

בצקבות המאמר "הבנה של ילדים את מושג השוויון כבסיס לאלגברה"

מאת: **ורדה וייס** מדריכה במחוז מרכז ובמרכז מורים אזורי ראשון לציון

אחוז הילדים המציעים פתרונות מגוונים ל:

$$8+4=\square+5$$

מספר ילדים	אחר	סה"כ	12	17	12	7	תשובות כיתה
42	100	14	0	7	79	0	א'
84	100	20	0	20	54	6	א'+ב'
174	100	15	14	10	55	6	ב'
208	100	5	5	20	60	10	ג'
57	100	11	30	44	9	7	ד'
42	100	0	0	45	48	7	ה'
145	100	0	2	14	84	0	ו'

מדינות ואזורים שונים בארצות-הברית, ממליצים שלימוד האלגברה יתחיל כבר בשנות הלימוד הראשונות. מגמה זו מסתמנת גם בארץ, וייתכן אף שתבוא לידי ביטוי בתכנית הלימודים החדשה ההולכת ומתגבשת.

תלמידים מתקשים בלימוד האלגברה מפני שחסר להם ידע לגבי מאפייני מספרים ופעולות פשוטות. על מנת שיצליחו באלגברה הם צריכים ללמוד על ההשפעות הכלליות של הפעולות על המספרים ולא למקד את תשומת לבם בחישובים בלבד. אחד התנאים ההכרחיים ללימוד האלגברה הוא הבנת המשמעות של מושג השוויון. במאמר שהופיע בכתב העת "Teaching Children Mathematics" של ארגון מורי המתמטיקה בארצות-הברית (Falkner, Levi, and Carpenter, 1999), דווח על חמישה עשר מורים ושלושה חוקרים מאוניברסיטת ויסקונסין, שבדקו איך מבינים הילדים את מושג השוויון ואת סימן השווה (=).

בראשית הפרויקט נתבקשו מורים לשאול את תלמידיהם כיצד פותרים את הבעיה הבאה:

$$8+4=\square+5$$

בתחילה נראתה בעיה זו טרוויאלית למורים רבים, אולם לאחר שהתנסו בה הם גילו תוצאות מדהימות. רוב הילדים חשבו שהמספר החסר הוא 12. אחרים כתבו שהוא 17.



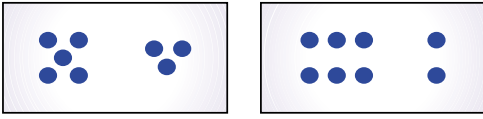
להלן טבלת הפתרונות של תלמידים מכיתות א'-ו', כפי שדווח במחקר הנ"ל:

העובדה המעניינת ביותר מתוך הטבלה היא שתלמידי כיתות א' ו-ו' שגו באותה מידה: אף לא ילד אחד כתב תשובה נכונה. בהחלט היינו מצפים מתלמידי ו' למירב תשובות נכונות. אולם כפי שניתן לראות בטבלה כל 145 תלמידי כיתה ו' חשבו שיש לשים בתוך המשבצת את המספר 12 או 17. דווקא בכיתה ג' 10% כתבו תשובה נכונה 7 שזה יחסית אחוז "גבוה", ובכל זאת 90% שגו.

מתוך הנתונים מסתבר שהילדים השלימו במשבצת הריקה את הסכום של 8+4 או סכום של כל המספרים הנמצאים בשוויון, מבלי להתייחס לכך שהמשבצת היא בעצם מחובר חסר בתוך תרגיל שקול לתרגיל 8+4. הילדים לא ראו כאן שני תרגילים נפרדים. עבורם סימן השוויון אומר שיש לשים אחריו תוצאה של מה שעיניהם רואות.

ממצאי מחקר זה עוררו גם בי, כמדריכה, סקרנות לדעת כיצד תופסים תלמידים בבתי-הספר שבהם אני עובדת את משמעות הסימן שווה (=). בסוף שנת הלימודים תש"ס, הצגתי לתלמידים בכמה

הנחתי פקקים בדרך הבאה:



היכן יש יותר פקקים?
תלמידים: זה שווה.

האם אפשר לכתוב $8=8$?
זה נכון.

נתתי לתמר 4 פקקים ביד אחת ו- 2 פקקים ביד השניה.

לדוד נתתי 3 פקקים ביד אחת ו- 3 ביד השניה
אני: איך נכתוב תרגיל מתאים?

תלמידים: $3 + 3 = 4 + 2$

חזרתי אל התרגיל ההתחלתי $4 + 5 = \square + 2$

תמר: $4+5=7+2=11$

דוד ודן: $4 + 5 = \square + 2$

גלעד: $4+5=11$ כי 4 ועוד 5 זה 9 ועוד 2 שווה 11.

נתתי לגל 4 פקקים ועוד 5 פקקים. לדניאל נתתי 2 ושאלתי: כמה עלי להוסיף כדי שלשניכם יהיה שווה?

גלעד: $4+5=7+2$

כיתה ג'

התלמידים קיבלו את התרגיל הבא:

$4+8=\square+5$

מתוך קבוצה של שישה תלמידים, חמישה רשמו את המספר 7 במשבצת הריקה, ורק תלמידה אחת, מיכל, רשמה את המספר 12.

אני: מה אומר הסימן $=$?
מיכל: עושה סימן כמה זה יצא יחד.
גיל:

1. אם זה תרגיל פשוט אז כמה שווה זה ועוד זה?
2. אם יש המשך מחברים תרגיל ראשון, זה צריך להיות שווה לתרגיל השני.

יוסי: הסימן השווה אומר ששני התרגילים צריכים להיות שווים.

אבנר: הסימן שווה אומר ששתי התוצאות אמורות לצאת שוות.

עמית: הסימן שווה אמור לחבר שני מספרים בתרגיל ועל-ידי כך להגיע לתוצאה.

בתי-ספר תרגילים שונים הבודקים את משמעות סימן השוויון.

הילדים ישבו בקבוצות קטנות הטרוגניות, ואני השתדלתי לתת תרגילים הדומים לאלה המופיעים במאמר, בהתחשב ברמת הכיתה.
להלן תאור הדיונים שערכתי עם תלמידים בכיתות השונות:

כיתה א'

בקשתי מהתלמידים להשלים את התרגיל הבא:

$3+4=\square+2$

כולם ענו 7.

מורה: מה אומר לכם הסימן $=$?
תלמיד: שיש אחריו את הסכום.

החלטתי לבדוק מה יקרה אם אשנה את מקום המשבצת ואתן את התרגיל:

$3+4=2+\square$

דוד:

$3+4=2+\square$

"חיברתי את כולם יחד."

תמר:

$3+4=2+\square$

"3 ועוד 4 זה 7 וגם 2 ועוד 5 זה 7"
גלעד:

$3+4=2+\square$

"כי פה יש 4 וזה שווה 2 + 2"

דן:

$3+4=2+\square$

"3 ועוד 4 זה 7 ועוד 2 זה 9"

אני: האם זה נכון? $8 = 5 + 3$

שלושה ילדים עונים שזה לא נכון, ורק אחד אומר שזה נכון.

אני: האם זה נכון? $3 + 5 = 8$

כולם מסכימים שזה נכון.

אני: האם זה נכון? $8 = 8$

כולם: זה לא נכון כי אין תרגיל.

אני: מה דעתכם האם זה נכון?
 $8=8$

תלמיד: זה לא נכון כי צריך לעשות תרגיל שיהיה שווה 8.

הוספתי עוד תרגיל:

$$5+6=7+\square$$

כולם רשמו את המספר 4 במשבצת הריקה, וארבעה תלמידים לא ויתרו על כתיבת הסכום הסופי, כך:

$$5 + 6 = 7 + 4 = 11$$

אני: מה אומר הסימן?

גיל: שזה אותו דבר. צריך להוסיף למשבצת שיהיה שווה לסכום בתרגיל השני.

אני: מה תאמרו על התרגיל?

$$7+4=15-4$$

כולם: התרגיל נכון כי שני התרגילים שווים 11.
 מורה: אם כך $11 = 11$
 יכוח: זה לא נכון כי אין תרגיל אבל זה נכון כי 11 שווה ל-11.
 לאחר שקיבלו תרגיל נוסף:

$$25+12=\square+7$$

שרון וירון נתנו את התשובה הנכונה, 30, ואמרו ששניהם שווים ל-37.
 לבסוף החלטתי לחזור לתרגיל הראשון:

$$4+8=\square+5$$

$$8+4=\square+5 \quad \text{יעקב:}$$

$$8+4=\square \quad \text{חיים:}$$

$$17-5=12$$

$$8+4=\square+5 \quad \text{מחליט:}$$

אני: האם הפסוק נכון? $8=8$
 כולם מסכימים שזה נכון.

מיכל: לסימן יש שתי כוונות. אם יש תרגיל הוא אומר כמה הסכום. אם יש שני מספרים מסמנים אם הם שווים.

אני: האם $19-3=5+11$

כולם מסכימים שזה נכון.

אבנר: כי 3 נמצא בין 16 ל-19.

עמית: כי שניהם מגיעים לאותה תוצאה. יוסי: מסכים עם עמית.

נתתי לתלמידים משימה: כתבו מה שתמצאו משני צדי הסימן =

$$\text{עמית: } 5 \times 8 = 20 + 20$$

$$\text{גיל: } 7 + 7 = 20 - 6$$

$$\text{יוסי: } 301 - 2 = 256 + 43$$

$$\text{אבנר: } 15 + 5 = 10 + 10$$

$$\text{מיכל: } 10 - 6 = 20 : 5 \quad \text{או} \quad 20 : 5 = 10 - 6$$

$$\text{מנחם: } 46 + 4 = 40 + 10$$

כיתה ד'

תלמידים מכיתה ד' קיבלו את אותו התרגיל שקיבלו תלמידי כיתה ג':

$$4+8=\square+5$$

למרבה הפלא התקבלה תמונה הפוכה מזו שהתקבלה בכיתה ג': מתוך קבוצה של שישה ילדים, חמישה השיבו - 12, ורק ילד אחד נתן את התשובה 7 ונימק: "שניהם שווים 12".

שרון: הסימן שווה שואל כמה שווים 8 ועוד 4.
 יעקב: הסימן שווה שואל כמה יוצא שני מספרים יחד.

ירון: הסימן שווה מחברים את שני המספרים ויוצא המספר.

נתתי עוד תרגיל:

$$16=\square+9$$

שני ילדים, יעקב ולינוי, נתנו את התשובה 7.

אני: מה אומר הסימן?

ירון: הסכום שווה לתרגיל.

גיל: הסכום הוא 16 והשווה מראה את התרגיל ששווה ל-16.

חיים: אפשר להפוך. לשנות את המיקום של השווה $9+7 = 16$

ללא בעיה, הילדים השלימו:

$$1 \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \boxed{1}$$

אני: האם זה נכון: $2 + 4 = 6$
 $6 = 2 + 4$

מרים: זה לא הגיוני.

הבאתי **מאזניים מתמטיים** והנחתי דיסקיות משני צידי המאזניים.

מהו התרגיל המתאים: $5 + 5 = 10$
 $5 \times 2 = 10$

החלפתי את מקומן של הדיסקיות. מהו התרגיל?
 $5 + 5 = 10$

מתקיים ויכוח האם נכון לכתוב גם $10 = 5 + 5$.

בעקבות המחקרון שערכת

כשהשוויתי את הדיונים שערכת בכיתות השונות לטבלה שהופיעה במאמר, מצאתי תיאום כמעט מלא. אחוז הילדים בכיתות א' ו-ו' שהבינו היטב את משמעות סימן השווה היה קטן לעומת אחוז תלמידי כיתות ג' שכן מבינים.

הצגתי את השיחה שניהלתי עם התלמידים למחנכת כיתה ו'. היא הגיבה בתדהמה מוחלטת, ובעקבותיה התעוררה מהומה בחדר המורים. "זה לא יכול להיות" – אמרו כולם, כולל המנהלת. המנהלת ואני החלטנו לערוך דיון בנושא במליאה, ובאחד מימי ההיערכות הצגתי את הממצאים למורות. ביחד ניסינו לברר מהן התפיסות המוטעות של מושג השוויון וממה הן נובעות.

להלן השערות אחדות שהעלו המורות :

- יש נטייה אצל המורות לכתוב תרגילים משמאל לימין ואחריהם הסימן =
 כמו $7 = 3 + 4$ ולא $3 + 4 = 7$.
- ילדים קוראים תרגיל כזה $7 = 3 + 4$ מימין לשמאל והמורה לא מקימת דיון מתקן (לרוב היא מתקנת בעצמה ועוברת הלאה).
- אין התייחסות מספקת כאשר תלמיד כותב טעות כגון:
 $7 + 8 = 7 + 7 = 14 + 1 = 15$
 (אגב, טעות כזאת נמצאה גם בחוברת חשבון מסחרית שנמכרת בחנויות...)
- החלטנו לשפר את דרכי ההוראה על מנת להביא לשינוי בתפיסת סימן השוויון.

כיתה ו'

חמישה ילדים קיבלו את התרגיל

$$4 + 8 = \square + 5$$

תלמיד אחד בלבד רשם את התשובה 7, ואחרים ענו 12.

שי, לדוגמה, כתב: $8 + 4 = 12 + 5 = 17$

אני: מה תפקידו של הסימן ?

מרים: תפקידו לעזור לפתור תרגיל וגם להשוואה בין שני תרגילים.

שי, לילך, יסמין: כנ"ל.

תומר: עושה השוואה בין שני הסכומים. שאלה: מה דעתכם?

$$8 = 8$$

יסמין: זה לא בסדר כי אין תרגיל.

מתקיים ויכוח ממושך בקבוצה.

אחרים: זה נכון. זה לא חייב להיות תרגיל. האם זה נכון:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

הקבוצה: זה לא נכון.

תומר: זה נכון כי $\frac{1}{3}$ שווה ל- $\frac{2}{6}$ ועוד $\frac{1}{6}$ שווה לחצי. מצד אחד נכון ומצד שני לא, בגלל שאם מסתכלים אז לא רואים שזה אותו דבר. יסמין: השווה צריך להיות בצד השני.

אני: מה תפקיד הסימן ?

לפתור את התוצאה.

להשוות תוצאות.

מרים: למשל, אם זה להשוות לא משנה איפה השווה, אבל אם זה תרגיל התוצאה לא יכולה להיות לפני התרגיל.

שאלה: האם אתם חושבים שלסימן יש שני תפקידים? קבוצה: כן.

תומר: יש תפקיד אחד.

תומר נותן דוגמה: אם למשל $2015 = 2000 + 15$, גם $2015 = 2000 + 15$

לסימן יש תפקיד אחד.

קבוצה: בתור תרגיל לא הגיוני, בתור השוואה הגיוני. בקשתי שישלימו:

$$1 \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \square$$

להלן המסקנות שהגענו אליהן:

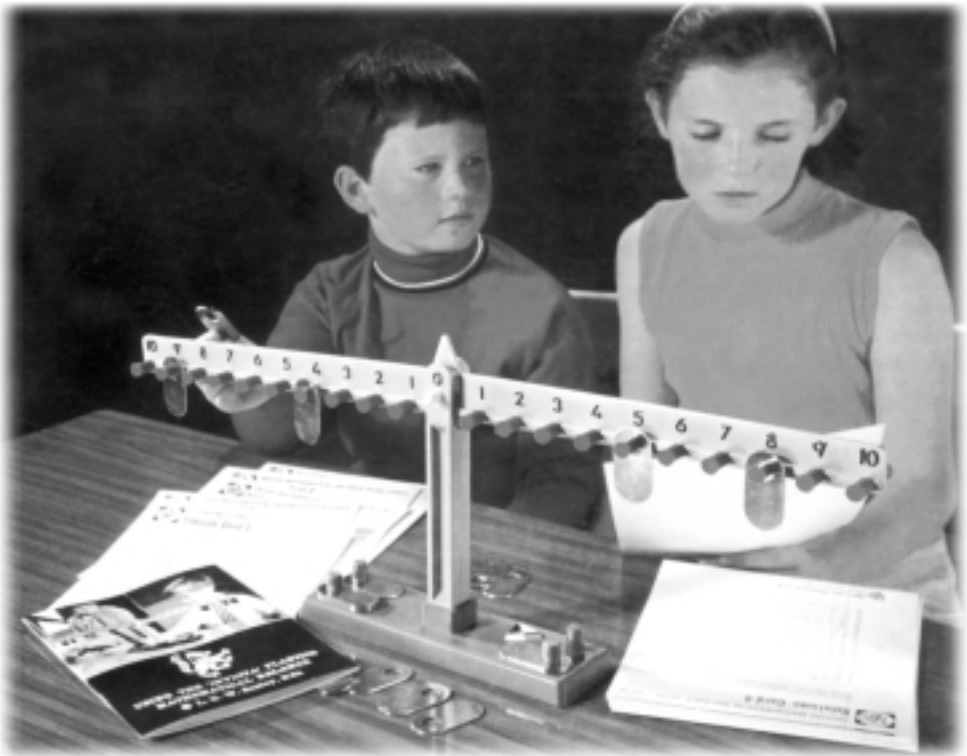
א. לשנות תבניות קבועות.

ב. להשתמש באמצעי המחשה, למשל פקקים או קוביות, ואחר-כך לעבור לכתיבה.

ג. אחת המורות הציעה להכניס למסגרת את התרגילים משני צידי סימן ה- = $3+4 = \square+5$ =

ד. להשתמש במאזניים מתמטיים.

קבענו לעצמנו לבדוק בעוד כחצי שנה אם יש שיפור.



ביבליוגרפיה:

- Falkner, Karen P., Linda Levi, and T. P. Carpenter. "Children's Understanding of Equality: A Foundation for Algebra". **Teaching Children Mathematics**, 6 (December 1999): 232-236.
- MacGregor Mollie and Kaye Stacey, "A Flying Start to Algebra". **Teaching Children Mathematics** 6 (October 1999): 78-85.

תרגומים לעברית, מופיעים באתר: <http://construct.haifa.ac.il/~mathcntr>