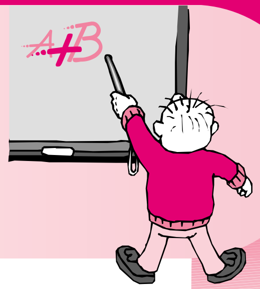


מִספרים שמְספרים סיפור: עושים מתמטיקה רלוונטית

דובי וייס

לעולם ילמד אדם תורה במקום שליבו חפץ
(תלמוד בבלי)

בשנת תשס"ה החלה לפעול בביה"ס "מודיעים" בתל-אביב ובביה"ס "רימונים" בקריית-אונו תכנית ייחודית ללימוד מתמטיקה, הנקראת: **"מתמטיקה רלוונטית"**. התכנית פותחה בזיקה לגישת RME ההולנדית. גישה זאת היא אחד מהגורמים המרכזיים להיותה של הולנד אחת המדינות המובילות באירופה בהישגי תלמידים במתמטיקה. את התכנית "מתמטיקה רלוונטית" מוביל הכותב, דובי וייס. התכנית מתבצעת בשיתוף מכון פרוידנטל (Freudenthal Institute) ההולנדי ובליווי אקדמי של ד"ר אלכס פרידלנדר ממכון ויצמן למדע.

לעשות מתמטיקה רלוונטית

התכנית "מתמטיקה רלוונטית" רואה במתמטיקה פעילות אנושית. לפיכך אין להתייחס לתלמידים כאל מקבלים פסיביים של מתמטיקה מוכנה מראש, אלא כאל שותפים פעילים בתהליך הלימוד. אחת מהנחות היסוד של התכנית היא ש**למידת מתמטיקה חייבת להתחיל בעשיית מתמטיקה רלוונטית** כאשר המשך תהליך הלימוד מתאפיין לא רק בעשיית מתמטיקה, אלא גם בהבניה מתוכננת וקפדנית של ידע מתמטי, בהמשגתו, ביסוסו ותרגולו.

תפיסת המתמטיקה כפעילות אנושית פותחה לראשונה על-ידי המתמטיקאי והמחנך ההולנדי-יהודי הדגול הנס **פרוידנטל**. לדעת פרוידנטל המתמטיקה צריכה להיות קשורה למציאות, קרובה לתלמידים ובעלת רלוונטיות ליחיד ולחברה כדי להיות בעלת ערך אנושי. פרוידנטל הקים

דובי וייס
דוקטורנט בהוראת המתמטיקה והמדעים באוניברסיטת תל-אביב, ובוגר בית-ספר "מנדל" למנהיגות חינוכית. בעל ניסיון של למעלה מ-15 שנה בהוראת מתמטיקה ובפיתוח חומרי למידה וסביבות למידה מתקדמות. מקים ומוביל את תכנית "מתמטיקה רלוונטית" בישראל.

ב-1971 בהולנד את IOWO, "המכון להתפתחות החינוך המתמטי", שנקרא כיום מכון פרוידנטל. מכון זה מהווה אחד מהכוחות המניעים המשמעותיים בחינוך מתמטי בהולנד ובארצות אחרות.

מכון פרוידנטל פיתח ב- 30 השנים האחרונות גישה ללימוד והוראת מתמטיקה הנקראת RME (ראשי תיבות של Realistic Mathematics Education). גישת RME מבוססת במידה רבה על רעיונותיו של פרוידנטל, אך היא תיאוריה דינמית וחיה, שיש להתאימה לקונטקסט החינוכי בו היא מופעלת. בארה"ב למשל, לומדים בהצלחה בחמש שנים האחרונות יותר מ- 250,000 תלמידים בכ- 1000 בתי-ספר לפי גישת Mathemtics In Context, שפותחה על בסיס גישת RME תוך התאמה למציאות החינוכית האמריקאית.

להצמיח את המתמטיקה באמצעות סיפורים מדגימים

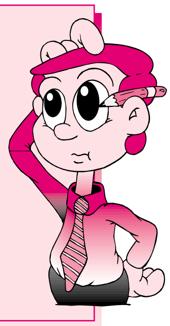
אחד האלמנטים המרכזיים עליהם מבוססת התכנית "מתמטיקה רלוונטית" הוא שימוש בסיפורים מתמטיים מדגימים (Paradigmatic Stories) כנקודת פתיחה להצמחת הידע המתמטי של תלמידים.

סיפור מדגים, המכונה גם סיפור פרדיגמטי, הוא כלי דידקטי, המשמש את המורה בתחילת הלמידה של נושא מתמטי חדש. הסיפור מציג לתלמידים סיטואציית בעייה רלוונטית. הוא מתוכנן מראש כך, שתוך כדי הנסיון של התלמידים להתמודד עם סיטואציית הבעיה, הם חווים את הצורך להשתמש במושגים המתמטיים החדשים, שהמורה מעוניין להבנות אצלם.

ניקח לדוגמה את מושג המספר העשרוני, הנלמד לראשונה בכיתה ה. המספרים העשרוניים הוצגו לראשונה באירופה לפני יותר מ-400 שנה על-ידי (Simon Stevin, 1585)

אשר הציג בין-השאר את הרעיון של ייצוג מדידות בעלות רמת דיוק הולכת וגדלה (Refining Measurements) באמצעות סכום של סדרת שברים בעלי מכנה שהוא חזקה של 10, כאשר מעריך חזקת המכנה עולה ב-1 עם ההתקדמות בסדרה.

נציג כעת **סיפור פרדיגמטי**, המביא את התלמידים לחוות את הצורך ברעיון של המספר העשרוני כמושג מתמטי, המאפשר לייצג תוצאות של מדידות מדויקות כרצוננו. הסיפור הפרדיגמטי המוצג הופעל בהצלחה בבתי-הספר המשתתפים בתכנית "מתמטיקה רלוונטית".



הסיפור התחיל בהודעה של המורה, שבחופש הגדול ייערכו שיפוצים בבית הספר. לצורך השיפוצים יש לערוך סדרה של מדידות (מחוץ לכיתות ובתוכן) על מנת לספק למשפצים מידות אורך, רוחב וגובה של האובייקטים שישופצו.

בשלב הראשון סיפקה המורה לתלמידים פס מדידה באורך מטר שלא סומן עליו כל סימון (פס לבן וחלק לגמרי). התלמידים התבקשו למדוד באמצעות הפס את אורך שולחנות הכיתה (1.10 מ').

בשלב זה ניצבה בפני התלמידים בעיה: פס המדידה שאורכו מטר היה ריק מסימונים והם היו צריכים להחליט כיצד למדוד את השארית (0.1 מ') בנוסף למטר האחד שאותו הם יכלו למדוד. התלמידים החליטו לחלק את פס המדידה לחלקים שווים. המורה ביקשה מהתלמידים לדון בקבוצות ולהציג אפשרויות לחלוקת פס המדידה באופן שיאפשר את מדידת אורך השולחן.
קבוצה אחת של תלמידים הציעה לחלק את הפס על-ידי חצייה חוזרת באמצעות קיפול לשניים (ל- 2 חצאים, 4 רבעים, 8 שמיניות וכו').
קבוצה שנייה הציעה לחלק את הפס ל- 12 חלקים שווים (כי 12 מתחלק בהרבה מספרים).
קבוצה שלישית הציעה לחלק את הפס ל- 10 חלקים שווים (כי יש לנו 10 אצבעות וככה מחולק הסרגל). בשלב זה סיפרה המורה לתלמידים שהשיטה שהציעה הקבוצה הראשונה (חצייה חוזרת) היא השיטה ששימשה את המצרים הקדמונים. היא הוסיפה ואמרה שבסופו של דבר החליטו בני האדם לאמץ את השיטה שהציעה הקבוצה השלישית (השיטה העשרונית). בהמשך חילקה המורה לתלמידים פסי מדידה נוספים באורך מטר (מוכנים מראש), המחולקים ל-10 חלקים שווים (בעלי פסי חלוקה כל 10 סנטימטר). היא ביקשה מהם לחזור ולמדוד את אורך השולחן (1.1 מ'), את רוחבו (0.8 מ') ועוד מספר אובייקטים כרצונם. תוצאות המדידה נרשמו בטבלה מיוחדת תוך שהתלמידים מציינים עבור כל מדידה את מספר יחידות המטרים ומספר עשיריות המטרים המתאים (ראו טבלה 1).

עשיריות מטרים	יחידות מטרים	מה מדדנו?
$\frac{8}{10}$	0	רוחב הלוח
$\frac{3}{10}$	0	אורך דף
$\frac{4}{10}$	0	רוחב ארון
$\frac{4}{10}$	0	אורך סלסילה

טבלה 1: תלמידים מודדים (שלמים ועשיריות)

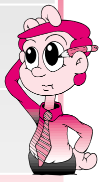
בשיעור הבא קיבלו התלמידים את פסי המדידה המחולקים ל- 10 חלקים שווים, והפעם הם התבקשו למדוד אובייקטים, כגון: אורך מושב הכיסא (0.43 מ') או עובי השולחן (0.03 מ'). ושוב ניצבו התלמידים בפני בעייה: פסי המדידה שהיו ברשותם לא אפשרו להם להגיע לרמת דיוק של סנטימטרים בודדים. המורה ביקשה מהתלמידים לדון בקבוצות כיצד כדאי להתמודד עם הבעיה החדשה.
חלק מהקבוצות הציעו לחלק כל עשירית פס (0.1 מ') ל- 8 חלקים שווים כדי לקבל חלקים מספיק קטנים שיאפשרו למדוד את אורך מושב הכיסא ועובי השולחן.
חלק אחר של הקבוצות הציע לחלק כל עשירית פס ל-10 חלקים. בשלב זה סיפרה המורה לתלמידים שהשיטה שהתקבלה על-ידי המתמטיקאים היא השיטה של חלוקה נוספת ב- 10.
היא חילקה לתלמידים פס מדידה מוכן מראש המחולק ל- 100 חלקים שווים וביקשה מהם לחזור ולמדוד את מושב הכיסא, עובי השולחן ואובייקטים נוספים כרצונם, ולרשום את התוצאה בטבלה (ראו טבלה 2). הפעם הכילה הטבלה עמודה חדשה לרישום מספר המאיות. חשוב להדגיש שבשלב זה של המהלך הלימודי לא הוצגה עדיין לתלמידים שיטת הרישום הפורמלית של המספר העשרוני.

מאיות מטרים	עשיריות מטרים	יחידות מטרים	מה מדדנו?
$\frac{3}{100}$	$\frac{4}{10}$	0	אורך מושב הכיסא
$\frac{3}{100}$	$\frac{0}{10}$	0	עובי השולחן
$\frac{8}{100}$	$\frac{0}{10}$	2	אורך הלוח

טבלה 2: תלמידים מודדים (שלמים עשיריות ומאיות)

בשיעור השלישי תרגלו התלמידים מדידות נוספות בעזרת פס המדידה המחולק ל- 100 חלקים שווים. לקראת סוף השיעור שאלה המורה את התלמידים אם יש להם רעיון איך אפשר לייעל את רישום תוצאות המדידה ולרשום, למשל, סימן מקוצר שפירושו: 1 מטר + 2 עשיריות + 4 מאיות. חלק קטן של התלמידים ניחשו שמדובר ב- 1.24 והמורה הציגה לכל הכיתה את שיטת רישום המספר העשרוני. בהמשך התלמידים נתבקשו לתרגם את כל המדידות שהם ערכו למספר עשרוני תוך שימוש בעמודה חדשה הנקראת "מספר עשרוני" (ראו טבלה 3).

מספר עשרוני	מאיות מטרים	עשיריות מטרים	יחידות מטרים	מה מדדנו?
0.43	$\frac{3}{100}$	$\frac{4}{10}$	0	אורך מושב הכיסא
0.03	$\frac{3}{100}$	$\frac{0}{10}$	0	עובי השולחן
2.08	$\frac{8}{100}$	$\frac{0}{10}$	2	אורך הלוח



טבלה 3: תלמידים מודדים (מספר עשרוני)

חלק מהתלמידים ניסו למדוד אובייקטים (כמו מחק או עובי דף) באמצעות פס המדידה המחולק ל- 100 חלקים ושוב לא הצליחו לדייק. התפתח בכיתה דיון מרתק כיצד לפתור את בעיית אי-הדיוק (תלמידה אחת הפליאה להציע: "צריך לחלק את הפס לאינסוף חלקים").

השלבים השונים שעברו התלמידים לאורכו של הסיפור הפרדיגמטי (החל מפס המדידה החלק, דרך פס המדידה המחולק ל- 10 וסיים בפס המדידה המחולק ל- 100) הובילו אותם לחוות "על בשרם" את הצורך לפתח שיטה מתמטית המאפשרת הצגת דיוק הולך וגובר. חווית צורך זו העניקה לתלמידים תחושה, שהמתמטיקה היא רלוונטית והגיונית, והובילה אותם להבנה טובה יותר של הרעיון המתמטי הגלום במספר העשרוני.

הסיפור הפרדיגמטי שהוצג לעיל היה תחילתו של תהליך **מתמטיזציה** שבמהלכו פיתחו התלמידים ידע ומיומנויות בתחום המספרים העשרוניים. בשיעורי ההמשך אפשר היה להבחין בבירור כיצד מעשירים התלמידים (בהנחיית המורה) את ידיעותיהם לגבי מושג המספר העשרוני על בסיס התשתית הקוגניטיבית שהניח הסיפור הפרדיגמטי. היה זה פרוידנטל, אשר טבע את המושג מתמטיזציה כדי לבטא את התהליך הלימודי שבו תלמידים מפתחים ידע מתמטי תוך כדי עשיית מתמטיקה פעילה.

בקטע מתוך הדיאלוג, שהתרחש בין המורה לאחד התלמידים באחד משיעורי ההמשך, ניתן להבחין בהבניית הידע על בסיס התשתית הקוגניטיבית שהניח הסיפור הפרדיגמטי.

מורה: מי יכול לאמר לי לכמה שווה 0.75?

תלמיד: (מצביע ואומר): ל- $\frac{3}{4}$.

מורה: מדוע $\frac{3}{4}$?

תלמיד: כי 0.25 זה $\frac{1}{4}$ אז 0.75 זה $\frac{3}{4}$!

מורה: למה ?

תלמיד: כי 0.25 ועוד 0.25 ועוד 0.25 שווה ל-0.75.

מורה: תסביר לי יותר.

תלמיד: 0.25 הם 25 מאיות. 3 פעמים 25 מאיות הם 75 מאיות, ו- 75 מאיות רושמים 0.75.

מורה: אבל 0.75 הן $\frac{7}{10}$ ועוד $\frac{5}{100}$?

תלמיד: נכון - אבל $\frac{7}{10}$ הם גם $\frac{70}{100}$ כמו שראינו בפס שמחולק ל- 100.

מורה: ולמה 0.25 שווה ל- $\frac{1}{4}$?

תלמיד: כי 0.25 זה $\frac{25}{100}$.

מורה: אז למה זה שווה ל- $\frac{1}{4}$?

נכנס 4 פעמים ב- 100 כמו במטר שיש בו 100 סנטימטר ו- 25 סנטימטר זה $\frac{1}{4}$.

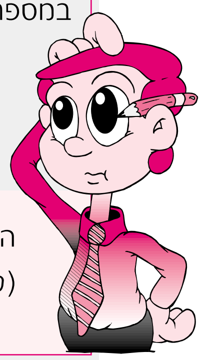
הדיאלוג ממחיש את תהליך ההבניה שעבר התלמיד בהתייחס ליכולת לייצג מספר עשרוני על-ידי שבר פשוט השקול למספר העשרוני. התלמיד בנה הסבר לכך ש- $0.75 = \frac{3}{4}$, על-ידי הצגת שרשרת טיעונים שראשיתה

בתובנות, שנרכשו במהלך ההתמודדות עם הסיפור הפרדיגמטי ("כמו שראינו בפס המחולק", "כמו שיש במטר..."), וכל חולייה נוספת בשרשרת היא תוצר של שלב הבנייתי בתהליך המתמטיזציה שעבר התלמיד בהנחיית המורה. הדיאלוג הנ"ל הוא דוגמה אחת מני רבות לתהליכי מתמטיזציה שעברו התלמידים, אשר במהלכם הם העמיקו את הבנתם לגבי המספר העשרוני תוך שהם מפתחים מושגים מתמטיים חדשים, מנסחים יחסים מתמטיים, מבצעים הכללות ופועלים בהצלחה במישור הפורמלי. תהליך המתמטיזציה הרלוונטית מוליך את התלמידים בביטחה **במסלול קוגניטיבי שתחילתו בסיפור המדגים המוחשי וסופו במישור הפורמלי המתמטי**. אחד היתרונות המשמעותיים ביותר של תהליך מתמטיזציה רלוונטית הוא בכך שהוא יוצר אצל התלמידים היסטוריה קוגניטיבית אישית למושג המתמטי. היסטוריה זו מאפשרת לתלמיד לשחזר לאחור את המסלול הקוגניטיבי, שהוביל לפיתוח המושג המתמטי, ועל-ידי כך להרגיש ביטחון במתמטיקה.

יש להבהיר שהשימוש בסיפור הפרדיגמטי נעשה בתחילת הלמידה של נושא מתמטי חדש ולא בכל שיעור מתמטיקה. הניסיון שהצטבר בבתי-הספר, המשתתפים בתכנית "מתמטיקה רלוונטית", מלמד, שכל 4-3 שבועות לערך הציגו המורות לתלמידים סיפור פרדיגמטי נוסף. הטבלה שלהלן מציגה דוגמאות למושגים / נושאים מתמטיים וסיפורים פרדיגמטיים מתאימים להצמחתם.

דוגמאות לסיפורים פרדיגמטיים מדגימים

המושג / הנושא המתמטי	הרעיון המתמטי	הסיפור הפרדיגמטי
מכנה משותף	הרחבה לכפולה המשותפת	תלמידה הכינה יצירת אומנות על דף. על מחצית משטח הדף היא הדביקה כוכבים נוצצים, על שליש מהדף היא הדביקה לבבות, ובשאר הדף היא הדביקה חייכנים צהובים. באיזה חלק של הדף היא הדביקה חייכנים?
מספרים פריקים וראשוניים	פירוק לגורמים	לקראת יציאה לטיול שנתי של יומיים לכינרת ביקשה המורה מ-24 תלמידים להסתדר בקבוצות שוות. מצאו את כל האפשרויות להסתדר בקבוצות שוות. למחרת ילד אחד חלה, מצאו שוב את כל האפשרויות להסתדר בקבוצות שוות.
כפל מספר דו-ספרתי במספר דו-ספרתי	חוק הפילוג	דנה הדביקה על דף מדבקות בצורת לבבות. מי יכול למנות ביעילות את מספר הלבבות שהכינה דנה בדף המדבקות ליום המשפחה? הדף מכיל למשל מטריצה של 12 שורות, כאשר בכל שורה 14 לבבות.
השוואת שברים (ללא מכנה משותף)	אסטרטגיית השלמה לשלם	שתי משפחות אכלו בפיצה-מטר. האחת $\frac{5}{7}$ פיצה והאחרת $\frac{7}{9}$ פיצה. איזו משפחה אכלה יותר?

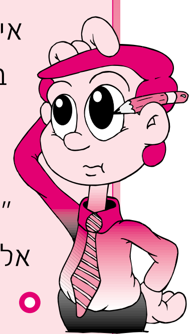


חשוב להדגיש שלא כל בעיה מילולית או סיפור מתמטי הם בחזקת סיפור פרדיגמטי.
התנאים הנדרשים כדי שסיפור מתמטי יהפוך לסיפור פרדיגמטי הם:

- הסיפור צריך להציג סיטואציית בעיה עשירה (המאפשרת התמודדות באמצעות מגוון של אסטרטגיות חשיבה ודרכים לפתרון).
- סיטואציית הבעייה צריכה להמחיש את הצורך במושג המתמטי המתפתח מתוכה.
- סיטואציית הבעייה צריכה להיות רלוונטית.

הניסיון מלמד שהסיפור הפרדיגמטי הוא כלי דידקטי אפקטיבי כי:

- הוא יוצר עבור התלמידים קונטקסט התייחסותי מוחשי ומשמעותי, שעל בסיסו ייבנה הידע המתמטי החדש.
- הוא מטעין את התלמידים במוטיבציה ללמידה, היונקת את עוצמתה מהרלוונטיות של הסיפור ומהרצון של התלמידים לפתור את הבעייה.
- הוא מאפשר לתלמידים ליצור היסטוריה קוגניטיבית אישית עבור המושגים המתמטיים הנלמדים. בזכות העשייה המתמטית המשמעותית, המלווה את דרך ההתמודדות עם הסיפור המתמטי, התלמידים מסוגלים לשחזר בדמיונם את "המסלול הקוגניטיבי" מהסיטואציה המוחשית אל המושג המתמטי המופשט.
- הוא מאפשר לתלמידים לחוות את הצורך במתמטיקה ככלי לתיאור העולם ולהבנתו. חווית הצורך במתמטיקה הופכת את המתמטיקה ממקצוע בית-ספרי מנוכר לגוף ידע בעל רלוונטיות ויופי.



חשוב להדגיש שעל אף היות הסיפור הפרדיגמטי מבוסס על גישת RME (חינוך מתמטי ריאליסטי) אין מדובר בהכרח בסיפור מציאותי הלקוח מהעולם האמיתי/הריאליסטי.
בעוד שסיטואציות בעיה רבות עוסקות בהיבטים מתמטיים של העולם המציאותי (המכולת, הבית, המכונית וכו') בהחלט ניתן ורצוי להשתמש גם בסיטואציות בעיה הלקוחות "מהעולם-האמיתי" של ילדים (סיפורי פיות, משחקי מחשב, תבניות גיאומטריות שובות לב וכו').
על-פי גישת RME "ריאליסטי" הוא מושג סובייקטיבי, המתייחס למציאות סובייקטיבית, שמאפשרת להתבסס על התנסויות שיש לתלמידים.
על-פי תפיסה זו גם מתמטיקה מופשטת יכולה וצריכה להפוך ל"עולם אמיתי של התנסויות" עבור התלמידים.

לעבור מהמוחשי למופשט - גישת המודלים הצומחים

אחד האתגרים המשמעותיים בחינוך מתמטי היא ליצור מהלך למידה שיאפשר לתלמיד לעבור בהצלחה מהמוחשי למופשט. בתהליך המעבר מהמוחשי למופשט נעזרים תלמידים רבים במודל המחשה (כגון, דיסקיות, מלבני שברים ועוד).
התכנית "מתמטיקה רלוונטית" עושה שימוש במודלי המחשה מתמטיים בהתבסס על גישת **המודלים הצומחים Emergent Models** (Gravemeijer, 1999). על-פי גישה זו התלמידים עוברים 4 שלבים במעבר מהמוחשי למופשט:

א. שלב הצגת המשימה (Task Setting): בו מוצגת לתלמיד סיטואצית בעיה ריאליסטית ובעקבותיה משימה לביצוע.

ב. שלב ה"מידול של" (Model Of): בו התלמיד בונה מודל המחשה ראשוני של סיטואציית הבעיה כדי להתמודד עמה. בניית המודל באה לידי ביטוי על-ידי ציור סכמטי או על-ידי שימוש במודל המחשה פיזי וניתן למישוש. בשלב זה תשומת הלב של התלמיד מופנית לעולם סיטואציית הבעייה באמצעות המודל.
התלמיד מבצע **מידול של** סיטואציית הבעייה. שלב זה מתאפיין בשימוש לא-פורמלי במודל ההמחשה.

ג. שלב ה"מידול לצורך" (Model For): זהו השלב שבו תשומת הלב משתנה מעולם הבעיה לעולם המתמטיקה, ומודל ההמחשה הופך ממודל של סיטואציית בעיה למודל לצורך פיתוח תובנות מתמטיות וביצוע הסקה מתמטית. בסופו של שלב זה הופך מודל ההמחשה למודל מנטלי, המאפשר לתלמיד לראות יחסים מתמטיים בתוך עולם התוכן הממודל. שלב זה מתאפיין בשימוש יותר פורמלי במודל ההמחשה.

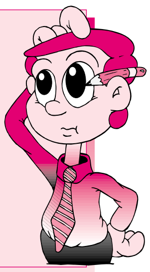
ד. השלב הפורמלי: בו מתנתק התלמיד ממודל ההמחשה ופועל בעולם המתמטיקה הפורמלי.

נדגים כעת בקצרה את הצמחת מודל ההמחשה, הנקרא "מגדל השברים", כחלק מהתמודדות של תלמידי כיתה עם סיטואציות בעיה העוסקות בהשוואת שברים.

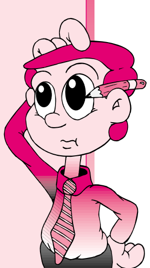
בתקופה שאחרי פסח, כחלק מתחילת העיסוק במשמעות השבר הפשוט, לומדים התלמידים שיטות להשוואת שברים ללא מכנה משותף. שיטות אלה כוללות בין השאר:

- שימוש ב-$\frac{1}{2}$ כנקודת התייחסות (למשל: $\frac{3}{7}<\frac{5}{9}$ כי $\frac{3}{7}<\frac{1}{2}$ ו- $\frac{5}{9}>\frac{1}{2}$).
- עיקרון ההשלמה לשלם (למשל: $\frac{6}{8}<\frac{7}{9}$ כי $\frac{2}{8}>\frac{2}{9}$).

לצורך לימוד שיטות ההשוואה הנ"ל מוצגים לתלמידים סיפורים מדגימים, המציגים סיטואציות בעיה המבוססות על אירועים, שקרו לתלמידים, שהלכו לאכול פיצה בפיצה-מטר. פיצה-מטר היא פיצה מלבנית (באורך מטר) שניתן להזמין חלקים ממנה על-ידי ציון השבר המבטא את החלק מאורך הפיצה, אותו רוצים לאכול (רוחב הפיצה נשאר קבוע): 1 מטר, $\frac{1}{2}$ מטר, $\frac{1}{4}$ מטר, $\frac{1}{8}$ מטר וכו'.
לתלמידים מוצגות סיטואציות בעיה כגון:



שני תלמידים הזמינו פיצה: משה הזמין $\frac{3}{8}$ ורועי הזמין $\frac{2}{4}$. משה אמר: אני אכלתי יותר, כי אני אכלתי 3 חלקים ואתה רק 2 חלקים. האם משה צודק?



שתי תלמידות הזמינו פיצה: דינה הזמינה $\frac{5}{7}$ וחיה הזמינה $\frac{7}{9}$. חיה אמרה לדינה: אני אכלתי יותר, כי אני אכלתי 7 חלקים ואת רק 5 חלקים. דינה אמרה לחיה: אני אכלתי יותר, כי אצלי כל חתיכה היא בגודל $\frac{1}{7}$ ואצלך כל חתיכה בגודל $\frac{1}{9}$ ו-$\frac{1}{7}$ גדול יותר מ-$\frac{1}{9}$. מי מהתלמידות צודקת?

על-פי גישת המודלים הצומחים, לאחר שלב **הצגת המשימה** מאפשרים לתלמידים להתמודד עם הבעיה תוך שהם מונחים ליצור מודל המחשה. יצירת המודל, הנקראת שלב ה**"מידול של"**, יכולה להתבצע במגוון של דרכים: על-ידי קיפולי פסי נייר מלבניים, על-ידי שימוש במלבני שברים מפלסטיק או על-ידי ציור סכמטי של מלבנים במחברת המשבצות. בשלב ה**"מידול של"**, התלמידים מפתחים אסטרגיות השוואה לא-פורמליות ותשומת הלב שלהם מופנית לעולם הבעיה. כשהם פועלים עם אמצעי ההמחשה הם חושבים על חלקי פיצות. בשלב הבא, שלב ה**"מידול לצורך"**, המורה מכוונת את התלמידים לפתח שיטות השוואה יעילות. בשלב הזה, תשומת הלב של התלמידים עוברת בהדרגה מעולם הבעיה לעולם המתמטיקה. הם משרטטים, למשל, שני מלבנים באורך של שלם, מסמנים עליהם את השברים $\frac{5}{7}$ ו-$\frac{7}{9}$ (סימון גס) ויוצרים טיעון כגון: ל-$\frac{5}{7}$ חסר $\frac{2}{7}$ כדי להיות שלם, ל-$\frac{7}{9}$ חסר $\frac{2}{9}$ כדי להיות שלם. בגלל ש-$\frac{2}{7}$ גדול מ-$\frac{2}{9}$ אז נשאר פחות ל-$\frac{5}{7}$, ולכן $\frac{7}{9}$ גדול יותר.

בשלב הזה ניתן להבחין בהתגבשות מודל מנטלי, המאפשר לתלמידים לבטא יחסים מתמטיים ולבצע הסקה מתמטית באופן יותר פורמלי. בשלב ה**"מידול לצורך"** מתבוננים התלמידים על מודל ההמחשה וחושבים על יחסים מתמטיים ולא על פיצות. לאחר תקופה של עיסוק משמעותי בסיטואציות בעיה, כגון אלו המתוארות לעיל, צומח מודל "מגדל השברים" והופך לכלי מנטלי עשיר ביחסים מתמטיים.

תהליך המעבר בין שלב ה**"מודל של"** לשלב ה**"מודל לצורך"** מתואר על-ידי Gravemeijer (1999) כתהליך הדרגתי של הסטת תשומת הלב מעולם הבעיה לעולם המתמטיקה. על-פי גישת המודלים הצומחים מודל ההמחשה מוצמח (ולא מוצנח) בהדרגתיות לאורך ההתמודדות עם סיטואציית הבעיה כחלק מתהליך המתמטיזציה שעושה התלמיד. הצמחת המודל מבטיחה יצירת **"היסטוריה קוגניטיבית אישית"** למודל, המחזקת אצל התלמידים את תחושת הרלוונטיות של המודל ומבססת את היותו כלי אפקטיבי לביטוי של יחסים מתמטיים ולביצוע הסקה מתמטית.

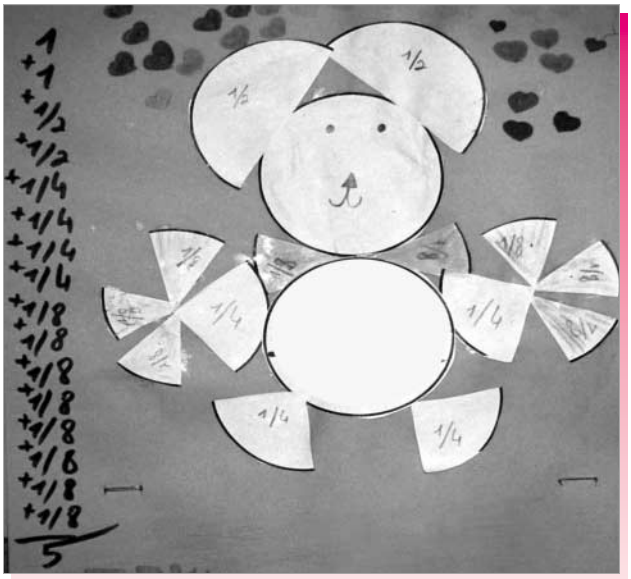
ליצור חדוות מתמטיקה

אחד העקרונות המרכזיים של תכנית "מתמטיקה רלוונטית" היא יצירת חוויית למידה משמעותית. המוטו של התכנית הוא: ללמד וללמוד מתמטיקה בשמחה ובלב חפץ. חוויות למידת מתמטיקה משמעותיות מושגות על-ידי:

א. עיסוק משמעותי בסיפורים מדגימים רלוונטיים היוצרים אצל התלמידים עניין ומעורבות.

ב. עשיית מתמטיקה תוך כדי עירוב מגוון של חושים. התלמידים מקפלים ניירות, מאזינים למוסיקה, בועטים בכדור-רגל ויוצרים יצירות אומנות. אחת הדוגמאות המעניינות לעשיית מתמטיקה תוך כדי פעילות יצירתית רב-חושית היא הפעילות של "תערוכת השברים" שעובדה בבתי-הספר על-ידי המדריכה דינה לסר. פעילות זו משמשת כאחת

מפעילויות המבוא להצמחת מושג השבר הפשוט. התלמידים מקבלים מספר עיגולים צבעוניים מנייר ומונחים לגזור את חלקם לחצאים ואת חלקם לרבעים ולשמיניות. באמצעות קיפולי נייר הם מגלים את יחסי ההכלה בין- $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$ ו-$\frac{1}{2}$. כעת הם מתבקשים ליצור באמצעות הדבקת גזרי העיגולים (שלמים, חצאים, רבעים ושמיניות) תמונות על-פי דמיונם ורצונם. לצד כל תמונה כותבים התלמידים תרגיל חיבור המבטא את סכום כל השברים המופיעים בתמונה (ראו איור 1). תוך כדי הפעילות התלמידים פותרים באופן אינטואיטיבי תרגילי חיבור שברים מוכלים תוך שימוש במגוון אסטרטגיות. "תערוכת השברים" ממחישה בין השאר את העיקרון של "מתמטיקה רלוונטית" על-פיו קונטקסט ריאליסטי אינו חייב להיות בהכרח מציאותי, ובלבד שהוא יוצר אצל התלמידים "עולם אמיתי של התנסויות".



איור 1

ג. תרגול אטרקטיבי ורלוונטי באמצעות משחקי שולחן, חצר מתמטית ומתקנים אלקטרוניים מתוחכמים. בנוסף למשחקי התרגול השולחניים המקובלים הוקמה בכל בית ספר המשתתף בתכנית חצר מתמטית ייחודית. חצר מתמטית זו מכילה לוחות מתמטיים ענקיים וצבעוניים ואביזרי עזר כגון בקבוקים זרחניים וקוביות ספוג גדולות ומנוקדות. הלוחות עוצבו על בסיס עקרונות דידקטיים, אשר יקלו על התלמידים להפנים תבניות וחוקים מתמטיים, תוך כדי משחק והנאה (ראו איור 2). בנוסף לכך הוקם במסדרון הסמוך לחדר המתמטיקה מרכז חדשני הנקרא "עולם המתמטיקה". "עולם המתמטיקה" הוא מרחב למידה פיזי, המציע לתלמידים אוסף של מרכזי למידה חווייתיים המבוססים על מתקנים אלקטרוניים מתוחכמים (ראו פירוט בחלונית המידע על "הכדורסל האלקטרוני"). כל מתקני הלמידה האלקטרוניים ב"עולם המתמטיקה" הם רב-גיליים ורב שימושיים, והם מעוצבים על-פי עקרונות דידקטיים, היוצרים חיבור סינרגטי בין פעילות חווייתית רלוונטית ולמידת מושגים ופעולות במתמטיקה. הניסיון מלמד שחלק מהתלמידים סובלים מ"חרדת מתמטיקה", אשר התפתחה ברבות השנים כתוצאה מסדרה ארוכה של כישלונות. יצירת סביבות למידה המשלבות חוויה וחשיבה (כגון "עולם המתמטיקה") מאפשרות לתלמידים לחוות חוויות של הצלחה, ומציגות את המתמטיקה באור חיובי ומהנה. חוויית ההצלחה כמו גם ההנאה מלימוד מתמטיקה תורמים להפיכת "חרדת המתמטיקה" ל"חדוות מתמטיקה" ומובילים את התלמידים להיפתח ללמידת מתמטיקה.

איור 2

אם להשתמש בלשונו של שוואב (Schwab 1978), חשיבותה של חוויית למידת מתמטיקה משמעותית היא בהיותה אירוע למידה, המנצל לטובה את התשוקה הלימודית של הילד. חוויית למידה משמעותית במתמטיקה מותירה את חותמה החיובי על התלמיד הן מבחינה קוגניטיבית והן מבחינה רגשית.

ליצור תשתית בית-ספרית איתנה להוראה רלוונטית של מתמטיקה

התכנית "מתמטיקה רלוונטית" היא תכנית התערבות דו-שנתית הפועלת כדי ליצור תשתית בית-ספרית איתנה להוראה רלוונטית של מתמטיקה. המיקוד של התכנית הוא: סיוע למורות בתרגום תכנית הלימודים במתמטיקה לפרקטיקה דידקטית אפקטיבית על-פי גישת "מתמטיקה רלוונטית". חשוב לציין שהתכנית עושה שימוש בספרי הלימוד הקיימים בבית הספר, תוך שהיא מנחה את המורות כיצד לנצל באופן המיטבי את חומרי ההוראה והלמידה העומדים לרשותם.

על מנת להפוך את עקרונות "המתמטיקה הרלוונטית" לפרקטיקה דידקטית אפקטיבית נבנתה תכנית התערבות, המיושמת על-ידי מנחות בבתי הספר. צוות המנחות עוסק,

בין השאר, בהדגמה, רפלקציה (על ההדגמה), תכנון תהליכי למידה-הוראה (ברמה שבועית וחודשית) וסיוע בפיתוח חומרי לימוד ותרגול.

תכנית ההתערבות פועלת בשלושה ממדים.

א. הכשרת צוות מתמטי בית-ספרי (בתהליך תלת-שלבי)

- בשלב ראשון מתבצע תהליך הדרגתי של "הכשרת לבבות" לצורך היכרות עם עקרונות התכנית "מתמטיקה רלוונטית".
- בשלב שני מיושמים באופן מלא כל עקרונות התכנית.
- בשלב שלישי מוקם ומוכשר צוות מוביל בית-ספרי (מתוך כלל המורות למתמטיקה) שיוכל להוביל את יישום עקרונות התכנית באופן עצמאי.

ב. פיתוח משותף של חומרי הוראה ולמידה המותאמים לקונטקסט הבית-ספרי

צוות התכנית בשיתוף עם מורות בית הספר מפתח סיפורים מדגימים (פרדיגמטיים), פעילויות להצמחת מודלי המחשה וחומרי תרגול רלוונטיים ומעוררי מוטיבציה. חומרי ההוראה והלמידה מפותחים בהשלמה לספרי הלימוד הקיימים.

ג. בניית סביבות למידה פיזיות המשלבות חשיבה מתמטית וחוויה

על-ידי שדרוג חדר-המתמטיקה, הקמת חצר מתמטית והקמת "עולם המתמטיקה" (כמתואר לעיל).

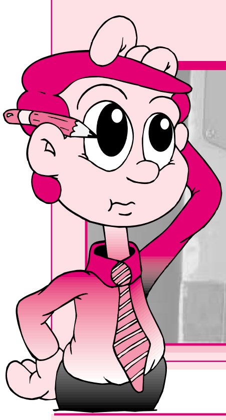
לסיכום, נעיר הערת הבהרה חשובה: האסטרטגיה הפדגוגית בה דוגלת התכנית "מתמטיקה רלוונטית" היא אסטרטגיה הבנייתית מתונה. אסטרטגיה זו מתבססת על תכנון מראש של תהליך מתמטיזציה מונחה ויעיל, ועל מעקב שוטף אחר עמידת התלמידים ביעדים הלימודיים הנדרשים. התהליך הלימודי מתחיל בהצגת הסיפור הפרדיגמטי כנקודת מוצא להבניית הידע ולהצמחת מודל ההמחשה.

תהליך ההתמודדות עם הסיפור הפרדיגמטי מתוכנן מראש כך, שהמורה תנחה את התלמידים להגיע למושגים המתמטים הנדרשים ולאסטרטגיות המתמטיות היעילות ביותר. לאחר פרק זמן ראשוני וקצוב של עיסוק בסיפור הפרדיגמטי ובהצמחת מודל ההמחשה עוסקים התלמידים לאורך פרק זמן משמעותי בהמשגה, בביסוס הידע המתמטי ובתרגולו.

חז"ל אמרו:
"אין אדם למד אלא ממקום שליבו חפץ". מרבית התלמידים הנוטלים חלק בתכנית "מתמטיקה רלוונטית" לומדים מתמטיקה בלב חפץ, ולאחר שנה של יישום התכנית ניתן להבחין בשיפור משמעותי של הישגי התלמידים וביצירת יחס חיובי כלפי מקצוע המתמטיקה.

הכדורסל האלקטרוני

אחד המתקנים ב"עולם המתמטיקה" הוא הכדורסל האלקטרוני (ראו תמונה). מתקן זה פותח כדי לתרגל דילוגים שווים על-גבי ציר המספרים לצורך ביסוס תחושת המספר. המתקן מאפשר למורה ו/או לתלמיד לקבוע את מספר הנקודות שתקבל כל קליעה לסל ולקבוע את זמן המשחק.
הכדורסל האלקטרוני הוא מתקן רב-גילי ורב שימושי: בעוד שתלמידי כיתה ב לומדים להתקדם בדילוגים של 20 החל מ- 0 לומדים תלמידי כיתה ה לדלג ב- 2.5 החל מ- 15.



מקורות

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Dordrecht, Holland: Kluwer Academic Publishers.
Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, 1 (2), 155-177.
Schwab, J. (1978). Eros and Education. *Science, Curriculum and Liberal Education*. Chicago: The University of Chicago Press.
Stevin, S. (1585). *De Thiende, leerende door onghehoorde lichticheyt allen rekeningen onder den Menschen noodig vallende, afveerdighen door heele ghetalen sonder ghebrokenen [The tenth, learning how to make all calculations humanity needs, without using fractions]*. Leiden: Plantijn.
Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). *Mathematics Education in The Netherlands: A guided tour.* FI-ICME-9 cd-rom. Utrecht: Freudenthal Instituut.
Van den Heuvel-Panhuizen, M. (1998). Realistic Mathematics Education: Work In Progress. In T. Breiteig & G. Brekke (Eds.), *Theory Into Practice In Mathematics Education*. Kristiansand, Norway: Faculty of Mathematics and Sciences / Hogskolen I Agder.

תודות

תודה מיוחדת שלוחה לדינה לסר וחיה בראל - מנחות התכנית, לד"ר אלכס פרידלנדר ממכון ויצמן, לאנט הוכשטיין ורחל הר-ציון ממכון מנדל למנהיגות, לינקלה שטיינברג - מהמרכז ליזמות חינוכית, לד"ר אפרים אברהם, רינה וייס, טלי שחר, הדרה עודד-ניסים, אילנה קפלן- רפאלי, רוני קומר ורויטל בר ממערכת החינוך, לשושי פריאל, מלכה כהן, רחלי משולם וסיגלית קליין מביה"ס מודיעים ולרעיה לופטה, זיוה מנדל, דליה אלמוג ורינה לוצקי מביה"ס רימונים.