חוקי הפעולות וסדר הפעולות (הבחנה בין קיבוץ לחילוף)

פעולות החשבון חיבור, חיסור, כפל וחילוק הן פעולות בינריות, כלומר הפעולה נעשית בין שני מספרים מאותה קבוצת המספרים. כאשר רוצים לפתור תרגיל שבו נכללים יותר משני מספרים (תרגיל שרשרת עם אותה פעולה) יש לתכנן כיצד לבצע את הפעולות על שני מספרים בלבד בכל פעם. עקרונית נהוג לפתור תרגיל שרשרת לפי סדר הופעת המספרים והפעולות שבו משמאל לימין. עם זאת, לא תמיד נחוץ, נדרש או יעיל לצורך החישוב לעשות כן. חוקי הפעולות וכללי סדר הפעולות מאפשרים חריגה מסדר זה. ***חוקי הפעולות*** מתבססים על תכונות של הפעולות והן: תכונת הקומוטטיביות (חוק החילוף); תכונת האסוציאטיביות (חוק הקיבוץ) ותכונת הדיסטריביוטיביות של הכפל מעל החיבור (חוק הפילוג). ***כללי סדר הפעולות*** קובעים קדימויות לביצוע הפעולות הבינריות שבתוך תרגיל מורכב אחד, וקובעים כי פעולות הכפל והחילוק קודמות לפעולות החיבור והחיסור, וסוגריים קודמים לכול.
להלן נתמקד רק בחוקי החילוף והקיבוץ המופיעים יחד בתרגילי חיבור או כפל.
חוק החילוף מאפשר לשנות את הסדר של ***המספרים*** בתוך התרגיל, והוא מתקיים בפעולות חיבור וכפל (במקרה של תרגיל שרשרת, אם בתרגיל הנתון כל הפעולות הן מאותו הסוג).
לדוגמה: $5+8=8+5$, $9\times 6=6\times 9$, ובתרגילי שרשרת (אלה חלק מהאפשרויות):

$3+4+6=6+4+3=3+6+4$ וכך הלאה,

$7\times 5\times 2=7\times 2\times 5=2\times 5\times 7$ וכך הלאה.

חוק הקיבוץ מאפשר לשנות את הסדר של ***הפעולות*** בתוך תרגיל שרשרת אם בתרגיל הנתון כל הפעולות הן מאותו הסוג.
לדוגמה: $(3+4)+6=3+(4+6)$ (הסוגריים מציגים את סדר הפעולות שמשתנה),
$(7\times 2)\times 5=7\times (2\times 5)$ (הסוגריים מציגים את סדר הפעולות שמשתנה)

חוקי החילוף והקיבוץ אינם פועלים בתרגילי חיסור וחילוק.

שימו לב:[2] מכיוון שחוקי החילוף והקיבוץ מופיעים תמיד יחד בפעולות החיבור והכפל, חוק החילוף בעצם מייתר את הצורך להשתמש בחוק הקיבוץ, כי במקום לשנות את סדר הפעולות ניתן לשנות את סדר המספרים. עיקרון זה יכול להסביר את הבלבול ואת הקושי להבחין ביניהם, כפי שיפורט בהמשך בסיכום מאמר [2].

משמעות חוקי החילוף והקיבוץ: בכתיבה אלגברית, בהמחשה קונקרטית ובעזרת בעיה מילולית

הניסוח הפורמלי של חוקי הפעולות נעשה בכתיבה אלגברית כך:

חוק החילוף

$$\mathrm{a} + \mathrm{b} = \mathrm{b} + \mathrm{a}$$

$$a \times b = b \times a$$

חוק הקיבוץ

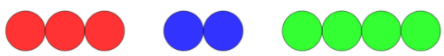
$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

שימו לב שכתיבת חוקי הפעולות באופן פורמלי מחייבת הצגה של שוויון בין שני אגפים. גם בכתיבת תרגילים המבוססים על חוקים אלה חובה להציג את השוויון שבין שני התרגילים – התרגיל המקורי והתרגיל שהשתנה בעקבות הפעלת החוק. כלומר, החוק הוא השוויון ולא הפרוצדורה. כידוע, תלמידים מתקשים להבין שסימן ה"שווה" אינו מייצג רק את התוצאה המתקבלת של התרגיל, אלא זהות (חלק מהידע על אודות הסימן "שווה" הוא ההבנה שניתן להשתמש בו בתהליכים וטרנספורמציות מתמטיים, וגם שהוא בעצם יחס. זוהי ההבנה שהסימן מסמל זהות של הביטויים המוצגים משני צדדיו[3]).

לתלמידים צעירים הכתיבה האלגברית היא חסרת משמעות, ויש לחפש דרכים אחרות להמחיש להם את חוקי הפעולה ולהסביר להם מדוע הם שימושיים מאוד בביצוע פעולות החשבון. ב***פעולת החיבור*** ניתן להמחיש את חוקי החילוף והקיבוץ באמצעות איחוד קבוצות של עצמים, לפי הסדר הזה: תחילה מאחדים שתי קבוצות, ולאחר מכן מוסיפים את השלישית.[4]

לדוגמה: חיבור של $3 + 2 + 4$

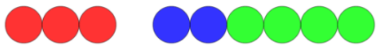


[2] הארה זו לא מופיעה במפורש במאמרים, אך התייחסות לנושא זה מופיעה במאמר 2 בסעיף: סיכום ומסקנות.

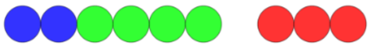
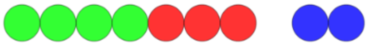
[3] ראו: [סיכום מאמרים בנושא הסימן "=" כמציין שוויון מתמטי וכמהווה קישור מהותי בין אריתמטיקה לאלגברה](#)

[4] ההמחשות של חוקי הקיבוץ והחילוף לפעולת החיבור נוספו ע"י מכסמת המאמרים, ולא כתובות במאמרים שסוכמו.

על פי ***חוק הקיבוץ***: $(4 + 2) + 3 = 4 + (2 + 3)$. מה שמשתנה הוא הסדר שבו מאחדים את שתי הקבוצות הסמוכות: תחילה $2 + 3$ או תחילה $4 + 2$.

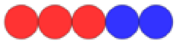
 זהה ל- 

על פי ***חוק החילוף***: ניתן לשנות את הסדר שבו מתחילים לאחד את שתי הקבוצות הראשונות בכל סדר שרוצים. תחילה $4 + 2$ או $2 + 4$, או תחילה $3 + 4$ או $4 + 3$:

 זהה ל- 

כאמור, את חוק החילוף ניתן להמחיש גם בפעולה עם שני מחוברים בלבד:

$$3 + 2 = 2 + 3$$

 זהה ל- 

בפעולת הכפל המחשת ***חוק החילוף*** נעשית באמצעות מודל המערך המלבני, ומוצגת בהקשר של כפל של שני מספרים. באופן זה מודגשת משמעות הכפל כסכום של קבוצות שוות (מחוברים שווים).[5]

לדוגמה: $2 \times 4 = 4 \times 2$

 זהה ל- 

ההמחשה של ***חוק הקיבוץ בכפל*** מוצגת בסיכום מאמר [2] באיורים 3, 4א, 4ב ו־5. איור 5 ממחיש שאלה מילולית. כותבי מאמר [2] ממליצים מאוד להשתמש בשאלות מילוליות כתוכן רקע להמחשת חוקי הפעולות. דוגמאות לשאלות מילוליות מתאימות מובאות בהמשך.

יישום חוקי הפעולות בביצוע חישובים אריתמטיים – שימוש באסטרטגיות חישוב ביעילות וגמישות המספקות תוכן מושלם ללימוד תכונות הפעולות.

חוק הקיבוץ בחיבור מופיע באסטרטגיות נגזרות כמו: "תאומים+1", "השלמה לעשר" והאלגוריתם המקובל לחיבור עם העברה. באסטרטגיות אלו חוק הקיבוץ מייעל את התהליך של החישוב.

[5] גם המחשה זו נוספה על ידי מסכמת המאמרים, אם כי היא מוזכרת במאמר [2] בהקשר של המחשת משמעות הכפל.

דוגמה ל"תאומים+1":

$$9 + 8 = (1 + 8) + 8 = 1 + (8 + 8) = 1 + 16 = 17$$

דוגמה ל"השלמה לעשר":

$$9 + 8 = 9 + (1 + 7) = (9 + 1) + 7 = 10 + 7 = 17$$

גם בחיבור במאונך מופעל חוק הקיבוץ, למשל, אם יש העברה של עשרת מעמודת האחדות לעמודת העשרות. לדוגמה בתרגיל $46 + 6$ התלמיד מחבר תחילה $6 + 6$, אבל רושם בעמודת האחדות רק את הספרה 2. את הספרה 1 הוא מעביר לעמודת העשרות ומחבר אותה עם הספרה 4 שרשומה שם. בעצם, מה שנעשה הוא התרגיל הבא:

$$46 + 6 = (40 + 6) + 6 = 40 + (6 + 6) = 40 + (10 + 2) = (40 + 10) + 2$$

ניתן לראות שבמהלך פתרון תרגיל זה הופעל חוק הקיבוץ פעמיים.

חוק הקיבוץ בכפל מיושם באסטרטגיות: הבחנה, הכפלה וחצייה, וערך המקום [מאמר 3].
אסטרטגיה של ***הבחנה*** מופיעה לדוגמה בתרגיל $37 \times 5 \times 2$. במקום לכפול 37 ב־5 שמצריך חישוב מרובה, עדיף לכפול תחילה 5 ב־2 שנותן תוצאה של 10, ואותו קל לכפול ב־37. זיהוי האפשרות לשנות את סדר הפעולות, כלומר, ליישם את תכונת הקיבוץ, מייעל את החישוב: $(37 \times 5) \times 2 = 37 \times (5 \times 2)$. כך גם בדוגמה $3 \times 4 \times 25$, זיהוי הגורמים שכדאי לכפול תחילה והפעלת חוק הקיבוץ מאפשרים להגיע לתשובה של 100, שאותה קל יותר לכפול ב־3: $(3 \times 4) \times 25 = 3 \times (4 \times 25)$.

הכפלה וחצייה היא גם אסטרטגיה שמתבססת על חוק הקיבוץ. במקרה זה מדובר בתרגיל כפל שבו יש רק שני גורמים, אבל באמצעות הכפלת אחד הגורמים וחציית הגורם השני יוצרים תרגיל שבו שלושה גורמים, ובשלב זה בעזרת חוק הקיבוץ מבצעים חישוב קל ויעיל. לדוגמה: התרגיל 16×25 מורכב לחישוב בעל־פה, אבל אם חוצים את 16 ל־2×8 ואת 8 ל־2×4 מתקבל התרגיל $4 \times (2 \times 2) \times 25$ ששווה בערכו לתרגיל המקורי. הפעלת חוק הקיבוץ מאפשרת לכפול תחילה את 2×2 ב־25 ולקבל מכפלה 100 שאותה קל לכפול ב־4:

$$16 \times 25 = (8 \times 2) \times 25 = (4 \times 2 \times 2) \times 25 = 4 \times (2 \times 2 \times 25)$$

שימו לב: חוק הקיבוץ בא לידי ביטוי באופן שהתרגיל רשום. אבל מורים נוטים בדרך כלל לקצר תהליכים ולרשום:

$$16 \times 25 = 8 \times 50 = 4 \times 100$$

אופן רישום זה הוא נכון מבחינה מתמטית, אבל מעלים את העובדה שהאסטרטגיה מבוססת על חוק הקיבוץ. לכן חשוב לבקש מהתלמידים לנמק את תהליך ההכפלה והחצייה במונחים של גורמי המספרים שאותם צריך לכפול, כפי שהודגם לעיל.

דוגמה נוספת: $12 \times 15 = (6 \times 2) \times 15 = 6 \times (2 \times 15) = 6 \times 30$.

גם אסטרטגיות המבוססות על **ערך המקום** משתמשות בחוק הקיבוץ, ומתבססות על פירוק אחד המספרים בתרגיל לפי הגורמים שלו. לדוגמה, כדי לפתור את התרגיל 60×7 אפשר לרשום את המספר הראשון כמכפלה של הגורם, 10 ואז להפעיל את חוק הקיבוץ:

$$60 \times 7 = (10 \times 6) \times 7 = 10 \times (6 \times 7)$$

יש מקרים מורכבים יותר שבהם מופעלים גם חוק הקיבוץ וגם חוק החילוף. לדוגמה:

$$60 \times 70 = (6 \times 10) \times (7 \times 10) = (6 \times 7) \times (10 \times 10) = 42 \times 100$$

במקרים של כפל מספרים שיש בהם אפסים, תלמידים נוטים "להניח" את האפסים בצד, לכפול את המספרים ללא האפסים, ואז להתייחס לאפסים שהונחו בצד. למרות שטכניקה זו מניבה תוצאות ומורים אפילו מציגים אותה בתור כלל: "מוחקים ומוסיפים אפסים", היא איננה מבהירה מדוע היא יעילה, והיא מתעלמת מהתרומה של חוק הקיבוץ לתהליך. מחקרים רבים מציגים תופעה זו ומדגישים את הבעייתיות שלה כיוון שהיא פוגעת בהבנת המשמעות של התהליך. יש אפילו ספרי לימוד שמציגים תרגילים כאלה כפתרון שמתבסס על ערך המקום, ולא מדגישים את חלקו של חוק הקיבוץ בתהליך, ראו איור 1 בהמשך.

ניתן לראות שבמהלך לימוד וביצוע חישובים בחיבור ובכפל בבית הספר היסודי, יש יתרון לאסטרטגיות שמייעלות את התהליך ומקילות על התלמיד את החישוב. אסטרטגיות אלו מתבססות על תכונות הקיבוץ והחילוף, אך הן מוצגות לתלמידים בצורה טכנית של כללים לביצוע. תלמידים לרוב קולטים את הטכניקות ומצליחים בעזרתן לייעל את תהליך החישוב, למרות שאינם מודעים לחוקים שבבסיסן. ייתכן שהטכניקה המקוצרת של המורים מסייעת להבנה אינטואיטיבית של חוקי הפעולות, אבל היא עלולה לקבע פרוצדורות טכניות ליעילות החישובים שחסרה בהן הבנת הסיבה להפקת תוצאה נכונה בתרגיל, ובכך היא פוגעת בהבנת המושגים הקשורים לאסטרטגיות אלו.

מתוך המאמרים

מאמר [1]

"תכונות הפעולות" הן רעיונות מתמטיים בסיסיים המודגשים בתוכניות הלימודים לבתי הספר היסודיים. תכונות אלו נמצאות בבסיס של אסטרטגיות חישוב והן משמשות ככלים לוגיים להוכחות. שילוב מושגים אלגבריים בחינוך מתמטי מוקדם הוא בעל חשיבות רבה ליכולת של

תלמידים להצליח בלימודי האלגברה בהמשך. מכאן החשיבות של פעולות החשבון והתכונות שלהן ללימוד של "חוקי החשבון" ו"אלגברה מוקדמת".

אומנם חשוב להיות מסוגלים להשתמש בתכונות הפעולות באופן מרומז באסטרטגיות חישוב, אך באותה מידה חשוב גם שתלמידים יפתחו מודעות מפורשת לתפקיד של התכונות בהצדקת אסטרטגיות חישוב אלה. הבנה של תכונות הפעולות כאוסף של "חוקים" המצדיקים מניפולציות מתמטיות יוצרת בהמשך בסיס ללמידה של אלגברה כהכללה של אותם חוקים. תכונות הפעולות חשובות גם כמגדירות את הפעולות ויוצרות את הכללים של אלגברה המהווים את הבסיס למבנה אלגברי. כלומר, הבנת תכונות אלה נחוצה להבין בצורה מלאה מהן פעולות החיבור או הכפל. הבנה זו מאפשרת את המעבר מהבנה אופרציונלית להבנה מבנית של מושגים מתמטיים. הוראת תכונות הפעולות יכולה להיות מורכבת, ולעיתים קרובות הן השורש של בלבול רב הן עבור התלמידים והן עבור המורים. במיוחד קשה ללמד את חוק הקיבוץ בחיבור ובכפל.

<u>מדוע להתמקד בחוק הקיבוץ?</u>

1. חוק הקיבוץ הוא אחת התכונות המגדירות את פעולות החיבור והכפל, ויש לו שימוש לא רק בחישובים פשוטים אלא גם באלגברה ויותר מכך.
2. משלוש תכונות הפעולות הנלמדות בבית הספר היסודי, חוק הקיבוץ פחות אינטואיטיבי מאשר חוק החילוף, ופחות ניתן לזיהוי מחוק הפילוג שבו מעורבות שתי פעולות שונות.
3. יש מעט מאוד מחקר על אודות ההוראה של חוק הקיבוץ, ואין כמעט שיטות הוראה לתלמידים.

חוק הקיבוץ בחיבור ובכפל חשוב מאוד להבנת הביצוע של חישובים אריתמטיים: חוק הקיבוץ בחיבור מתבטא באסטרטגיות נגזרות כמו: "תאומים+1", "השלמה לעשר" והאלגוריתם המקובל לחיבור עם העברה; חוק הקיבוץ בכפל מתבטא באסטרטגיות כמו "הוספת אפס" בכפל של כפולות של עשר.

תלמידים בכל גיל, מורים ואפילו כותבי חומרי למידה נוטים למזג בין חוק הקיבוץ לחוק החילוף, קרוב למדי משום ששתי התכונות מופיעות לרוב יחד באותו החישוב. נוסף על כך, קשה יותר להמחיש את חוק הקיבוץ מאשר את חוק החילוף. בחיבור – חוק החילוף מומחש באמצעות חילוף בין מקום הקבוצות החלקיות מתוך הקבוצה הכוללת, בכפל – הוא מומחש באמצעות מודל המערך המלבני, ואילו לחוק הקיבוץ אין המחשה מקבילה. בעיה נוספת היא שכדי להציג את חוק הקיבוץ נחוץ להוסיף סוגריים שידגישו איזו פעולה יש לבצע תחילה, למרות שמבחינת התרגיל הדבר לא הכרחי, לדוגמה: $(5+3)+2=5+(3+2)$. כאשר תלמידים נחשפים לפעולות החיבור והכפל בכיתות הנמוכות של ביה"ס היסודי לא משתמשים עדיין בסוגריים, והם יתקשו להבין את הצורך בהם לפני שהם לומדים על סדר הפעולות. חלק ממורים ומורי

מורים מתקשים לבנות דוגמאות מדויקות לחוק הקיבוץ בשל הכללת היתר, והבלבול שבינו לבין חוק החילוף. מורים מעטים בלבד מסוגלים להציג את החוק באמצעות המחשה. כמו כן, חלק מהם מתקשים להצדיק ולהסביר מדוע אסטרטגיית חישוב מסוימת יעילה ומניבה תוצאות. לכן הם מסתפקים בהסברת תהליך החישוב, ובתוך כך מדגישים את מציאת התוצאה ולא את מטרת לימוד אסטרטגיית החישוב.

<u>מהלך המחקר:</u>

המחקר המוצג במאמר [1] בדק את אופן ההוראה של 9 מורות בכיתות א'-ד' במהלך שיעורים רגילים בכיתה. השיעורים הוסרטו ומתוכם נבחרו 146 אפיזודות שבהן התרחשה הוראה של נושאים הקשורים לחוק הקיבוץ. לא הייתה שום התערבות של החוקרים בתהליך ההוראה, והמורות לימדו באופן רגיל.

<u>שאלות המחקר:</u>

א. האם ההוראה של חוק הקיבוץ נעשית באופן נכון? כיצד מורים מתמודדים עם הבלבול בין חוק הקיבוץ לחוק החילוף?
ב. האם המורים מדגישים במפורש את התפקיד של חוק הקיבוץ באסטרטגיות חישוב מגוונות?
ג. האם המורים מציגים את חוק הקיבוץ ככלל לביצוע, או כתכונה מבנית?
ד. האם המורים מצדיקים את חוק הקיבוץ בעזרת קשרים מפורשים וממשיים לדוגמאות מוחשיות ו/או מושגים כמותיים בסיסיים?

לניתוח תוצאות המחקר פיתחו החוקרים מסגרת תאורטית של ארבעה ממדים בהתאמה לשאלות המחקר:

א. ***נכונות ההוראה*** של חוק הקיבוץ מבחינה מתמטית והבחנה בינו לבין חוק החילוף.
ב. ***הוראה מפורשת*** של חוק הקיבוץ. התייחסות מפורשת לחוקי הפעולות בהקשר לפעולות החשבון מאפשרת לתלמידים בכיתות העל יסודי לדון ולהצדיק מניפולציות אלגבריות באופן מפורש.
ג. ***מבניות*** – התייחסות לחוק הקיבוץ כתכונה מובנית של הפעולה ולא ככלל לביצוע אסטרטגיית חישוב. במהלך לימוד הפעולות התלמידים עוברים מהבנה של הפעולה כפרוצדורה (למשל, חיבור הוא הוספה של כמות אחת לאחרת) ליצירת אובייקט של הפעולה (פעולת החיבור כמושג) הנדרש לצורך הבנה אלגברית של המושגים. הבנייה של חוקי הפעולות מסייעת להבין את הפעולות כמושגים, ולחשוף את המהות האלגברית של החשבון.

ד. ***הצדקה קונקרטית*** – לצערנו בבית הספר היסודי לא תמיד מקפידים להצדיק בעזרת המחשה את ההיגיון של הנלמד, כך שיהיה מובן לתלמידים. מורים נוטים להצדיק בשיטות שאינן מובנות לתלמידים, ולהשתמש בסימונים המתמטיים מבלי בסיס מוחשי מוצק. בעקבות כך התלמידים מבצעים מניפולציות על הסימונים הללו מבלי להבין את המשמעות שלהם (symbolic manipulation). קישור בין תכונה מופשטת, כמו חוק הקיבוץ למצבים קונקרטיים, מעגן את התכונה לאינטואיציות של התלמידים ומאפשר להם למצוא את ההיגיון במושגים מופשטים אלה.

לצורך ניתוח הממצאים נבנתה מסגרת התייחסות לקידוד מהלכי ההוראה על פי ארבעת הממדים, כמתואר בטבלה 1 להלן.

טבלה 1: מסגרת התייחסות לקידוד מהלכי ההוראה

ציון / ממד	0	1	2
נכונות	המתמטיקה באפיזודה לגמרי שגויה מבחינת החישוב, ההסבר, או הצגת חוק הקיבוץ.	האפיזודה מכילה מתמטיקה מבולבלת, או שגויה באופן חלקי. כולל בלבול בין חוקי הקיבוץ והחילוף.	חוק הקיבוץ מופעל נכון. החישוב המוצג נכון ומוצדק בעזרת חוק הקיבוץ. חוק הקיבוץ מזוהה נכון.
הוראה מפורשת	השימוש בחוק הקיבוץ נעשה באופן מרומז. למרות שחוק הקיבוץ נחוץ להצדקת החישובים שנעשו, אין שום ניסיון להתייחס אליו, להסבירו או להצדיק אותו.	השימוש בחוק הקיבוץ מפורש באופן חלקי. החוק הפורמלי לא נאמר ישירות או באופן מלא, אבל החישובים שבהם יש שימוש בחוק הקיבוץ מובלטים כצעד ספציפי בפתרון התרגיל. אך יש מעט דיון או הצדקה.	השימוש בחוק הקיבוץ נעשה במפורש ובאופן מלא. החישוב מקושר בצורה ברורה לחוק הפורמלי המופשט, זאת על ידי ציון שמו, או ניסוח הגדרתו המלאה.
מבניות	השיח על חוק הקיבוץ נעשה אך ורק באופן אופרציונלי, ומתייחס רק למה שנדרש כדי להשלים את החישוב. ההתייחסות לחוק היא ככלל ביצוע בתהליך החישוב. כך גם השיח על חוק הקיבוץ.	השיח על חוק הקיבוץ מובנה באופן חלקי. בעוד שהדגש הוא על החוק ככלל ביצוע, יש גם קצת ניסוח של החוק כתכונה מבנית של החיבור / הכפל. יכולה להיות התייחסות לזהות של הביטויים, אבל הדגש אינו על הבנה מבנית.	השיח על חוק הקיבוץ ברובו או כולו עוסק במבניות. חוק הקיבוץ מוצג כתכונה של הפעולות ולא כפרוצדורת חישוב. לדוגמה: "בפעולת החיבור לא משנה איזה זוג מספרים מחברים תחילה".
הצדקה קונקרטית	השימוש בחוק הקיבוץ נעשה ללא הצדקה. השיח מוגבל לפרטים טכניים כמו כללי חישוב, ואילו	השיח על חוק הקיבוץ מכיל הצדקה חלקית או שגויה. יש התייחסות ליחסים הכמותיים	הדיון על חוק הקיבוץ עוסק במלואו בהצדקה של החוק. היחסים הכמותיים שבבסיס החוק מוזכרים

	העקרונות הכמותיים המאפשרים מניפולציות כאלה אינם מובהרים. המורה לא מנסח מחדש תשובות שטחיות של תלמידים.	שבבסיס החוק אך לא נעשה דיון לעומק. רוב השיח עדיין עוסק בפרטים שטחיים של החוק. המורה מתייחס לתשובות התלמידים, אך לא מעמיק בהצדקתן.	באופן מפורש ומקושרים באופן הגיוני לתוכן הנלמד. לדוגמה: "מדוע שתי התשובות זהות?". תגובות שטחיות של תלמידים מקבלות משוב של שאלות עזר כדי לעורר תגובות מעמיקות יותר.

<u>תוצאות המחקר:</u>

הוראה מפורשת

99 מתוך 146 האפיזודות שנותחו עסקו בהוראת חוק הקיבוץ באופן מרומז בלבד. בהוראה זו לימדו אסטרטגיות חישוב כמו: "השלמה לעשר", עובדות הנגזרות מתוך "תרגילי תאומים" בחיבור ו"הכפלה וחצייה" בכפל. לא נעשה כל ניסיון לעודד את התלמידים לחשוב מדוע אסטרטגיות כאלה מביאות לתוצאות זהות. גם בספרי לימוד נמצאה עדות להוראת חוק הקיבוץ באופן מרומז בלבד. דוגמה באיור 1.

איור 1: שאלה לדוגמה מספר לימוד לכיתה ד' בנושא חוק הקיבוץ בכפל

<u>בעיה מילולית:</u>
ליצירת אנימציה ממוחשבת לסרט מצויר,
נדרשות כ־20 מסגרות לשנייה.
כמה מסגרות יש לצייר עבור סרט מצויר
באורך 30 שניות?

<u>דרך א' - בעזרת ערך המקום:</u>
צריך לעשות תרגיל כפל 30×20.
אפשר לחשוב על 20 כ־2 עשרות.
$30 \times 20 = 30 \times$ 2 עשרות
= 60 עשרות
$= 600$

<u>דרך ב' - בעזרת חוק הקיבוץ:</u>
אפשר לחשוב על 20 כ־10×2.
$30 \times 20 = 30 \times (2 \times 10)$
$= (30 \times 2) \times 10$
$= 60 \times 10$
$= 600$

תשובה: צריך לצייר 600 מסגרות בשביל לייצר סרט באורך 30 שניות.

שתי הדרכים משתמשות בחוק הקיבוץ באותו האופן בדיוק, אבל בדרך הראשונה מתייחסים במקום זה לערך המקום, ובמקום לכתוב את המספר 10 מופיעה המילה "עשרות". אין בדרך זו שום התייחסות מפורשת לחוק הקיבוץ. בדרך השנייה מזכירים אומנם את חוק הקיבוץ, אבל מראים רק את דרך החישוב, ולא מסבירים את העיקרון שלפיו פועל חוק הקיבוץ. אין אפילו הצגה של זהות בין שני התרגילים שמשני צידי סימן ה"שווה".

נכונות

מרבית ההוראה שנצפתה הייתה נכונה מבחינה מתמטית, אך מוגבלת לחישובים מדויקים. מתוך 146 האפיזודות שנותחו, 125 היו נכונות לחלוטין ו־20 נכונות באופן חלקי. רק אפיזודה אחת דורגה כלא נכונה באופן מוחלט. מתוך 20 האפיזודות שדורגו כנכונות באופן חלקי, הבעיה שנחשפה היא בלבול בין חוק הקיבוץ לחוק החילוף. בלבול זה התגלה כאשר המורות ניסו ללמד את חוק הקיבוץ באופן מפורש. לעומת זאת כאשר לא הייתה התייחסות מפורשת לחוק הקיבוץ אלא רק עיסוק בחישובים, לא נצפו שגיאות בהוראה. כלומר, למורים קל יותר להשתמש בעקבות ממצא זה בדקו החוקרים באיזו מידה מסוגלות המורות להפריד בין חוק הקיבוץ לחוק החילוף במצבים שבהם שני החוקים מופיעים יחד. רק ב־16 אפיזודות ניסו המורות להפריד בין שני החוקים. מתוכן רק בשלוש נצפתה הבחנה מפורשת בין שני החוקים, ורק באחת מהשלוש ההבחנה הייתה נכונה.

להלן דוגמה להסבר שגוי של מורה לדוגמה שהופיעה בספר הלימוד של הכיתה (איור 2):

איור 2: דוגמה להסבר שגוי של מורה לדוגמה שהופיעה בספר הלימוד

הדוגמה בספר הלימוד:

פתרו: $(4\times 9)\times 250$

חוק החילוף $250\times(4\times 9) = (4\times 9)\times 250$

חוק הקיבוץ $(250\times 4)\times 9 =$

$= 1000\times 9$

$= 9000$

ההסבר של המורה:

"טוב, אז בואו נתבונן בתרגיל 250 × 9 × 4. אנחנו נשתמש בחוק החילוף ונזיז את המספרים מצד לצד. ... אה, לא, הם נותנים לכם להשתמש בשני חוקים שונים בתרגיל אחד... הם נותנים לכם שני רעיונות או אסטרטגיות להשתמש כדי לפתור את התרגיל. אז אם תסתכלו, הדרך הראשונה, טוב, הם לא ממש מסבירים יותר מדי, הם רק הזיזו דברים מצד לצד. אז הם שמו את ה- 250 פה, כפול 4, כפול 9, בסדר?"

שמות החוקים מופיעים ליד התרגילים, אבל המורה לא ידעה להסביר את המשמעות של כל חוק והשתמשה בביטוי: "הזיזו דברים מצד לצד" (הכוונה היא להחלפת מקום המספרים בתרגיל). ביטוי נוסף שמורות השתמשו בו, ואשר מעיד על חוסר יכולת להבחין בין שני החוקים הוא: "ניתן לפתור בכל דרך שהיא".

מבניות

הצגה מבנית של חוק הקיבוץ הייתה שונה בין הכיתות, אבל ברוב המקרים ההצגה הייתה פרוצדורלית בדגש על אופן הביצוע ולא על המהות. רק באחת מכיתת ג' נצפתה הוראה מפורשת של חוק הקיבוץ שעסקה במבנה של החוק. כפי שהסבירה המורה:

> "חוק הקיבוץ אומר לנו מהי הדרך שבה אנחנו מקבצים את המספרים עם הסוגריים. זה לא משנה את הסכום. אפשר לקבץ אותם איך שרוצים בעזרת שימוש בסוגריים וזה לא משנה את הסכום".

גם בכיתה ד' הודגשו כמעט תמיד אסטרטגיות חישוב שכללו תיאורים ביצועיים רבים. לדוגמה: "כעת אני הולכת להשתמש בחוק הקיבוץ, ואני הולכת לכפול קודם את 250 ב־4". באף לא אחד מהתיאורים הובא אזכור לכך שמשתנה סדר הפעולות. במקום זאת המורות אמרו: "קודם תעשו את זה". גם המורה של כיתה ג' שהוזכרה לעיל, לא ציינה שקיבוץ המספרים בדרך שונה משפיע בעצם על סדר הפעולות שנעשה בתרגיל. כמו כן אין המחשה של רעיון קיבוץ הכמויות באופן שונה.

הצדקה קונקרטית

לבדיקת היכולת של המורות לספק הצדקה קונקרטית נבחרו רק האפיזודות שבהן חוק הקיבוץ נלמד במפורש באופן מלא או חלקי. מתוך 47 אפיזודות כאלה, 35 מהן (שנפרסו על פני כל הכיתות) לא כללו שום הצדקה קונקרטית משמעותית. להלן דוגמה לניסיון של מורה בכיתה ג' להצדיק את חוק הקיבוץ בחיבור:

> "טוב, אלה מילים גדולות. חוק הקיבוץ אומר שהדרך שבה המחוברים, המספרים שמחברים ביחד, הדרך שבה מקבצים אותם, לא משנה את הסכום. חוק הקיבוץ הוא כשרואים בתרגיל את הסוגריים האלה".

ניכר ניסיון של המורה להתייחס לרעיון של ה"קיבוץ", ולהסביר שהסוגריים נועדו לציין אילו מספרים צריך לחבר תחילה. אבל היא הדגישה את הפרטים השטחיים של אופן כתיבת התרגיל, ולא התייחסה למהות של החוק. כמו כן, היא לא קישרה את רעיון ה"קיבוץ" להמחשה קונקרטית. המורה רק ציינה שצריך לחבר תחילה את מה שמקובץ ללא התייחסות לתוכן שיהפוך רעיון זה למשמעותי.

היו מורות שאפשרו לתלמידים להיעזר בקוביות מתחברות כדי להמחיש אסטרטגיות חישוב שמבוססות על "השלמה ל־10" או "תאומים+1". אִילו היו מקשרות זאת גם לעֶקרון הקיבוץ היה אפשר לראות בכך הצדקה קונקרטית. לדוגמה (תרגיל המבוסס על "השלמה ל־10"):

$$6+7=6+(4+3)=(6+4)+3=10+3=13$$

התלמידים יוצרים קבוצה של 6 קוביות מחוברות וקבוצה של 7 קוביות מחוברות, מצב המקביל לביטוי $6+7$. לאחר מכן הם מפצלים את קבוצת ה־7 קוביות לשתי קבוצות של 3 ושל 4, מצב שמקביל לביטוי $6+(4+3)$. בשלב הבא הם מקבצים את 6 הקוביות עם 4 הקוביות ו־3 קוביות נשארות נפרדות, מה שמקביל לביטוי $6+(4+3)$. מתקבלת קבוצה של 10, ולצידה עוד קבוצה של 3, מה שמקביל לביטוי $10+3$. בסך הכול מתקבלות 13 קוביות. בשום שלב לא נוספו ולא נגרעו קוביות מחוץ לשתי הקבוצות המקוריות, כלומר הכמות הכוללת נשארת זהה. זוהי המהות של חוק הקיבוץ, וכך ניתן להמחיש אותו בעזרת ביצוע מיפוי בין מה שנעשה בקוביות לבין כל חלק בתרגיל (שמכיל בעצם זהות בין מספר תרגילים).

באותו האופן ניתן להמחיש ולהסביר את הזהות הבאה המבוססת על "תאומים+1":

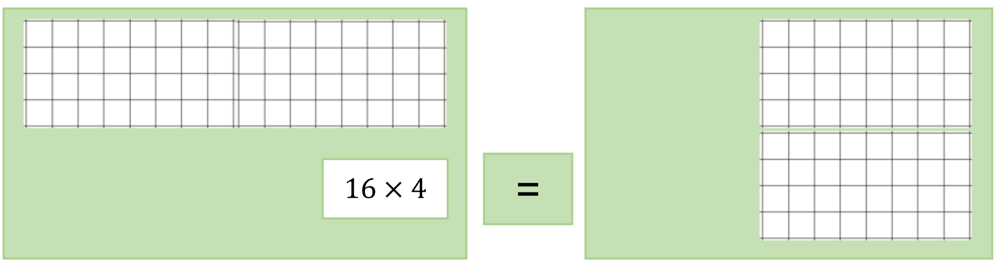
$$6+7=6+(6+1)=(6+6)+1=12+1=13$$

אחת המורות בכיתה ד' המחישה את חוק הקיבוץ בכפל בעזרת מודלים של שטח (איור 3).

איור 3: דוגמה להמחשה של אסטרטגיה המשתמשת בחוק הקיבוץ

כדי לפתור את התרגיל 16×4 אפשר לעשות חצייה והכפלה כך ש־

$$16\times4=(8\times2)\times4=8\times(2\times4)=8\times8=64$$



למרות שמורה זו לא הזכירה את הביטוי "חוק הקיבוץ" במפורש, הרי שהיא דאגה לבצע מיפוי בין האסטרטגיה של חצייה והכפלה המבוססת על העיקרון של חוק הקיבוץ, לבין המחשת השוויון של שני התרגילים בעזרת מודל השטח.

סיכום ומסקנות:

מחקר זה בדק כיצד מורות מלמדות את חוק הקיבוץ בכיתותיהן. באופן כללי זיהה המחקר שלוש מגמות: דגש יתר על אסטרטגיות חישוב; אי־קישור בין מוחשי למופשט; בלבול בין חוק הקיבוץ לחוק החילוף בכיתות הנמוכות של ביה"ס היסודי.

1. ***דגש יתר על אסטרטגיות חישוב:*** במרבית הכיתות חוק הקיבוץ נלמד בהקשר לאסטרטגיות חישוב שונות, וכמעט תמיד באופן מרומז בלבד. גם בספרי הלימוד חוק הקיבוץ מוצג רק בהקשר לאסטרטגיות חישוב, ואין מדגישים את החוק כאחת התכונות. ראוי לציין כי ישנה התלבטות אצל אנשי החינוך המתמטי בנוגע לשאלה, באיזו מידה יש ללמד באופן ישיר אסטרטגיות חישוב שונות בכיתות הנמוכות, או עדיף לאפשר לתלמידים לפתח אותן באופן אינטואיטיבי מתוך הניסיון המתמטי וההבנה העצמית שלהם. המחקר גם הראה שהדגש על הוראת אסטרטגיות חישוב היה במציאת התשובה, ולא הוסבה תשומת לב לביטויים המתמטיים שהיו בבסיס החישוב, שיש בהם הזדמנויות להכנה לקראת "אלגברה מוקדמת" (אותם ביטויים המציגים בעצם את חוק הקיבוץ). למרות שחוק הקיבוץ מופיע בחלק ניכר מאסטרטגיות חישוב חשובות הנלמדות בכיתות הנמוכות, הוא איננו אסטרטגיה. אם לא מלמדים את התלמידים להבחין בין אסטרטגיה לתכונה, הם יתקשו לעשות העברה של הידע שלהם על התכונות לתחומי מתמטיקה מתקדמים כמו אלגברה. כמו כן, התלמידים מאבדים את היכולת לראות את חוק הקיבוץ כתכונת־על המשפיעה על אסטרטגיות חישוב שונות ומופיעה בפעולות שונות (חיבור וכפל), ותחת זאת הם מתייחסים אליו באותה היררכיה כמו יתר האסטרטגיות. אסטרטגיה היא מטבעה מושג ביצועי, שכן אסטרטגיות עוסקות בפעולות שמבצעים. לעומתה, תכונה היא דבר קיים. כאשר מדגישים את התהליך למציאת תשובה לא נותר מקום לחשוב על המבניות שהתכונה כופה על ביטויים מתמטיים שונים. כדי לפתח הבנה גמישה שמאפשרת העברה ויישום במצבים חדשים, תלמידים צריכים להיות מסוגלים ליצור "סכמות" שיוצרות מבניות של ביטויים חשבוניים, העונות על השאלה: "מדוע האסטרטגיות מניבות תוצאה נכונה?" ולא רק על השאלה "איזו אסטרטגיה יעילה יותר?". החוקרים מדגישים כי ברור להם שלא ניתן ללמֵד את תכונות הפעולות באופן מבני בלבד. המבניות צריכה להתפתח מתוך הביצועיות באופן הדרגתי, ככל שהתלמידים מכירים טוב יותר את הפרוצדורות הביצועיות. מורים יכולים להטות את החשיבה של התלמידים מביצועית לכיוון של מבנית באמצעות שאילת שאלות על היחסים הכמותיים שבבסיס החישוב, כמו "מדוע שתי האסטרטגיות נותנות אותה תוצאה?"

2. ***אי־קישור בין מוחשי למופשט:*** בכיתות א'-ב' שבהן השתמשו לפעמים בהמחשה, לא הייתה התייחסות מפורשת לחוק הקיבוץ, ואילו בכיתות ג'-ד' שבהן היו פעמים שבהן הוצג חוק הקיבוץ באופן מפורש, לא היה שימוש בהמחשה. כלומר, הצגת חוק הקיבוץ באופן פורמלי לא קושרה כלל להצדקה מוחשית אינטואיטיבית שלו. קישור בין ייצוגים מוחשיים למופשטים הוא קריטי לפיתוח הבנה. הקושי לעשות קישור מתאים בין חוק הקיבוץ לבין הצדקות קונקרטיות יוצר אצל תלמידים שלוש בעיות:

(א) הוא מאפשר התפתחות של "סכמת הצדקה חיצונית" לנכונות של חוק הקיבוץ, שבה התלמידים מסתמכים על מקורות סמכות (המורה) להצדקת החוק במקום להסתמך על הצדקה הגיונית.

(ב) הקושי פוגע ביכולת של התלמידים לבצע חיבורים בתוך אסטרטגיות קשורות שכבר נלמדו, כמו בין האסטרטגיה של "השלמה ל־10" לבין האסטרטגיה של "תאומים+1", ובכך מונע העברה של ההבנה שנרכשה בעת לימוד חוק הקיבוץ באופן מרומז למצבים חדשים.

(ג) הקושי עלול להשפיע באופן שלילי על תפיסת תכונת הקיבוץ באופן פורמלי כאשר היא תוצג בפני התלמידים. זאת מכיוון שללא היכולת לקשר את הטרמינולוגיה החדשה להבנה שנרכשה בעבר, הם עלולים להיתפס לצדדים הטכניים כמו, "שינוי מיקום הסוגריים" במקום למשמעות המהותית של התכונה. כדי לקשר בצורה מיטבית יותר בין המוחשי למופשט, ניתן ליישם שיטות שבהן עוברים בהדרגה מייצוגים מוחשיים לייצוגים מופשטים. במקרה של חוק הקיבוץ בחיבור, לדוגמה, ניתן להתחיל את ההיכרות עם יצירת קבוצות סביב בעיות מציאותיות והמחשה שלהן בעזרת חומרים כמו קוביות ודיסקיות, או מודלים ליניאריים (ציר המספרים) ומסגרות עשר. בשלב השני לקשר לביטויים מתמטיים ולבסוף לסימונים אלגבריים ותכונות פורמליות (ראו דוגמאות לעיל בסעיף של "הצדקה קונקרטית").

3. ***בלבול בין חוק הקיבוץ לחוק החילוף בכיתות הנמוכות*** – האם היא בעיה או שהדבר בלתי נמנע? מחקרים מראים שהבלבול בין שני חוקים אלה מופיע גם בקרב תלמידים בכיתות העל-יסודי, וגם בקרב פרחי הוראה במכללות להכשרות מורים. המחקר הנוכחי מראה שבלבול זה מתחיל מוקדם בהוראת מתמטיקה כבר בכיתות היסוד. הבלבול הופיע בכל כיתות הלימוד של המחקר, אך בלט במיוחד בכיתות א'-ב', והביטוי השכיח היה "כל מה שמהווה דרך". נשאלת השאלה, האם הביטוי "כל מה שמהווה דרך" אינו ראוי לשימוש בכיתות הנמוכות, שכן למרות שהוא מערבב בין שני החוקים הוא נכון מבחינה מתמטית? מה גם שההבחנה בין שני החוקים בשלב זה מאוד עדינה (ותלויה בהבנה של החיבור כפעולה בינרית). ניתן לטעון שלא ראוי לצפות מתלמידים בכיתות היסוד להבחין בין שני חוקים אלה. חוקרי המחקר הנוכחי מאמינים שבשלב כלשהו צריך להבהיר לתלמידים שהכלל "כל מה שמהווה דרך" הוא מיזוג של שתי תכונות. השלב הרצוי הוא אחרי

שהתלמידים קלטו את הרעיון שהפעולות הן בינריות, וכל אחד מהחוקים נלמד בנפרד באופן פורמלי (הרעיון שהחיבור הוא פעולה בינרית הוצג באחת מכיתות א' באמירה: "כדי לחבר שלושה מספרים, מחברים בכל פעם שניים מהם"). למרות שהיו כיתות שבהן נלמדו חוק החילוף וחוק הקיבוץ בנפרד, הרי שבשום שלב לא נעשתה העברה מהכלל "כל מה שמהווה דרך" להתייחסות לכל חוק בנפרד. אכן, קשה להבחין בין שני החוקים משום ששניהם תמיד מופיעים יחד (בפעולות החיבור והכפל), אבל כן ניתן להציג דוגמאות נגדיות שבהן חוקים אלה אינם תקפים, כמו בפעולת החיסור.

למחקר זה ישנן מספר מגבלות: קבוצת המורות שנבדקה הייתה קטנה וכולן לימדו באותו בית ספר. ייתכן שקשה להכליל את הממצאים לאוכלוסיות אחרות. גם כמות השיעורים שנבדקה הייתה מוגבלת, ולא הכילה את כל משך ההוראה של כל מורה, אם כי השיעורים נבחרו בקפידה אחרי ניתוח של ספרי הלימוד ובהתייעצות עם המורות. החוקרים מודים, שלא לגמרי ברור עד כמה צריך לקדם את הוראת חוק הקיבוץ בכיתות היסוד, במיוחד בנוגע להוראת המבניות של החוק וההבחנה בין חוק הקיבוץ לחוק החילוף. נדרש מחקר נוסף כדי לבסס תמונה ברורה של מידת ההוראה האידיאלית. ייתכן שניתן להיעזר בניתוח משווה של ספרי לימוד המלמדים נושא זה במדינות המציגות הישגים גבוהים במתמטיקה. לבסוף, מחקר זה מתמקד בדרכי ההוראה של המורות, ולא מציג את ההבנה של התלמידים. יש לערוך מחקרים נוספים שיבדקו כיצד דרכי ההוראה שנצפו במחקר זה משפיעות על ההבנה של תלמידים את חוק הקיבוץ.

מאמר [2]

מטרת־על בכל תחום היא הבנת העקרונות הבסיסיים שלו. חוקי הפעולות הנלמדים בבית הספר היסודי הם עקרונות מתמטיים בסיסיים, והבנתם המפורשת היא קריטית ללמידת האלגברה בהמשך, וליכולת לפעול עם ביטויים אלגבריים בצורה משמעותית. עם זאת, במרבית השיעורים בבית הספר היסודי העוסקים בחישובים המבוססים על חוקי הפעולות, מודגש הצורך להשיב תשובות מהירות ללא הבנה מעמיקה של התכונות המאפיינות את חוקי הפעולות. ייתכן שהוראה מבוססת פרוצדורה שכזאת נובעת מידע מתמטי "חלש" של המורים בנושא זה. המחקר המוצג במאמר [2] בודק את הידע של פרחי הוראה על אודות חוקי הפעולות בדגש על חוק הקיבוץ בכפל $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$. כמו כן הוצגה במאמר סקירה של חומרי ההוראה העומדים לרשות המורה לצורך לימוד הנושא.

תלמידים בבית הספר היסודי מתקשים להצדיק את חוק הקיבוץ בכפל הרבה יותר מאשר את חוקי הפעולות האחרים. הכרחי על כן שהמורים יהיו מסוגלים לעזור להם למצוא את ההיגיון שבחוק זה. החוקרים במחקר המוצג במאמר [2] חשבו שכדאי להסב תשומת לב להבנה של פרחי ההוראה על אודות רעיון מתמטי בסיסי כזה, שלכאורה איננו מסובך.

חוק הקיבוץ בכפל (יחד עם חוקי הפעולה האחרים) מאפשר לבצע חישובים של תרגילי כפל בגמישות ולהקל על התלמידים את החישוב. לדוגמה: $(3 \times 4) \times 25 = 3 \times (4 \times 25)$ בתרגיל זה חוק הקיבוץ מאפשר לכפול תחילה את הגורמים שיניבו את התשובה 100, שאותה קל יותר לכפול ב־3 (במקום הצורך לכפול 12 ב־25). גם כאשר תלמידים נדרשים לכפול 2×80, והם כופלים 2×8 ובשלב שני מזיזים את כל הספרות מקום אחד שמאלה, ורושמים 0 במקום של ספרת האחדות, הם בעצם מפעילים את חוק הקיבוץ:

$$2 \times 80 = 2 \times (8 \times 10) = (2 \times 8) \times 10$$

הבנת ההיגיון שמאחורי הפרוצדורות היא תנאי הכרחי להצדקתן. כמו כן, הכרת התכונה שבבסיס החישוב מאפשרת לתלמידים לעשות העברה של הבנה זו לתכנים חדשים. לדוגמה: כדי לפתור את המשוואה $11 = \square \times \frac{1}{3}$ הם יכולים להיעזר בחוק הקיבוץ בבואם לכפול את שני אגפי המשוואה ב־3:

$$3\left(\frac{1}{3} \times \square\right) = 3 \times 11 \quad \rightarrow \quad \left(3 \times \frac{1}{3}\right) \times \square = 33$$

דרישת הקְדם ממורים לצורך הצגת חוקי הפעולות היא ההבנה, שיש להקנות לתלמידים את שלושת המרכיבים הבאים: הגדרה / תיאור של החוק, הנוסחה של החוק ודוגמאות חישוביות. את חוק הקיבוץ בכפל ניתן לתאר כך: "כאשר כופלים שלושה מספרים, זה לא משנה אם מתחילים מכפל זוג המספרים הראשון, או מכפל זוג המספרים האחרון". הנוסחה היא $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ ודוגמה חישובית היא $(3 \times 4) \times 25 = 3 \times (4 \times 25)$.

מחקרים מעטים בדקו את הידע של מורים ופרחי הוראה בנושא חוק הקיבוץ בכפל.[6] מחקר אחד הראה שמורים חשבו כי חוק הקיבוץ וחוק החילוף תלויים זה בזה, משום ששניהם עוסקים ב"שינוי סדר". הסטודנטים להוראה לא שמו לב *שחוק החילוף עוסק בשינוי סדר המספרים*, בעוד *שחוק הקיבוץ עוסק בשינוי סדר הפעולות*. מורים אחדים חשבו שהחוקים זהים, אלא שחוק החילוף מופיע כשיש שני מספרים, ואילו חוק הקיבוץ מופיע כשיש שלושה מספרים. ידע של מורים על אודות חוק הקיבוץ בכפל (תיאור, נוסחה ודוגמה חישובית) לא מבטיח שהם ידעו להשתמש בו בבואם להקנות הבנה. עליהם לרכוש גם ידע על האופן שבו ניתן להשתמש בייצוגים כדי להמחיש את החוק בדרכים משמעותיות. זאת משום שהגדרה / תיאור ונוסחה הם מופשטים וכלליים (המכונים "ידע דקלרטיבי"), והתלמידים צריכים לבנות אותם לעצמם כדי שיוכלו ליישמם במצבי פעולה. לכן המורים צריכים להשתמש בתכנים מוחשיים כדי לסייע לתלמידים לפענח את הידע הדקלרטיבי, ולהבין את ההיגיון של הרעיונות המופשטים כבר בראשית למידת הנושא.

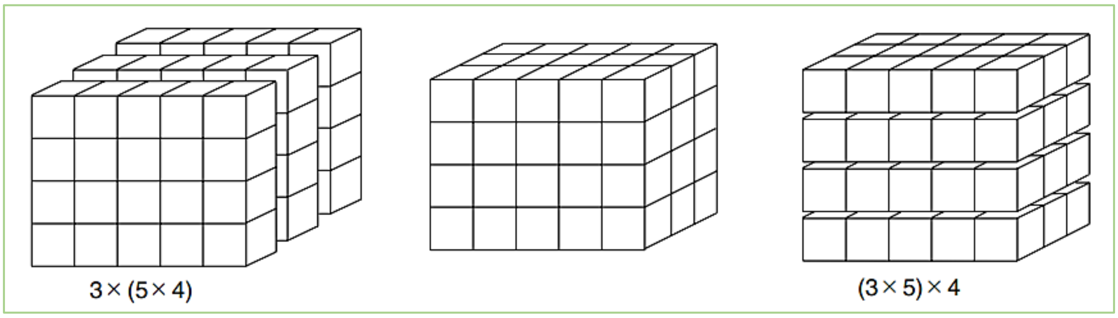
---

[6] כל המחקרים המצוטטים בהקשר זה הם פרי עטם של החוקרות מישראל (Tirosh, Hadass, & Movshovitz-Hadar,1991; Zaslavsky & Peled, 1996).

מחקרים מציעים שתי דרכים להמחיש את חוק הקיבוץ בכפל: באמצעות מודל של נפח; באמצעות המחשה של בעיה מילולית שבה צריך לכפול שלוש כמויות זו בזו.

א. בהמחשה באמצעות ***מודל של נפח*** יוצרים תיבה מקוביות שהנפח שלה מתבטא בנוסחה $a \times b \times c$, למשל $3 \times 5 \times 4$. ניתן לפרק את התיבה בשני אופנים: שלוש שכבות של 5×4 או ארבע שכבות של 3×5 (איור 4 א').

איור 4 א': הצגת חוק הקיבוץ בכפל באמצעות מודל הנפח

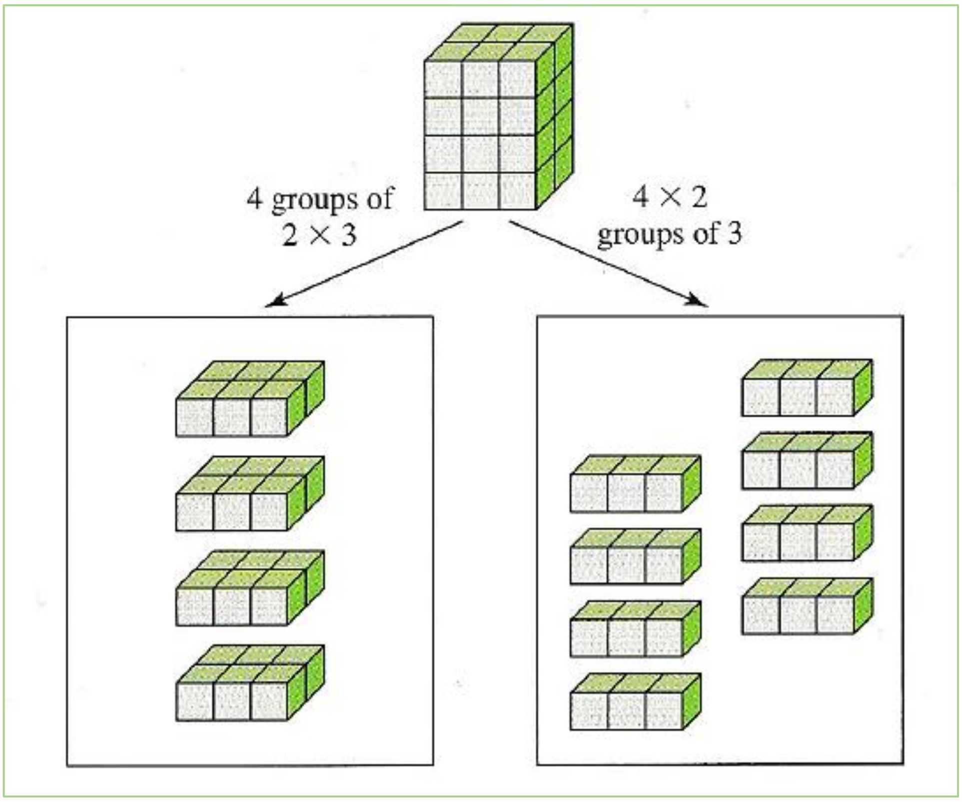


(לקוח מכאן)

החוקרים מציינים, שיש בעייתיות כלשהי בהצגה כזו של חוק הקיבוץ, מכיוון שאם מתייחסים למשמעות הכפל במובן של קבוצות או פעמים, הרי שנהוג לומר: שלוש קבוצות של... או ארבע פעמים... כלומר מספר המראה את מספר הקבוצות צריך להיות הראשון, ולהופיע בתרגיל בצד שמאל. אבל כדי להראות את חוק הקיבוץ (ולשמור על סדר המספרים בשני התרגילים) צריך למעשה להגיד: "(3×5) ארבע פעמים" וזה יכול לבלבל את התלמידים הצעירים שנמצאים עדיין בשלבים ראשונים של רכישת מושג הכפל.

משום כך החוקרים מעדיפים להציג את מודל הנפח באופן קצת שונה (איור 4 ב').

איור 4 ב': הצגת חוק הקיבוץ בכפל באמצעות מודל הנפח

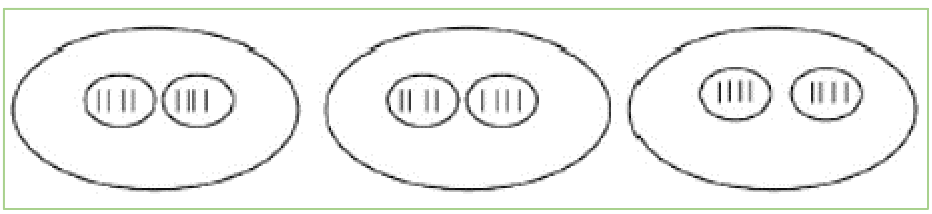


באיור 4ב' יש הקבלה בין ארבע קבוצות של (2×3) לבין (4×2) קבוצות של 3 וכך חוק הקיבוץ מוצג באמצעות הזהות $(4 \times 2) \times 3 = 4 \times (2 \times 3)$. עם זאת, מציינים החוקרים, שהמחשה של חוק הקיבוץ באמצעות מודל הנפח עלולה להיות מורכבת מדי ללמידה ראשונית של החוק, משום שניתן לפרק את התיבה בדרכים שונות, שחלקן אינן מייצגות את חוק הקיבוץ.

ב. בהמחשה באמצעות ***בעיה מילולית*** יש לבחור בעיה שבה נדרש לכפול שלוש כמויות זו בזו. לדוגמה:

מיתרים לגיטרת בס מגיעים באריזות של 4. בכל קופסה יש 2 אריזות.
מוסיקאי הזמין 3 קופסאות. כמה מיתרים הוא יקבל?
התרגיל הנדרש הוא $4 \times 2 \times 3$ (איור 5).

איור 5 : הצגת חוק הקיבוץ בכפל באמצעות בעיה מילולית



ניתן להציג את מבנה הבעיה בשני אופנים: (3×2) קבוצות של 4 מיתרים, או 3 קופסאות של (2×4) מיתרים. שתי הדרכים מייצגות יחד את חוק הקיבוץ בכפל:

$$(3 \times 2) \times 4 = 3 \times (2 \times 4)$$

מחקרים מראים שפרחי הוראה יכולים לשפר את הידע שלהם כיצד להורות באמצעות שימוש בספרי לימוד של בית הספר היסודי במהלך ההתנסות שלהם בהוראה.

<u>שאלות המחקר</u> (ראה שאלון המחקר באיור 6):

1. כיצד פרחי הוראה מבינים מהו חוק הקיבוץ בכפל?
2. כיצד פרחי הוראה מציגים את חוק הקיבוץ בכפל תוך שימוש בתכנים קונקרטיים? מהם הקשיים והמחסומים בעשייה כזו?
3. מה הפוטנציאל של ספרי הלימוד בהכנת פרחי ההוראה להוראה משמעותית של חוק הקיבוץ בכפל?

איור 6: שאלון המחקר שניתן לפרחי ההוראה

נסחו את חוק הקיבוץ של פעולת הכפל: א. במילים. ב. בנוסחה.

1. כיצד תשתמשו בחוק הקיבוץ כדי לכפול את המספרים 2, 4, ו־5?
2. האם תוכלו באמצעות ציור להראות ולהסביר מדוע חוק הקיבוץ בכפל "עובד"? השתמשו במספרים 2, 3, ו־4 (רמז: קַשרו את ההסבר שלכם למשמעות הבסיסית של הכפל).
3. כיצד תשתמשו בשאלה המילולית הבאה ללמֵד תלמידים בכיתה ג' או ד' את הרעיון של חוק הקיבוץ?
   עפרונות מגיעים בקבוצות של 4. בכל קופסה יש 2 קבוצות של עפרונות.
   אם המורה מזמינה 3 קופסאות, כמה עפרונות היא תקבל?

משתתפי המחקר היו 56 סטודנטים באחת האוניברסיטאות בארה"ב, שלמדו בתוכנית להוראת מתמטיקה בבית הספר היסודי. הם התבקשו להשיב על השאלון לפני שלמדו בקורס את נושא חוק הקיבוץ, במטרה לגלות מה הידע הבסיסי שחסר לפרחי ההוראה לצורך הוראת נושא חוק הקיבוץ בכפל.

תוצאות המחקר

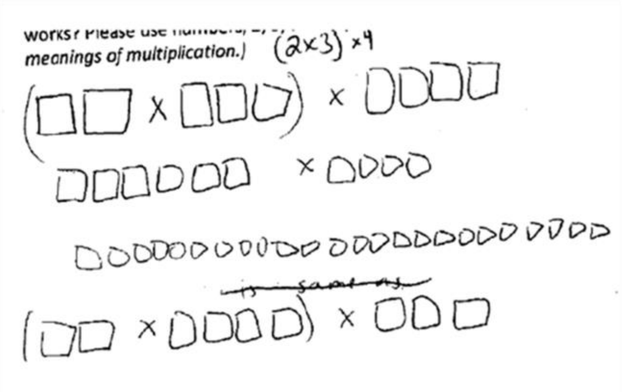
לשאלה 1א, תשובה נכונה הייתה ביטויים שבהם נאמר שניתן לקבץ את שני המספרים הראשונים, או את שני המספרים האחרונים והמכפלה לא תשתנה. דוגמה לתשובה שגויה הייתה, "שזה לא משנה מה הסדר שבו כופלים את המספרים כי התשובה תישאר אותו הדבר" (בלבול עם חוק החילוף).

לגבי שאלה 2, הגיעו החוקרים בדיעבד למסקנה שהשאלה הייתה צריכה להיות מנוסחת כך: "הציגו דוגמה לחוק הקיבוץ בכפל עם המספרים 2, 4 ו־5". זאת משום שבאופן שהשאלה נוסחה לא נדרש להראות את הזהות של שני ביטויים, כפי שמראה הנוסחה האלגברית.

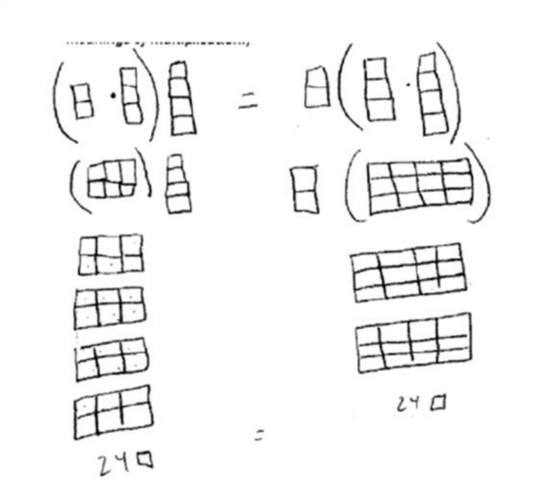
לגבי שאלות 3 ו־4, תשובות נחשבו כנכונות אם הן התבססו על המשמעות של הכפל, והציגו את הפתרון לבעיה בשתי דרכים שונות שיחד מראות את חוק הקיבוץ. המחשה נחשבה לנכונה אם היא הייתה דומה למה שמופיע באיורים 4 או 5.

56 פרחי ההוראה שנבדקו הראו תוצאות עגומות למדי לגבי חמש השאלות שנשאלו.
לשאלה 1א – תיאור חוק הקיבוץ בכפל במילים: רק 14% השיבו תשובה מלאה נכונה, ו־11% השיבו תשובה חלקית.
לשאלה 1ב – כתיבת נוסחה: 30% ידעו לכתוב נכון את הנוסחה, ועוד 10% כתבו נוסחה חלקית. חלק מפרחי ההוראה כתבו דוגמה חישובית במקום נוסחה אלגברית באותיות.
לשאלה 2 – לתת דוגמה חישובית לחוק הקיבוץ בכפל: רק 25% ידעו לרשום זאת כזהות בין שני ביטויים.
לשאלה 3 – להביא המחשה: רק 2% ידעו להמחיש זאת בצורה נכונה ומלאה, ועוד 7% בצורה חלקית. המחשה נחשבה נכונה אם היא כללה את פתרון הבעיה בשתי הדרכים שחוק הקיבוץ מאפשר, והתייחסות למשמעות הכפל. כמחצית מפרחי ההוראה הראו קושי לייצג את הכפל בצורה נכונה (איור 7).
לשאלה 4 – הוראה בעזרת בעיה מילולית: שום פרח הוראה לא ידעה להשתמש בבעיה המילולית שהוצגה לה באופן כזה שהתלמידים ילמדו את חוק הקיבוץ בכפל בצורה נכונה, ו־16% עשו ניסיון שהיה נכון באופן חלקי. פרחי ההוראה ששגו הציגו דרך אחת בלבד שהייתה בעצם מכוונת לפתרון הבעיה, ולא להבהרת המהות של חוק הקיבוץ.

איור 7 – דוגמאות להמחשה שגויה של משמעות הכפל:



בשורה הראשונה הריבועים מייצגים את המספרים שבתרגיל. אין התייחסות לרעיון של קבוצות שוות, או של כמות שמכפילה את עצמה. בעקבות כך, מתחת לחמשת הריבועים שבשורה הראשונה מצוירים שישה ריבועים, ומתחת לעשרת הריבועים שמופיעים בשורה השנייה מצוירים 24 ריבועים. כלומר, ההמחשה היא שגויה.



בדוגמה זו רעיון חוק הקיבוץ בכפל מוצג נכון כזהות בין שני התרגילים, אבל הייצוג של הכפל אינו נכון. אם נסתכל על הייצוג שבצד ימין, ניווכח שבשורה הראשונה כמות הריבועים היא $4 + 3 + 2$ במקום $4 \times 3 \times 2$ (הייצוג הנכון מופיע באיורים 4א, 4ב, 5). לעומת זאת, בשורה השנייה בצד ימין מצוירים $12 + 2$ במקום 2×12 ריבועים. המחשה זו לא מייצגת את משמעות הכפל כחיבור של קבוצות שוות, או ככמות שמכפילה את עצמה.

אחת הטעויות השכיחות הייתה בלבול בין חוק הקיבוץ לחוק החילוף: כמענה לבקשה לתאר את חוק הקיבוץ במילים השיבו פרחי הוראה רבים, שניתן לסדר את המספרים איך שרוצים. גם בכתיבת הנוסחה או דוגמה חישובית לחוק הקיבוץ, רובם החליפו את מקום האותיות והמספרים במקום להחליף את סדר הפעולות (טבלה 2).

טבלה 2: אחוז המקרים של בלבול בין חוק הקיבוץ לחוק החילוף

השאלה	אחוז הבלבול
1א' - תיאור חוק הקיבוץ בכפל במילים	55%
1ב' - תיאור חוק הקיבוץ בכפל בנוסחה	53%
2 - דוגמה חישובית	56%
3 - המחשה בציור או בתרשים	84%
4 - הוראה בעזרת בעיה מילולית	90%

בדיקת אופן הוראת חוק הקיבוץ בספרי לימוד שבהם משתמשים להכשרת פרחי הוראה העלתה שיש מעט מאוד התייחסות לחוק הקיבוץ, והוא מוצג באופן אלגברי, בהסבר מילולי ומלווה בדוגמאות חישוביות. ההסבר המילולי לא היה מספיק חד־משמעי עבור לומדים שניכר אצלם בלבול בין חוק הקיבוץ לחוק החילוף. חסרה בספרי הלימוד המחשה לחוק הקיבוץ בצורה גרפית, או בעזרת בעיה מילולית, אם כי חוקי החילוף והפילוג מלווים באיורים.
בספרי הלימוד שמהם לומדים בבית הספר היסודי חוק הקיבוץ מוצג באופן שונה בכל שכבת גיל. טבלה 3 להלן מפרטת זאת בהתאם לפרמטרים של שאלון המחקר.

טבלה 3: שכיחות הופעת חוק הקיבוץ בספרי הלימוד בכיתות השונות

חוק הקיבוץ	כיתה ג	כיתה ד	כיתה ה	כיתה ו
הגדרה	1	4	1	1
נוסחה	0	0	1	1
דוגמה חישובית	7	9	4	5
ייצוג בציור	1	1	0	0
ייצוג בבעיה מילולית	1	1	0	0

בכיתות הנמוכות (ג'-ד') חוק הקיבוץ תואר במילים: "כדי לקבץ גורמים ביחד, הסוגריים מראים אילו גורמים יש לכפול קודם". לתיאור זה צורפו דוגמאות חישוביות נכונות. כמו כן, עיקר האזכור של החוק הופיע בדוגמאות החישוביות. השימוש בבעיה מילולית היה לצורך הצגת תרגיל כפל של 3 גורמים, ולאחריו הוצג חוק הקיבוץ כשתי דרכים שונות לביצוע החישוב. כלומר, הודגש הצד הטכני של החוק ולא המהות שלו. גם משמעות הכפל לא הודגשה באמצעות הבעיה

המילולית, ולא נמצאה אחידות בהצגת שני התרגילים לגבי מהו הכופל (מספר הקבוצות/פעמים).

בכיתות הגבוהות (ה'-ו') חוק הקיבוץ הופיע כחזרה לנלמד בכיתות הנמוכות עם תוספת הנוסחה. כמו כן נעשה הוצג יישום של החוק בחישובים, כולל שברים.[7]

<u>סיכום ומסקנות</u>:

- האופנים שבהם מוצגים נושא הכפל וחוק הקיבוץ בכפל בספרי הלימוד של בית הספר היסודי תואמים את חוסר ההבנה של פרחי ההוראה בנושאים אלה. מחקרים קודמים שהבליטו את הבלבול של פרחי הוראה ושל מורים בנוגע לחוקי הקיבוץ והחילוף, מעריכים שהדבר נובע מהאופן שבו הוצג בפניהם הנושא בהיותם כתלמידים. גם בספרי הלימוד שנבדקו, נמצא ששני חוקים אלה מוצגים על פי רוב יחד ללא הדגשת ההבדל ביניהם. ממצאי מחקר זה מעידים שיש לפעול לשבירת מעגל ההוראה-למידה השגוי. ההבנה המעורפלת שיש למורים ולפרחי ההוראה לגבי חוקי הקיבוץ והחילוף מאפשרת להם רק ללמד פרוצדורות חישוב הנובעות מחוקים אלה, אך לא מאפשרת לזהות את החוקים בצורה נכונה, לדון במהות שלהם, ולא לאפשר לתלמידים לפתח יכולות של חשיבה והנמקה מתמטיות בקשר אליהם.
- בעיה נוספת שעלתה מתוך ממצאי המחקר הזה היא הקושי של פרחי הוראה להשתמש בבעיה מילולית להצגת חוק הקיבוץ כזהות בין שני תרגילים. הם נטו להתמקד בפתרון הבעיה המילולית לצורך מציאת התוצאה, ולכן הציגו רק תרגיל אחד. למרות שבספרי הלימוד נוהגים להשתמש בבעיות מילוליות כאמצעי להמחשה והבהרה של מושגים מתמטיים, רוב פרחי ההוראה מתקשים להסתכל על בעיה מילולית באופן כזה.
- ספרי הלימוד להכשרת מורים שנבדקו במחקר, לא תרמו להתרת הבלבול בין חוק הקיבוץ לחוק החילוף. כמו כן נעדר מתוכם השימוש בהמחשה או בבעיה מילולית להבהרת מהות החוק. הדגש בהם הוא על פרוצדורות חישוב, ולכן פרוצדורות חישוב הן מה שהמורים מלמדים את התלמידים בכיתותיהם. בספרי הלימוד של התלמידים יש שימוש רחב בבעיות מילוליות למטרות שונות. לדעת החוקרים במאמר זה, יש להכשיר את פרחי ההוראה לדעת להשתמש בבעיות מילוליות כאלה לצורך הבאת דוגמאות ללימוד חוק הקיבוץ בכפל, ובתוך כך להדגיש את משמעות הכפל. אחד החוקרים אף ניסה ללמד כך באחד הקורסים שלו, ונתקל גם הוא בקושי של פרחי ההוראה לייצג נכון את משמעות הכפל באופן מוחשי. בהמשך ההוראה באותו הקורס, נעשה טיפול בשגיאות שעלו, וזה הביא לשיפור ההבנה ואף ליכולת להתבונן בספרי הלימוד של בית הספר באופן ביקורתי.

[7] נראה שהמצב בארץ, על פי דרישות תוכנית הלימודים, די דומה, כמצוין במבוא.

מאמר [3]:

חשוב שתלמידים יפתחו הבנה מתמטית של התכונות המיושמות בכל אחת מארבע פעולות החשבון, כאשר הם לומדים נושא זה, מאחר שידע זה הוא הבסיס לחשיבה אלגברית. בהקשר לפעולת הכפל, תלמידים צריכים לפתח הבנה ההולכת ומעמיקה כיצד מיושמים חוקי הקיבוץ, החילוף והפילוג. ברם, נושא זה לא נמצא במוקד של מחקרים בעבר, במיוחד בנוגע לחוק הקיבוץ שלא נחקר כמעט.

מחקר שבדק את ההבנה של תלמידים בכיתה ז' במבחן באלגברה, וכלל שימוש בחוק הקיבוץ בכפל, מצא שבעוד רובם ידעו ליישם את החוק בתרגיל כפל מסוג $2 \times 5 \times 75$ כדי להקל את דרך החישוב, איש מהם לא ידע להסביר מדוע ניתן לפתור בדרך זו. מעטים ידעו לקשר זאת לחוק הקיבוץ, אך ללא פירוט או הדגמה חזותית מתאימה.

מחקרים אחרים הגיעו למסקנה שתלמידים רבים מסיימים את לימודיהם בבית הספר היסודי ללא הבנה של תכונת הקיבוץ, ועם ידע מוגבל בנוגע למבניות מתמטית ועל פעולות החשבון כתהליכים כלליים. בעקבות כך, הניסיון שתלמידים אלה רכשו בביצוע חישובים בלבד, אינו מאפשר להם לעשות הפשטה של היחסים והעקרונות הנדרשים לאלגברה. גם אלה שהיה להם קצת ידע על תכונות הפעולות בכפל, והכירו את השמות שלהן, התקשו לבטא הבנה זו לעשיית קישורים ביניהן.

המורים מתקשים לפתח את ההבנה של תלמידים על אודות תכונות הפעולות משום שגם הם מתקשים להבין תכונות אלה, והם נוטים לבלבל בין חוק הקיבוץ לחוק החילוף בנוגע לשינויים שנעשים בעת החישוב ומציאת הפתרונות. מורים נוטים להדגיש יותר את הפרוצדורות לחישוב ("כללים") במקום להתייחס להיבט המבני של חוק הקיבוץ. ההבדלים העדינים בין תכונות הקיבוץ והחילוף, והעובדה ששניהם קשורים ל"סדר" יוצרים קשיים בהוראתם. היבט מהותי בידע של מורים הוא ידיעת הצורך המתמטי בתכונת הקיבוץ (נוסף לשינוי של סדר הפעולות) והמודעות לכך שידיעה זו מקדמת חשיבה אלגברית. חלק מהקושי של המורים בנוגע לתכונת הקיבוץ קשור לאופן שבו מציגים ספרי הלימוד להכשרת מורים את הנושא. מחקר הראה שבספרי הלימוד יש לרוב הגדרה של תכונת הקיבוץ, אך היא איננה מלווה בתוכן או במודל המחשה. באחד מספרי הלימוד הוצגה דוגמה של בעיה מילולית מתאימה שניתן גם להציגה כמודל המחשה:

בכל קופסה של כדורי טניס יש 3 כדורים.

כל כדור עולה 2 דולר.

אם נרצה לקנות 6 קופסאות של כדורים, כמה נצטרך לשלם?

התרגיל הנדרש הוא $2 \times 3 \times 6$ וניתן לפתור אותו באופנים שונים שמאפשרים את הצגת חוק הקיבוץ העוסק בשינוי סדר הפעולות, מתוך הדגשת העובדה שהוא ישים רק בתרגיל שיש בו שלושה גורמים או יותר.

במחקר המוצג במאמר זה, החוקרים בדקו כיצד תלמידים מסבירים אסטרטגיות חישוב שבהן נעשה שימוש בחוק הקיבוץ בכפל במשימה שבה נדרש חישוב בעל־פה. המחקר התייחס לשלוש דרכים שונות שבהן ניתן ליישם את חוק הקיבוץ בכפל: הבחנה, הכפלה וחצייה וערך המקום. החוקרים היו מעוניינים לדעת אם תלמידים מבינים באותה מידה את שלושת היישומים של חוק הקיבוץ בכפל, או שחלק מהיישומים מוכרים להם טוב יותר. השערת החוקרים הייתה שהתלמידים יכירו פחות את היישום של ערך המקום כתכונה של חוק הקיבוץ, מכיוון שהמורים נוהגים ללמד אסטרטגיה זו בצורת כלל של "הוספת אפסים לפי הצורך" לאחר ביצוע חישוב הכפל.

<u>מהלך המחקר</u>:

שאלת המחקר הייתה: באיזו מידה תלמידים מבינים את היישומים של חוק הקיבוץ בכפל (הבחנה, הכפלה וחצייה וערך המקום) בתוך הקשר של הערכת היעילות של אסטרטגיות חישוב מנטליות?

מחקר זה נגזר מתוך פרויקט שבדק רהיטות בחישובים בעל־פה בתרגילי חיבור וכפל לתלמידים בכיתות ג'-ו'. בחלק הזה של המחקר נבדקו תלמידים בכיתות ה'-ו' באמצעות ראיונות אישיים (מחקר איכותני), לגבי מידת ההבנה שלהם את החישובים המנטליים, שבכולם היה מעורב חוק הקיבוץ, שאותם ביצעה תלמידה אחרת. ראיונות אישיים הם כלי עוצמתי להשגת תובנות על דרך החשיבה של תלמידים ולגילוי הבנות שגויות או תהליכי חשיבה, במיוחד בנוגע לחישובים בעל־פה.

במחקר רואיינו 25 תלמידים בכיתות ה'-ו' מבית ספר עירוני, שתוארו כתלמידים ברמה גבוהה מהממוצע. כל ריאיון ארך חמש דקות בממוצע. התלמידים התבקשו להסביר את החשיבה של התלמידה שפתרה בעיות כפל באסטרטגיות מתוחכמות. לצורך זה נבחרו חמישה תרגילי כפל שבהם היה שימוש בחוק הקיבוץ.

לתלמידים נאמר שלפניהם תרגילים שפתרה תלמידה בשם אנה. "אנה טובה בכפל מספרים. היא משתמשת באסטרטגיות חכמות כדי להקל את החישוב. התפקיד שלך הוא לנסות ולחשוב כמו אנה, ולהסביר מה היא עשתה כדי להכניס לכל תא את המספר שמופיע בו".

טבלה 4 מראה את השאלון שהוצג לתלמידים בתוספת עמודה המסבירה את האסטרטגיה שנקטה אנה (עמודה זו לא הופיעה בשאלון שהוצג לתלמידים כמו גם התשובות בעמודה השמאלית).

טבלה 4: חמשת הפריטים שבהם היה שימוש בחוק הקיבוץ בכפל

מספר פריט ואסטרטגיה	אנה חשבה ש...	מה עשתה אנה כדי לקבל ...
(1) הבחנה	$7 \times 11 \times 6$ זה כמו $11 \times [42]$.	[42] ? (תשובה: 7×6)
(2) הכפלה וחצייה	5×24 זה כמו $[12] \times 10$	[12] ? (תשובה: חצייה של 24 או $24:2$)
(3) הכפלה וחצייה	17×22 זה כמו $[34] \times 11$	[34] ? (תשובה: הכפלה של 17 או 17×2)
(4) ערך המקום	60×90 זה כמו $[100] \times 54$	[100] ? (תשובה: 10×10)
(5) ערך המקום	800×70 זה כמו $[1000] \times 56$	[1000] ? (תשובה: 100×10)

שאלות הריאיון:

- הסבר/הסבירי כיצד הצלחת להבין איך אנה חישבה את התרגיל הזה?
- האם היית צריך/כה לשנות את דרך החשיבה שלך כדי לחשוב כמו אנה? באיזה אופן?
- איך את/ה היית פותר/ת תרגיל זה?

<u>תוצאות המחקר</u>

בפריט 1 (תרגיל $7 \times 11 \times 6$) תכונת הקיבוץ עלתה מתוך הבחנה שעדיף לחשב תחילה את 7×6 ואחר כך לכפול את התוצאה ב־11. ראוי לשים לב שלשם כך יש צורך להפעיל תחילה את חוק החילוף ולהחליף בין המיקום של 7 ו־11 כדי לקבל את התרגיל: $11 \times 7 \times 6$, ובשלב השני במקום לכפול את שני הגורמים הראשונים, עדיף להתחיל מכפל שני הגורמים האחרונים (חוק הקיבוץ). מתוך 25 התלמידים שרואיינו, 3 לא זיהו כלל את האסטרטגיה שהפעילה אנה או את מטרתה (הם מכונים במחקר כרמה 0). 9 זיהו את האסטרטגיה אך לא התייחסו למתמטיקה כשניסו לזהות את מטרתה (רמה 1). 13 תלמידים זיהו את האסטרטגיה ואת מטרתה והתייחסו למתמטיקה (רמה 2 – זיהו לפעמים, רמה 3 – זיהו באופן קבוע).

להלן מקבץ תשובות שהשיבו תלמידים לפריט זה:

רמה 0: מראיין: למה אנה עשתה ככה? למה היא לא עשתה 77 כפול 6?
תלמיד: כי אני חושב שאם עושים ככה מקבלים תשובה אחרת, לא נכונה.

רמה 1: מראיין: למה אנה הפכה את התרגיל $7 \times 11 \times 6$ לתרגיל 11×42?
תלמיד: כי אולי היא לא טובה בכפל של שלושה מספרים.

רמה 2: מראיין: למה אנה עשתה ככה? מה היא חשבה?

תלמידה: כי 11×42 זה יותר קל. כי באופן רגיל מתחילים לפתור משמאל לימין, אז זה 11×7, ואחר כך 77×6 שזה קצת יותר מסובך.

מראיין: אז 77×6 יותר קשה לחישוב מאשר 11×42?

תלמידה: כן, כי 11×42, זה כמו $42 + 10 \times 42$.

בעוד שמרבית התלמידים היו מסוגלים להבחין בכך שקל יותר לכפול 11×42, איש מהם לא היה יכול לציין במפורש שלשם כך צריך תחילה לשנות את סדר המספרים. כלומר להפעיל את חוק החילוף ולאחריו לכפול את שני הגורמים האחרונים, על פי תכונת הקיבוץ. עם זאת, אין ודאות שהתלמידים פעלו באופן טכני בלבד, כי ההסברים שלהם העידו בהחלט שהם מבינים את המטרה המתמטית בבחירתה של אנה לשנות את התרגיל, כפי שעשתה.

פריטים 2 ו־3 התייחסו לאסטרטגיה של הכפלה וחצייה:

פריט 2: $10 \times 12 = 5 \times 24$;

פריט 3: $34 \times 11 = 17 \times 22$.

מתוך 25 הנבדקים, 2 לא זיהו כלל את האסטרטגיה (רמה 0); 3 זיהו לפעמים את האסטרטגיה אבל לא את מטרתה (רמה 1); 8 זיהו לפעמים את האסטרטגיה ואת מטרתה (רמה 2), ו־12 זיהו באופן עקבי את האסטרטגיה ואת מטרתה (רמה 3).

להלן מקבץ תשובות שהשיבו תלמידים לפריטים אלה:

רמה 0: התלמידים לא זיהו כלל את האסטרטגיה.

רמה 1: תלמיד: אני הייתי צריך רק לחצות את 24 ואחרי זה לכפול ב־5 ואז זה יהיה 10.

מראיין: מדוע אתה חושב שאנה שינתה את 5×24 ל־10×12?

תלמיד: (חושב 8 שניות)...אני לא יודע

רמה 2: תלמידה: אני מניחה שהייתי עושה משהו דומה. הייתי מכפילה את 5 ואחרי זה חוצה את 24. אחרי זה הייתי עושה 10×10 ששווה ל־100 ואז 2×10 ששווה ל־20 ואז מחברת אותם ביחד.

רמה 3: תלמידה: (ביחס לזהות: $10 \times 12 = 5 \times 24$) טוב, פה אני פשוט מסתכלת על 24 ועל 12 ואני כאילו חושבת מה ההבדל ביניהם, ואני יודעת ש־12 זה חצי של 24. ואז הסתכלתי על ה־5 וה־10 וה־5 הוא חצי של 10, אז חשבתי שהיא עושה הכפלה וחצייה.

מראיין: אוקי. מדוע את חושבת שהיא השתמשה בהכפלה וחצייה?

תלמידה: בגלל שכשכופלים ב־10 זה הרבה יותר קל, צריך רק להוסיף אפס. אבל כפל ב־5 קצת יותר מסובך.

בעוד שרוב התלמידים (80%) זיהו את ההכפלה והחצייה והסבירו שאנה בחרה באסטרטגיה זו כדי להקל את החישוב, הרי שאיש מהם לא הסביר מדוע האסטרטגיה של הכפלה וחצייה מתאימה בהקשר לכך שהמכפלה נשארת קבועה.

פריטים 4 ו־5 עסקו באסטרטגיה המבוססת על ערך המקום:

פריט 4: $54 \times 100 \;=\; 60 \times 90$;

פריט 5: $56 \times 1000 \;=\; 800 \times 70$

מתוך 25 הנבדקים, 4 לא הצליחו להבין את דרך החשיבה של אנה (רמה 0); 14 הסבירו את האסטרטגיה על פי הכלל שמורידים את האפסים, ואחר כך מוסיפים אותם למכפלה ללא הקשר לערך המקום (רמה 1); 4 גם הסבירו לפי הכלל שמורידים ומוסיפים אפסים, אבל ידעו לקשר זאת לערך המקום (רמה 2); ו־3 הראו הבנה של חוק הקיבוץ. למעשה רק 8 תלמידים הגיבו נכון לפריט, 4 ו־5 תלמידים הגיבו נכון לפריט 5. תוצאות אלה מעידות שבפריטים שעסקו בערך המקום היה קשה יותר לתלמידים לקשר זאת לחוק הקיבוץ. כלומר, ההבנה המושגית של תכונת הקיבוץ קשה יותר עבור תלמידים, או שבחוויית הלמידה שלהם לא הייתה התייחסות לכך.

להלן מקבץ תשובות שהשיבו תלמידים לפריטים אלה:

רמה 0: התלמידים לא זיהו כלל את האסטרטגיה.

רמה 1: תלמיד: הייתי עושה 6×9 ואז הייתי שם את שני האפסים בסוף.

תלמידה: קודם עושים 6×9 וזה משאיר שני אפסים שביחד עושים 100, כי ב־100 יש 2 אפסים.

רמה 2: תלמידה: אז זה 6 כפול 9 שווה 54 ונשארו שני אפסים. ב־100 יש שני אפסים, אז יצא לה 100 כשעשתה את זה. האפסים הם כאילו העשרות, אני חושבת. הם העשרות של המאה. אז זה כמו ערך המקום.

תלמיד: אני חושב שזה כמו 6 כפול 9 שווה 54 ואז יש את שתי העשרות, כשכופלים אותן ביחד זה שווה ל-100.

רמה 3: תלמיד: בעקרון 60 זה 6 כפול 10 ו-90 זה 9 כפול 10. זאת אומרת שאם עושים 6 כפול 9 זה 54. זה משאיר 10 פה ו־10 שם, שהם 100.

תלמידה: בשביל 800×70 היא עשתה 8 כפול 7 הם 56, אבל במקום 10 כפול 10, בגלל שזה 800, זה 100 כפול 10.

התוצאה המפתיעה והלא צפויה הייתה שיעור התלמידים שהשתמשו בכלל שהחוקרים כינו "האפסים הקסומים", וכמו כן שאצל תלמידים רבים חשיבה כזאת הייתה הנורמה בזמן

שמחשבים בעל־פה. ממצא כזה ניתן לחשוף רק בסיטואציה של ריאיון. ההסברים שהם נתנו מעידים שהתלמידים לא מתייחסים לאפסים כחלק מהתרגיל. לדוגמה:

תלמידה: מוציאים את האפסים ושמים אותם בצד. עושים את התרגיל (של הכפל) ואז פשוט מוסיפים את שניהם (לתוצאה).

למרות שמדובר בתרגיל כפל, התלמידה אומרת שמוסיפים את האפסים, ולא רואה את הבעייתיות שבכך. מכאן שלימוד טכניקות באופן שרירותי פוגע ביכולת להבין את הקשר שלהן למהות של פעולה נדרשת. יתר על כן, מכיוון שהטכניקה נלמדה בכיתה ונחשבה כנכונה מבחינה מתמטית, התלמידים התייחסו אליה כאל כלל בסיסי שאין עליו עוררין, גם אם הם לא הבינו אותו. דוגמאות:

תלמיד 1: טוב, במתמטיקה אפשר לעשות את זה... אני בדרך כלל מזיז את האפסים, ככה זה יותר קל עבורי... אני לא יודע איך להסביר את זה.

תלמיד 2: אז אמרו לי שאם נשאר אפס, פשוט מוסיפים אותו, ואז שמים את האפסים שם.

תלמיד 3: בגלל שיש שם כבר שני אפסים, אי אפשר להוציא אותם מהסכום, כי אז לא נקבל את התשובה הנכונה.

ממצאי מחקר זה תואמים ממצאי מחקרים אחרים בנושא. הכלל של הוספת אפסים כל כך מושרש שהוא מקבע את החשיבה של התלמידים שהמתמטיקה היא אוסף של כללים וחוקים, עד שהם נרתעים מניסיונות לערער את החשיבה שלהם בנושא. החוקרים מסכימים שניתן ללמֵד את הטכניקה של הוספת אפסים בתנאי שהיא מלווה בהבנה מדוע היא מניבה תשובה נכונה ומתאימה, ובהבנה של הקשר שלה לחוק הקיבוץ.

<u>סיכום ומסקנות:</u>

- נוסף למחקר האיכותני נעשתה גם בדיקת מתאם בין האסטרטגיות השונות. הבדיקה העלתה שהאסטרטגיה של הבחנה הייתה במתאם חיובי ($rho = .40$) עם האסטרטגיה של ערך המקום, ואילו לאסטרטגיה של הכפלה וחצייה לא היה מתאם עם שתי האסטרטגיות האחרות. לדעת החוקרים, הדבר נובע מכך ששתי האסטרטגיות האלה הצריכו התייחסות לחוק הקיבוץ. באסטרטגיה של הבחנה בולטת העובדה שנעשה שינוי בסדר הפעולות, ואילו באסטרטגיה של ערך המקום נעשה שימוש בפירוק לגורמים (אם אחד הגורמים הוא חזקה של 10) שבעקבותיו מקבלים תרגיל כפל שבו 4 גורמים, ושוב נדרש שינוי של סדר הפעולות.
- לעומת זאת, האסטרטגיה של הכפלה וחצייה לא תמיד נקשרת לחוק הקיבוץ, אלא אפשר להסביר אותה גם באמצעות הפיכות החילוק לכפל: אם מחלקים את אחד המספרים בגורם מסוים, אז כדי לשמור על המנה ללא שינוי, צריך להכפיל את המספר השני באותו גורם.

- במחקר זה, בדומה למחקרים אחרים, נטען שהבנת חוק הקיבוץ חשובה להבנה של התלמידים על אודות הכפל של שלושה או יותר מספרים; ליכולת שלהם לעבוד עם מספרים בגמישות ולהבנה שלהם לגבי המבנה של פעולות החשבון.
- ממצאי מחקר זה מעלים שאלות לגבי דרכי הוראה מקובלות, ומצביעים על כך שעדיין רווחת בתי הספר הוראת כללים ללא משמעות, במיוחד לגבי היישום של חוק הקיבוץ במצבים שבהם נדרש פירוק של המספרים לפי ערך המקום.
- הממצאים מאירים את הצורך של מורים לעסוק בהבנה של חוק הקיבוץ, לזהות מתי תלמידים משתמשים בו באופן סמוי. כמו כן לספק לתלמידים הזדמנויות להתנסות בחוק הקיבוץ בשילוב עם מודלים ותכנים שיכולים להבהיר את מהות החוק ולסייע להגיע להכללה של השימוש בו.
- המחקר נעשה בקרב קבוצה קטנה של תלמידים עם הישגים גבוהים במתמטיקה, ולכן אינו משקף את כלל התלמידים. אך דווקא משום כך בולטת העובדה שרובם התקשו לזהות את חוק הקיבוץ, או להתייחס אליו בצורה מפורשת. המסקנה של החוקרים היא שתלמידים רבים מסיימים את לימודיהם בבית הספר היסודי, ובאמתחתם ידע והבנה מועטים בנוגע לפעולות הבינריות והתכונות הקשורות אליהן.

סיכום

המחקרים המוצגים בסיכום מאמרים זה מציגים את המצב של התלמידים בנוגע ללימוד חוק הקיבוץ בכפל בבית הספר היסודי. המחקר הראשון התייחס לאופן שבו המורות מלמדות את חוק הקיבוץ בכיתות א'-ד', השני בדק את הידע של פרחי הוראה בנושא, ובמחקר השלישי רואיינו תלמידים בכיתות ה'-ו' ונבדקו הבנתם ודרך חשיבתם על יישומים של חוק הקיבוץ בכפל. במבוא הועלו שתי שאלות.

האחת: כאשר הילדים לומדים אסטרטגיות לביצוע חישובים בעל־פה ובכתב ביעילות, האם הם יכולים להגיע להכללה והבחנה של חוקי הפעולות אשר נלמדים באופן סמוי?

השנייה: האם התלמידים יכולים לקשר את הידע שרכשו בבית הספר היסודי באופן סמוי אל הידע האלגברי של חוקי הפעולות שנלמד בבית הספר העל־יסודי באופן מפורש?

על פי המסקנות שמובאות במאמרים, החוקרים מביעים חשש לגבי המימוש של שתי יכולות אלה, וגורסים שצריך ללמד את החוקים בצורה מפורשת יותר בליווי המחשות והדגמות בעזרת בעיות מילוליות. עם זאת, הם מודעים לקושי הרב ללמד זאת בגיל בית הספר היסודי, ומציעים שהנושא ייחקר יותר לעומק.

מסקנה חד־משמעית שכל החוקרים מסכימים לגביה היא שיש לשפר את הידע של פרחי ההוראה והמורים על אודות חוקי החילוף והקיבוץ, ולתקן את האופן שבו הנושא מוצג בספרי

הלימוד להכשרת מורים ובספרי הלימוד לתלמידים. חוסר הידע והבלבול שמאפיינים את המורים עצמם על אודות חוקי החילוף והקיבוץ מקשים עליהם ללמד את הנושא, בין אם הוא מוצג באופן סמוי בזמן לימוד אסטרטגיות חישוב יעילות, ובין אם הוא נלמד באופן מפורש. נקווה שמאמרים אלה יסייעו מעט להבהרת הנושא של חוקי הפעולות בכלל, וחוק הקיבוץ בפרט.

ביבליוגרפיה:

1. Barnett, E., & Ding, M. (2019). Teaching of the associative property: A natural classroom investigation. *Investigations in Mathematics Learning, 11*(2), 148–166.

2. Ding, M., Li, X., & Capraroc, M. M. (2013). Preservice elementary teachers' knowledge for teaching the associative property of multiplication: A preliminary analysis. *Journal of Mathematical Behavior*, *32*(1), 36–52.

3. Downton, A., Russo, J. & Hopkins, S. (2022). Students' understanding of the associative property and its applications: noticing, doubling and halving, and place value. *Mathematics Education Research Journal*, *34*(2), 437–456.

4. משרד החינוך – האגף לתוכניות לימודים (2006). *תוכנית לימודים במתמטיקה לכיתות א'-ו' בכל המגזרים.*

פעילויות להשתלמות מורים

<u>שאלה מטרימה לפני קריאת המאמר ולימוד הנושא בהשתלמות:</u>

ענו באופן יחידני על השאלות המופיעות באיור 6. בדקו בקבוצה את התשובות והסיקו מסקנות על אודות הידע שיש, או אין לכם בנושא.

<u>שאלות לתרגול הנושא של חוקי הפעולות:</u>

לפניכם אוסף שוויונים. זהו באיזה שוויון היה שימוש בחוק החילוף, באיזה שוויון היה שימוש בחוק הקיבוץ ובאיזה שוויון היה שימוש בשניהם.

$17 + 29 + 3 = 29 + 17 + 3$	$17 + 29 + 3 = 3 + 17 + 29$
$8 \times 15 = 4 \times 30$	$18 + 35 = 3 + 15 + 35$
$58 + 429 = 57 + 1 + 429$	$429 + 58 = 429 + 1 + 57$
$2 \times 36 \times 5 = 10 \times 36$	$36 \times 5 \times 2 = 36 \times 10$
$430 \times 20 = 43 \times 10 \times 2 \times 10 = 43 \times 2 \times 10 \times 10$	

<u>שאלות לחיזוק משמעות תכונת הקיבוץ:</u>

- המחישו את הבעיה המילולית הבאה: כדורי טניס נמכרים בקופסאות גליל של 3 כדורים בקופסה. מחירו של כל כדור הוא 5 ₪. אם נרצה לקנות 6 קופסאות כאלה, כמה נצטרך לשלם? (זכרו לצרף להמחשה את השוויון המתאים המציג את תכונת הקיבוץ).
- חברו בעיה מילולית המאפשרת להמחיש את חוק הקיבוץ. הציגו את ההמחשה המתאימה וכתבו את השוויון הנדרש.

<u>שאלה לסיכום המפגש:</u>

1. צפו בשיעור של עמית/ה או בקשו ממנו/ה לצפות בשיעור שלכם/ן. תעדו או הסריטו את החלק המתאים בשיעור.
2. הביאו אפיזודות מן ההוראה שלכם/ן או של עמיתכם/ן בנושאים שבהם בא לידי ביטוי חוק הקיבוץ (בחיבור או בכפל).
3. נתחו את מהלך ההוראה על פי מסגרת ההתייחסות המופיעה בטבלה 1 (שימו לב, מכיוון שמדובר בילדים צעירים, יש לשער שגם אם תנסו ללמד את החוק בצורה מפורשת, ההתאמה להבנה של התלמידים עלולה להקשות עליכם לעשות זאת).
4. דונו במפגש בקשיים שעלו, וחישבו על דרכים לשפר את ההוראה שלכם/ן.