שילוב בעיות בהוראת מתמטיקה בבית הספר היסודי

אחלאם מחאג'נה, מכללת אלקאסמי

אבי ברמן, הטכניון

משחק במטבעות

https://lo.cet.ac.il/player/?document=178612CE-5897-40D8-9222-4BDFF0937E1D&language=he

בהרצאה נתאר מחקר שנעשה בעקבות הקורס, 'פתרון בעיות, חיבור בעיות ובחירת בעיות', שניתן באורנים בתוכנית הלימודים לתואר שני בהוראת מתמטיקה בבית הספר היסודי. מרצה הקורס היה פרופ' אבי ברמן ומתרגלת הקורס הייתה ד"ר אחלאם מחאג'נה. בקורס השתתפו 16 מורות ומורה אחד.

מבנה ההרצאה

- הקורס
- דוגמאות של בעיות (שניתנו או על ידי המרצה או על ידי המורים)
- המחקר
- ממצאים

הקורס

המטרות

לעודד את המורות והמורה לשלב בעיות מעניינות בהוראתם.

לפתח את החשיבה המתמטית ולהעשיר את הידע שלהם.

מבנה הקורס

פתרון בעיות מאתגרות שהוצגו על ידי המרצה.

בחירת מאמר על פתרון בעיות על ידי זוג מורים והצגתו בקורס.

הצגת פעילות שהעביר מורה בבית הספר.

הבעיות שהוצגו על ידי המרצה

המרצה השתמש בבעיות מאתגרות שהוא נתן בקורס לתלמידים מכיתה ט' בתוכנית 'אודיסיאה', במרכז למדעני עתיד.

בעיות אלו ואחרות מופיעות בספר.

Berman, A. (2021). A problem-based journey from elementary number theory to an introduction to matrix theory. World Scientific.

בנוסף, הוא הקרין סרטון של שיעור שהוא נתן במסגרת 'לומדים ביחד', לתלמידי כיתה ט' מבית ספר תל"י בהוד השרון.

בעיית המטבעות בה פתחנו לקוחה מסרטון זה.

דוגמאות של בעיות

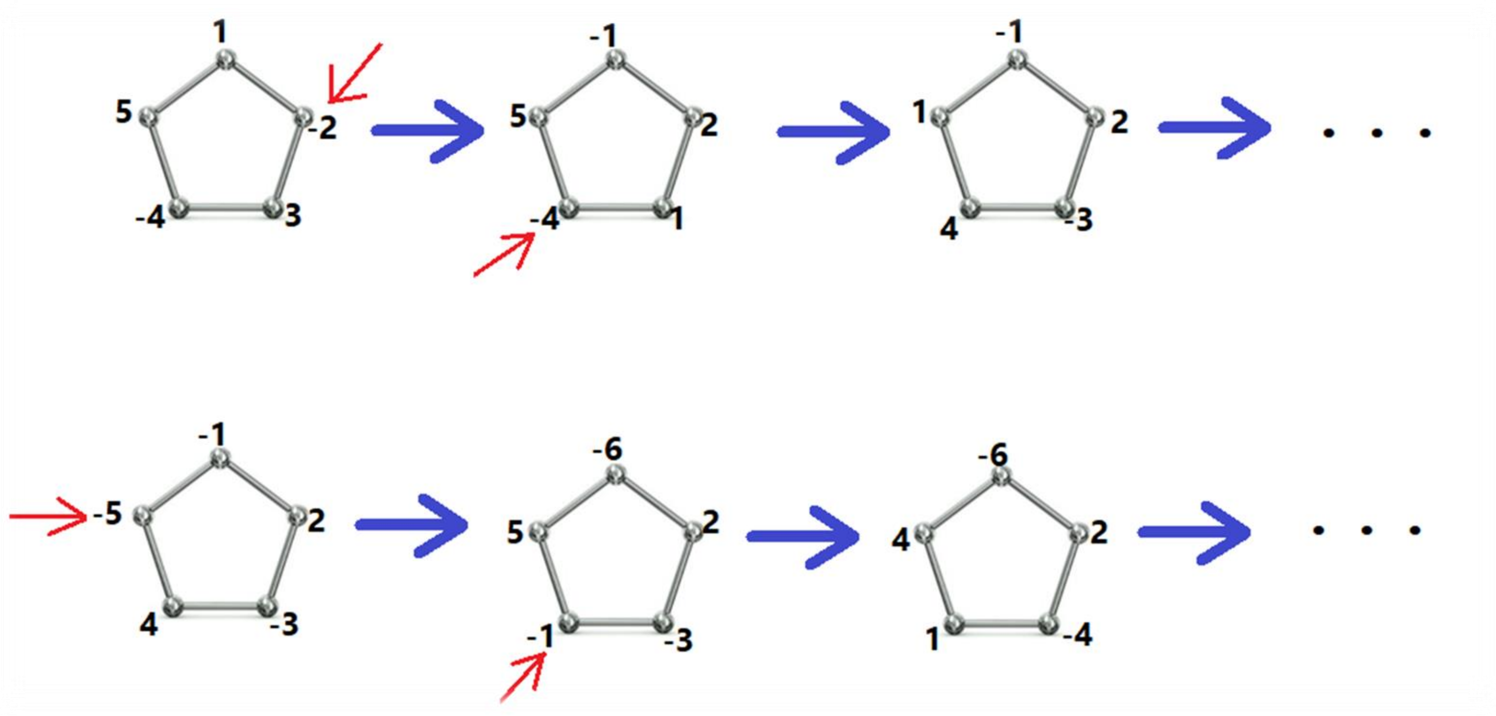
מספרים שלמים בקודקודים של מחומש

5 מספרים שלמים נמצאים בקודקודים של מחומש. אם יש ביניהם מספרים שליליים, בוחרים אחד מהם, מוסיפים אותו לשכניו וכופלים אותו ב 1-.

אם גם עכשיו יש מספרים שליליים, ממשיכים לפי אותו הכלל וכך הלאה.

האם המשחק יסתיים?

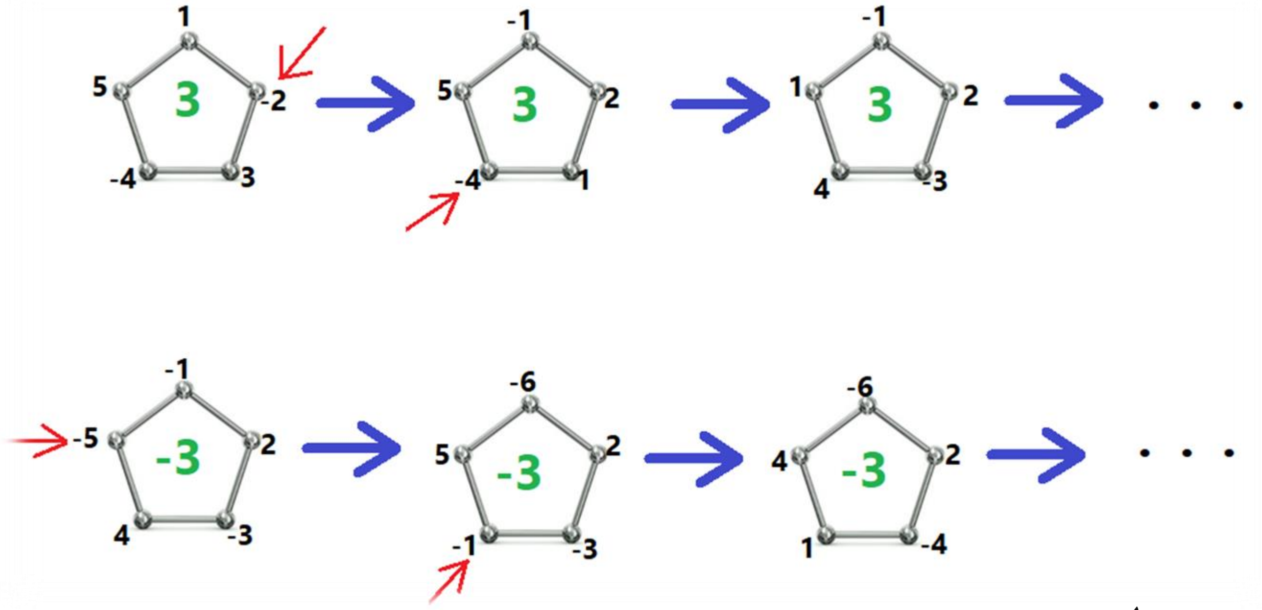
דוגמאות:



הצגת הבעיה בקורס

1.המורים חולקו לזוגות והתבקשו לבחור חמישה מספרים עבור קודקודי המחומש, והתחילו לשחק.

2.המרצה נתן רמז : מה קורה לסכום המספרים בקודקודי המחומש?



תשובה לרמז : הסכום לא משתנה!

3. מה קורה כשסכום המספרים הוא שלילי?

המשחק לא מסתיים! כי תמיד אחד המספרים יהיה שלילי.

4. מה קורה כשסכום המספרים הוא אפס?

או שכל המספרים הם אפס ואז המשחק מסתיים לפני שהוא מתחיל. או שלא כולם אפס ואז תמיד אחד מהם יהיה שלילי ולכן המשחק לא מסתיים.

5. מה קורה כשסכום המספרים הוא חיובי?

המשחק מסתיים! (לא חשוב איזה מספר שלילי בוחרים, המשחק מסתיים באותם מספרים ובאותו מספר צעדים). זה החלק הקשה של הבעיה והמרצה הסביר את ההוכחה למורים.

האם אפשר להשתמש בבעיה הזו בבית הספר?

כן!

כי זו דרך טובה לתרגל, דרך משחק, פעולות חשבון במספרים מכוונים.

בבית הספר אפשר לתת את ההסבר עבור הסכום האי חיובי (שלילי או אפס). ההוכחה עבור סכום חיובי ניתנה בקורס כדי לפתח את החשיבה של המורים.

משחק נים (NIM)

במשחק משתתפים שני שחקנים. נתונות מספר קבוצות ובכל קבוצה יש מספר כדורים.

דוגמא:

נתונות 3 קבוצות. באחת יש 7 כדורים, בשנייה 5 כדורים ובשלישית 3 כדורים. כל שחקן בוחר בתורו את אחת הקבוצות, מוציא ממנה לפחות כדור אחד (אפשר להוציא את כל הכדורים שבקבוצה). מנצח מי שמוציא את הכדור האחרון, כלומר זה שנשאר עם קבוצה אחת ואז הוא מוציא את כל הכדורים שבה.

האם כדאי להיות השחקן הראשון או השחקן השני?

דוגמאות

דוגמא 1

7 5 3

הראשון מוחק את החמש

7 0 3

השני דואג לסימטריה

בין שתי הקבוצות שנשארו

3 0 3

בדומה למשחק המטבעות, כשמגיעים
למצב של סימטריה, מה שהראשון עושה גם השני עושה ומנצח.

דוגמא 2

7 5 3

הראשון מוחק שני כדורים מה-7

5 5 3

השני מעביר למצב של
סימטריה ומנצח

5 5 0

גם כאן השני מנצח!

האם תמיד השחקן השני מנצח?

לא!

כדי להבין את האסטרטגיה במקרה הכללי נשתמש בשיטת הספירה הבינארית.

שיטת הספירה הבינארית

בשיטת הספירה הבינארית רושמים כל מספר על ידי 0-ים או 1-ים.

כל מספר טבעי אפשר לרשום כסכום של חזקות של 2 :

$$n = a_0 * 2^0 + a_1 * 2^1 + a_2 * 2^2 + \cdots + a_k * 2^k$$

כאשר $a_0, \dots, a_k$ הם 1 או 0.

השורה $a_k \dots a_0$ נקראת הייצוג הבינארי של **n** ומסומנת ב- n_2.

שימו a_0 מופיע בצד ימין.

דוגמאות

$$7 = 1 * 2^0 + 1 * 2^1 + 1 * 2^2$$
$$7_2 = 111$$

$$5 = 1 * 2^0 + 0 * 2^1 + 1 * 2^2$$
$$5_2 = 101$$

$$3 = 1 * 2^0 + 1 * 2^1 + 0 * 2^2$$
$$3_2 = 011$$

אסטרטגיית הניצחון

רושמים את הייצוגים הבינאריים של מספרי הכדורים בקבוצות, שורה מתחת לשורה.

בדוגמא : 1 1 1

1 0 1

0 1 1

- מצב נקרא **זוגי** אם בכל עמודה יש מספר זוגי של 1-ים .
- מצב נקרא **אי-זוגי** אם לפחות באחת העמודות יש מספר אי זוגי של 1-ים.

מכל מצב זוגי <u>חייבים</u> לעבור למצב אי-זוגי.

מכל מצב אי זוגי <u>אפשר</u> לעבור למצב זוגי.

המצב שרוצים להגיע אליו הוא מצב שאין בו כדורים

0	0	0
0	0	0
0	0	0

וזה **מצב זוגי**, לכן **אסטרטגיית הניצחון** היא תמיד לעבור **למצב זוגי**.

לכן אם המצב ההתחלתי הוא **אי-זוגי** כדאי להיות **ראשון**

אבל אם המצב ההתחלתי הוא **זוגי** כדאי להיות **שני**.

$$1 \quad 1 \quad 1 \leftarrow 7_2$$

$$1 \quad 0 \quad 1 \leftarrow 5_2$$

$$0 \quad 1 \quad 1 \leftarrow 3_2$$

יש לשמור על מספר זוגי של 1-ים בכל עמודה

ואז כדאי **להיות ראשון** כדי לנצח

$$1 \quad 1 \quad 1 \leftarrow 7_2$$

$$1 \quad 0 \quad 1 \leftarrow 5_2$$

$$0 \quad 1 \quad 0 \leftarrow 2_2$$

מה שיעשה השני הוא יקלקל את הזוגיות

$$1 \quad 1 \quad 0 \leftarrow 6_2$$

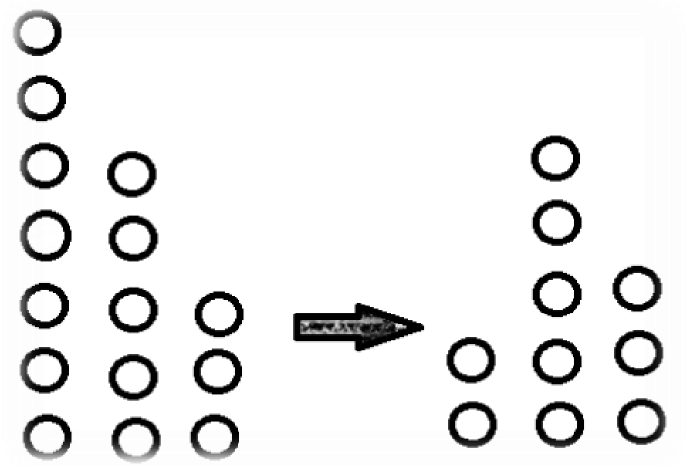
$$1 \quad 0 \quad 1 \leftarrow 5_2$$

$$0 \quad 1 \quad 0 \leftarrow 2_2$$

הראשון יסדר את הזוגיות בעמודות שוב...

הצגת הבעיה בקורס

שתי מורות הוזמנו ללוח לשחק כדי להכיר המשחק,



המורות בכיתה התחלקו לזוגות ושיחקו,

שוב, הוזמנו שתי מורות ללוח, לשחק בשתי קבוצות כדורים, והמרצה הסביר את עיקרון הסימטריה.

המורות המשיכו לשחק בזוגות בשלוש קבוצות כדורים,

המרצה לימד את שיטת הספירה הבינארית,

המרצה הסביר את אסטרטגיית הפתרון,

לסיום, התבקשו המורות לשחק עם ארבע קבוצות.

האם אפשר להשתמש בבעיה הזו בבית הספר?

לדעתי כן !

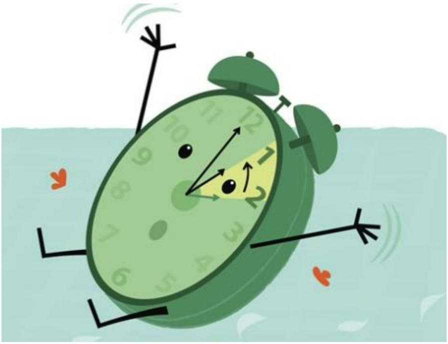
כי זו דרך טובה ללמד את עיקרון הסימטריה ושיטת הספירה הבינארית, דרך משחק.

שיטת הספירה הבינארית איננה נמצאת היום בתוכנית הלימודים אבל כן אפשר ללמד אותה בכיתות גבוהות או בקבוצות לתלמידים מתעניינים.

בעיות שהוצגו על ידי הסטודנטים

בעיית השעון

בטאו כל אחת מספרות השעון כתרגיל חשבון במספר **מינימלי** של תשיעיות?



איך אפשר לכתוב 6 כתרגיל ב- 9-יות?

$$\frac{9+9}{9+9+9}\cdot 9=6$$

אם התלמידים מכירים את מושג השורש מספיקות שתי תשיעיות

$$\sqrt{9}+\sqrt{9} = 6$$

אם התלמידים מכירים את מושג העצרת מספיק פעם אחת 9.

$$6 = \left(\sqrt{9}\right)!$$

מת לחיות

נתונים שני קנקנים, קנקן של 5 ליטר וקנקן של 3 ליטר.

יש כמות לא מוגבלת של מים.

איך אפשר לקבל כמות של בדיוק 4 ליטר?

https://youtu.be/BVtQNK_ZUJg

המחקר

שאלה לגבי הקורס

- האם ובאיזו מידה הושגו מטרות הקורס?

שאלות מחקר לגבי המורות

- מהי, לדעת המורות, בעיה מתמטית?
- איך המורות בוחרות בעיות בהוראה שלהן?
- איך המורות עוזרות לתלמידים שלהן במהלך פתרון בעיות?

שיטת המחקר

בסיום הקורס אחרי מתן הציונים, הזמנו את המורים להשתתף במחקר, 9 מורות הסכימו להתראיין. הראיונות נותחו בשיטה איכותנית.

ממצאים

לגבי הקורס

- בהשפעת הקורס המורות התחילו לשלב בעיות מעניינות בהוראה שלהן.
- המורות סיפרו שהן מחברות בעיות כסיפור לתרגיל נתון.
- המורות אמרו שהוכחות לא מתאימות לבית הספר היסודי, אבל ההוכחות תרמו לפיתוח החשיבה המתמטית שלהן.
- לדעת המורות, הבעיות המאתגרות שהיו בקורס לא כל כך מתאימות לכיתות שלהן אבל תרמו לשיפור הידע המתמטי והדידקטי שלהן.

לגבי המורות

- המורות חושבות שבעיה מתמטית היא בעיה מילולית שאין לה דרך או אלגוריתם ידועים לפתרון.
- המורות משתמשות בבעיות מהקורס, עמיתים, השתלמויות, אתרי אינטרנט.
- המורות מעודדות את התלמידים לחבר בעיות שמתאימות לתרגילים.
- המורות עוזרות לתלמידים תוך כדי פתרון בעיות הן על ידי רמזים והן על ידי החלפת בעיות ליותר קלות לתלמידים מתקשים.

תודה רבה

ahlamosh@yahoo.com אחלאם מחאג׳ינה