הוראה והערכה של "שאלות פתוחות לחלוטין"

שרה הרשקוביץ ורמה קלויר

רבות דובר על חשיבותן של שאלות פתוחות במתמטיקה. אך תחת השם הזה באות שאלות רבות השונות זו מזו באופיין. חשיבותן של שאלות אלה היא בעובדה שהן קודם כל שוברות את הסטריאוטיפ שלכל שאלה יש תשובה אחת נכונה. הן גם מאפשרות לתלמידים לעבוד בו-זמנית על אותה שאלה ברמות שונות: יש שיסתפקו בפתרון אחד, יש שימצאו מספר פתרונות, ויש שימצו באופן שיטתי את כל האפשרויות. אך עיקר חשיבותן של שאלות מעין אלה היא בעובדה שניתן ללמד באמצעותן אסטרטגיות שונות לפתרון בעיות.

הפעם נעסוק במטלה אחת שבאופן עקרוני יש לה מספר גדול מאוד של פתרונות והיא מאפשרת התייחסות למגוון רחב של רעיונות מתמטיים.

חסרונן של שאלות כאלה הוא שבדרך כלל אין בידי המורה כלים להעריך את עבודתם של התלמידים השונים ואין בידו את הכלים לטפח רמות פתרון גבוהות יותר. במאמר זה נציג ניסוי שבו ניתנה לתלמידים מטלה פתוחה. נבהיר את הדרכים בהן ניתחנו את הפתרונות השונים, ונציע כלי דידקטי שבאמצעותו המורה יכול לשוחח עם התלמידים על עבודתם ולהגביר את מודעותם לאפשרויות הטמונות במטלות כאלה.

המטלה הוצגה לתלמידים על-ידי צוות מט"ח דרך האינטרנט במסגרת שאלות **"בל"ש"** - פרויקט בפתרון בעיות לא שגרתיות באמצעות האינטרנט, בו התלמידים קיבלו מדי חודש מספר בעיות לא שגרתיות. במהלך החודש התלמידים פתרו ודיווחו על פתרונם בפורום. היו כיתות שבהן יוחד שיעור שבועי לפתרון הבעיות. בחלקן התלמידים עבדו בקבוצות קטנות, בחלקן ביחידות, בחלקן התלמידים התמודדו עם הבעיות במהלך השבוע כשיעורי בית. המשותף לכל הכיתות היה הדיון שהתקיים בעקבות הפתרונות של התלמידים. החומר שננתח להלן נאסף מ-164 תלמידים בכיתות ה. העבודה על המטלה התקיימה במסגרת שיעור עם מורת הכיתה.

ד"ר שרה הרשקוביץ
עומדת בראש צוות המתמטיקה במרכז לטכנולוגיה חינוכית (מט"ח) ועוסקת בחינוך מתמטי. תחומי הפעילות כוללים: פיתוח חומרי לימוד (כתובים ודיגיטליים), מחקר והכשרת מורים. תחום המחקר העיקרי הוא בנושאים הקשורים לניתוח ופתרון בעיות מילוליות (שגרתיות ולא שגרתיות), והיבטים הקשורים לניסוח בעיות.

ד"ר רמה קלויר
PhD מאוניברסיטת בן גוריון. הדוקטוראט עוסק בתהליכי פתרון בעיות ותהליכי למידה של מחוננים ומומחים. מרצה במכללה האקדמית לחינוך ע"ש קיי, באר-שבע. מתמחה בפיתוח חשיבה מתימטית ויצירתיות בחינוך הכללי ובחינוך המיוחד.

המטלה

איזה מן המספרים הבאים 15, 20 , 23 , 25 הוא יוצא דופן? נמק את תשובתך.

המורות דיווחו שהתלמידים נהנו מאוד מפתרון הבעיה, וציינו שהן הזכירו במהלך העבודה שיש יותר מפתרון אחד. הן הוסיפו זאת כאשר התלמידים גילו שלחבריהם יש פתרון אחר מאשר להם. בדרך כלל תגלית זו לוותה בהפתעה שכן הם היו רגילים שלכל שאלה בחשבון יש פתרון אחד נכון. המורים גם ציינו שפתרון הבעיה גרר שיחה בכיתה בה התלמידים הסבירו את נימוקיהם. זו הייתה הזדמנות למורה לתקן לתלמידים ביטויים שונים, או להביאם לדיבור מתמטי מדויק יותר.

דרך הניתוח של תשובות התלמידים

בשלב ראשון הבחנו בין:

א. תשובות נכונות, תשובות נכונות מתמטית העומדות בתנאי המשימה שניתנה.

ב. תשובות לא נכונות, תשובות שיש בהן טעות מתמטית, כמו למשל, "המספר 15 הוא היחידי הזוגי".

ג. תשובות לא מתאימות, אלה היו תשובות שלא עמדו בתנאי המשימה של מציאת "יוצא הדופן".

על מנת לומר שמספר הוא יוצא דופן, צריכה להיות לו תכונה שאין לשלושת המספרים האחרים, או שאין לו תכונה שיש לשלושת המספרים האחרים. התייחסות רק

לתכונות של המספר הנבחר מבלי שיובטחו התנאים לגבי שלושת המספרים האחרים נחשבה על-ידינו כלא מתאימה, למשל: "המספר 20... כי הוא הממוצע בין 15 ל- 25".

ד. תשובות שלא הבנו אותן, לעתים בגלל כתב היד. התלמידים כתבו 680 תשובות. מהן - 561 (82%) היו נכונות, 18 (3%) היו שגויות מבחינה מתמטית, 89 (13%) היו לא מתאימות ו- 12 (2%) תשובות שלא הבנו.

חלק מהילדים נתנו רק תשובה אחת, גם כשהומרצו על-ידי המורות לתת יותר תשובות. מרבית התלמידים (כ-71%) נתנו בין תשובה אחת לארבע, אבל היו גם ילדים שנתנו יותר תשובות: 22% מהם נתנו בין 5 ל- 9 תשובות וכ-7% מהם אף נתנו עשר תשובות ומעלה. ממוצע התשובות הכללי לילד (כולל כל ארבעת סוגי התשובות): 4.15 תשובות לילד (s.d.=3.06).

מהן היכולות שתלמידים מגלים בעבודתם על מטלה מעין זו? ראשית, הם מגלים את רמת הידע המתמטי הפעיל. כלומר, איזה ידע מתמטי הם יכולים לגייס כשאין מגדירים להם באיזה פרק לימוד מתמטי יש להשתמש. שנית, עליהם לגלות יכולת יצירתית המפעילה את הדמיון ומאפשרת למצוא עוד ועוד פתרונות. לפיתוח שתי יכולות אלה יוקדש המשך המאמר.

התשובות המתמטיות שניתנו על-ידי התלמידים

לא כל ארבעת המספרים נבחרו במידה שווה כ"יוצאי דופן". במיוחד ראוי לציין כי המספר 25 נמצא "יוצא דופן" הרבה פחות פעמים. כך, בעוד שכל אחד מהמספרים האחרים נבחר כ"יוצא דופן" בין 170 ל- 180 פעמים, המספר 25 נבחר רק 62 פעמים (ומהן רק 24 היו קבילות).

הידע המתמטי שנגלה בתשובות התלמידים

את הנימוקים הגולמיים שנתנו התלמידים מיינו לקטגוריות לפי סוגי הידע המתמטי שזוהה בנימוקי התלמידים:

1. נימוקים איקוניים (7.8%) n=44: תשובות העוסקות בתכונות חיצוניות של המספר הנבחר.
למשל לגבי המספר 15: "כולם מתחילים ב- 2 וזה ב- 1".

2.נימוקים המתבססים על תכונה מתמטית (75.9%) n=426: הילדים השתמשו בתכונות מתמטיות של המספר, כגון: 'תכונות כפליות' תכונות הקשורות ל'זוגיות ואי-זוגיות' וכד'.
למשל "20 הוא המספר היחיד שמתחלק ב- 2".

3. נימוקים המתבססים על מניפולציות מתמטיות שבוצעו על המספרים (0.2%) n=1: לעתים, כדי להפוך את המספר ליוצא דופן, התלמיד יזם פעולות מתמטיות. למשל: "15 הוא היחיד שאם נחסר ממנו 5 יישאר לנו 10", התלמיד המציא באופן מכוון פעולה מתמטית על המספרים כדי שהמספר 15 יוצג כיוצא דופן.

4. נימוקים המתבססים על צירוף של יותר מתכונה אחת (15.5%) n=87: לעיתים כשהתלמיד נימק מדוע בחר במספר מסוים כיוצא דופן, זיהינו שהנימוק כולל צירוף של יותר ממרכיב אחד. דוגמה: בנמקו מדוע לדעתו 20 הנו היוצא דופן אומר אחד התלמידים כך: "20 הוא היוצא דופן כיוון שהוא היחיד שמתחלק בדיוק ל- 2 עשרות". נימוק זה כולל בתוכו שילוב בין תכונה מתמטית אותה כינינו: "עשרות ואחדות" לבין תכונה אחרת של המספר שכונתה על ידינו:" תכונות כפליות" (כפל וחילוק).

5. נימוקים אחרים (0.5%) n=3:
היו תשובות בהן התלמיד נתן נימוק שאיננו ניתן לשיוך לקטיגוריות האחרות. כלומר, נימוק שאינו מתמטי ואף לא איקוני. לכאן שייכו תשובות כגון: 23 הוא היוצא דופן כיוון ש"הוא היחיד שאני לא מצליח למצוא לו תרגיל".

סוגי הנימוקים ושכיחותם מצביעים על כך שתרגיל זה מזמן לתלמידים אפשרות להביע ידע מתמטי עשיר ומסוגים שונים. אפשר להיווכח שרוב הנימוקים (כ- 76%) מתבססים על תכונה מתמטית מסוימת המבחינה בין המספר שנקבע כיוצא דופן לבין שאר המספרים. כ- 16% מהתשובות כוללות שימוש במניפולציות מתמטיות או בצירוף של תכונות ומניפולציות מתמטיות שונות. קצת מפתיע היה למצוא שבכיתה ה עדיין כ- 8% מהתשובות היו איקוניות, כלומר, התייחסו להיבטים חיצוניים ולא מתמטיים של המספרים, וביטאו בכך קושי לדבר בשפת התכונות המתמטיות. מקרים אלה, הם שמזמנים למורה הזדמנות לקיים דיון כיתתי ולעודד את התלמידים לתת תיאורים מדויקים יותר מבחינת השפה המתמטית והתכונות המתמטיות.

נקודה מעניינת נוספת מתייחסת לקטגוריית "צירוף תכונות

ו/או מניפולציות". הצירוף מזמן לילד אפשרות לחבר באופן מורכב יותר סוגי ידע ופעולות מתמטיות לכלל נימוק רלוונטי. פעולה זו מורכבת וקשה יותר לביצוע.

ואכן בניתוח סוגי הנימוקים ושכיחותם, כפי שתואר לעיל, ניתן לראות כי מספר התשובות הכוללות צירופים קטן בערך פי חמישה ממספר התשובות הנשענות על תכונה מתמטית אחת. תמונה זו יכולה לתת למורה הזדמנות לדרבן את תלמידיו לחפש נימוקים הכוללים מניפולציות וצירופים יותר מורכבים. באופן כזה עשויים התלמידים להשיג שתי מטרות: האחת, הגדלת מספר אפשרויות התשובה שלהם וכך יוכלו למצוא יותר מספרים יוצאי דופן.
השנייה קשורה להעשרת הידע המתמטי והעמקתו על-ידי יצירת קשר וארגון מחדש של ידע מתמטי.

רמות הזמינות והמוכרות של ידע מתמטי אצל תלמידים

נהוג לומר שמישהו עסוק ב"פתרון בעיה" אם לפותר אין אמצעי זמין באופן מיידי כדי להגיע לפתרון (Reitman, 1965).
לפי (Wilson et al, 1933), ייתכן, שמצב מסוים לא יהווה בעיה עבור אדם אחד (שכן יש לו אמצעים שהוא יכול לשלוף באופן מיידי כדי להגיע לפתרון) אך יהווה בעיה לאדם אחר, כי אין לו באותו הרגע ידע זמין. תהליך זה הנו אחד מהמאפיינים המבחינים בין תהליכי פתרון בעיות של מומחים לעומת טירונים. לכן, בעיה הנראית קשה לפתרון עבור טירונים, עשויה להוות בעיה קלה למומחים.

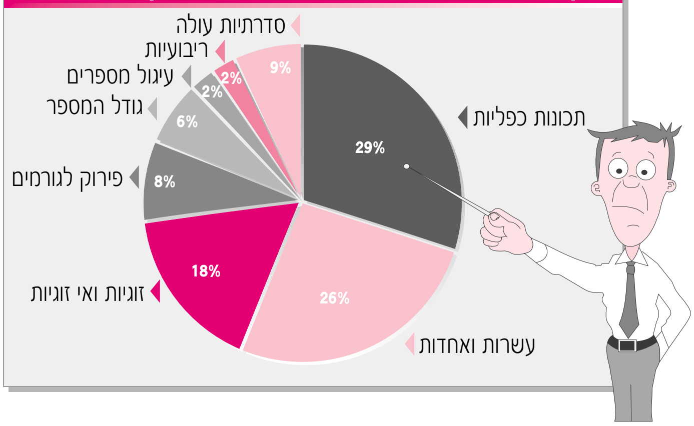
אלה האחרונים מאחזרים ידע רלוונטי המוכר להם ומאורגן כך שהוא מאפשר להם שליפה קלה ואוטומטית לצורך פתרון הבעיה (Bransford et al, 1999).

בחנו, איפוא, באילו סוגי ידע השתמשו התלמידים בשכיחות הגבוהה ביותר. אילו תכונות ומניפולציות מתמטיות משמשות אותם במידה הרבה ביותר.

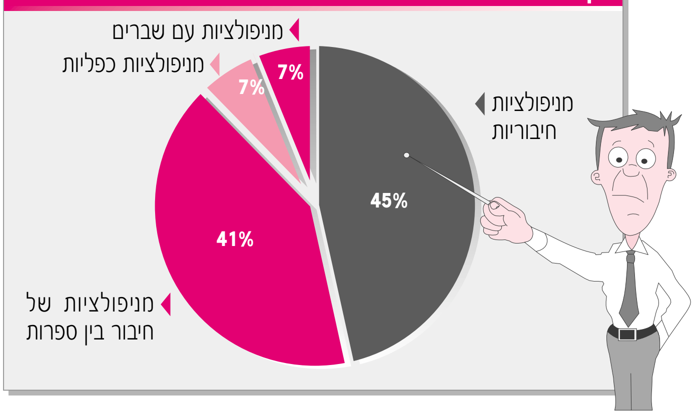
במחקר הנוכחי נוכחנו שסוגי ידע מסוימים זמינים יותר לפותרים: יותר תלמידים משתמשים בהם ושכיחותם גבוהה יותר. ניתן לומר אומנם שהשליפה של תכונה מסוימת כנימוק לבחירה במספר כיוצא דופן, הנה תלוית התכונות של המספר הספציפי, וייתכן שסדרה אחרת של מספרים הייתה מניבה תוצאות שונות.

גרפים 1 ו- 2, ממיינים את השכיחות של כל תכונה מתמטית ומניפולציה שהופיעו בכל אחת מתשובות התלמידים לפי הקטגוריות השונות.

גרף 1: שכיחות התכונות המתמטיות בנימוקי התלמידים



גרף 2: שכיחות המניפולציות המתמטיות בתשובות התלמידים



לגבי התכונות המתמטיות, מגרף 1 שאזכור המבנה הכיפלי של המספר (למה הוא מתחלק, מהן כפולותיו) היה הרווח ביותר (29%). הנימוק השני בשכיחותו נגע לאזכור 'יחידות ועשרות' (26%). לעומת זאת, התייחסות לתכונות כגון: 'ריבועיות' ו'עיגול מספרים' הופיעו כל אחת רק ב-2% מהתשובות. הסיבה אולי טמונה בכך שאלו נושאים שנלמדים מאוחר יותר ושליטת התלמידים בהם חלשה יותר.

לגבי המניפולציות המתמטיות, מגרף 2 שכאשר התלמידים ממציאים ויוזמים פעולות על המספרים כדי למצוא תכונות נוספות, הפעולה העיקרית שהם נוקטים היא פעולת החיבור (כולל סכום ספרות, או תוספות קבועות למספרים הנתונים). כך, מתוך 59 תשובות שהן מניפולציות על המספרים הנתונים, 51 היו חיבוריות. ייתכן, איפוא, שהמניפולציות החיבוריות הן המוכרות ביותר והזמינות ביותר לילדים. לעומת זאת, הם יזמו פחות פעולות הקשורות לכפל (7%) ולשברים (7%). שימוש מצומצם זה יכול להזמין את המורה לחזק תחומים אלה אצל התלמידים ולדרבן אותם ליזום מניפולציות דווקא בתחומים אלה.

הקשר בין המספרים הספציפיים שבמטלה לבין סוגי הידע המתמטי שננקט לגביהם

מעניין היה לראות שמספרים שונים הביאו לדגשים מתמטיים שונים (ראו בלוח 2 בנספח שבגרסה האינטרנטית של המאמר). נתונים אלה שופכים אור, בעקיפין על "החוש המספרי" שיש לתלמידים לגבי אוסף זה של מספרים. בהקשר של ארבעת המספרים הנתונים, 15 בלט בשל תכונת היותו בעשרת השנייה, בעוד האחרים בעשרת השלישית. ב- 20 בלטה תכונת הזוגיות, 23 בלט בהיותו מספר ראשוני. אשר ל- 25 שתכונה בולטת שלו היא היותו מספר ריבועי, כנראה שהיה לתלמידים בכיתה ה קושי לנסח תכונה זו. זה אולי מסביר את מיעוט התשובות לגבי המספר 25. יהיה מעניין לראות מה תהיינה התשובות למספרים אלה בתוך הקשר של מספרים אחרים.

ניסוח הנימוקים כביטוי לרמות ידע שונות

תלמידים שונים כתבו עבור אותה תכונה מתמטית נימוקים דומים אך מנוסחים בצורה שונה. מבחינה זו מאפשרות התשובות המילוליות אבחנה ברמות שונות של ידע מתמטי. על מנת שתלמיד יכתוב שהמספר 25 הוא מספר ריבועי עליו לדעת את מושג הריבועיות. תלמידים שאינם מכירים מושג זה ישתמשו במושגי הכפל שהם שולטים בהם כמו "25 הוא תוצאה של 5x5". כך גם המספר 23 תואר בעיקר במונחי כפל ולא במונחי גורמים וראשוניות. ניסוח התשובות מאפשר למורה לדעת את רמת ידיעתו הפעילה של התלמיד והיא מאפשרת לה לשוחח ולהעלות את רמת הדיון ברוח ה- Zone of Proximal Development שהציע ויגוצקי (Vygotsky,1962). התרגיל הנדון מספק הזדמנות עבור המורה למתוח את הידע המתמטי הפעיל של התלמיד לקראת מימוש יכולתו הפוטנציאלית. שיחה על המושגים שננקטו ועל המושגים ה'יותר גבוהים' שיכלו להינקט, עשויה לספק לתלמיד את הקביים הדרושים כדי להתקדם לידע והבנה ברמות גבוהות יותר.

מדדי יצירתיות - כלי נוסף לניתוח תשובות התלמידים

נוסף על האפשרות של המורה לקדם את ידיעותיהם של התלמידים דרך ההתייחסות המתמטית לביצועיהם במשימה זו, ניתן לעשות זאת גם דרך התייחסות ליצירתיות. כלומר, ניתן לנתח את החשיבה והידע המתמטיים הניכרים בתשובות, גם על-ידי התייחסות למדדי החשיבה היצירתית.

אנחנו ננתח את ממדי היצירתיות ברוח של Guilford (1967, 1973) ו- Torrance (1969) לפי ארבעה מרכיבים:

- **שטף** (fluency) - היכולת של היחיד להפיק מספר רב של פתרונות העומדים במגבלות המטלה.
- **גמישות** (flexibility) - היכולת של היחיד לעבור מצורת מחשבה אחת לאחרת ולהפיק פתרונות המתייחסים לקטגוריות שונות.
- **עיבוד** (elaboration) - היכולת של היחיד להרחיב את הרעיון הנתון, להוסיף לו פרטים, לפתח אותו באמצעות שילוב של רעיונות נוספים ו/או שכלולו.
- **מקוריות** (originality) - היכולת של היחיד להתייחס לבעיה הנתונה באופן חדש וייחודי כך שהוא מפיק פתרונות בלתי צפויים ושאינם מקובלים, בדרך כלל.

כל אחד מהממדים הנ"ל מאיר במבחנים של גילפורד (Guilford,1967) את רמת היצירתיות של הנבחנים, מזווית ראייה שונה, וניתן לעשות זאת גם בבעיות מתמטיות פתוחות. ממד **השטף** יכול להאיר בהקשר המתמטי את כמות הידע הפעיל והזמין שיש לתלמיד בקשר למשימה מתמטית נתונה. ממד **הגמישות** יכול לבחון, כמו במבחן היצירתיות, עד כמה יכול הלומד לעבור ממצב מחשבתי אחד לאחר בעת פתרון בעיות פתוחות במתמטיקה. ממד זה משקף את גמישות הלומד בשימוש בכל פעם בעיקרון מתמטי אחר, בתכונה מתמטית אחרת של המספרים וכו'. הממד השלישי, ממד **העיבוד** יכול להצביע על מורכבות החשיבה המתמטית: ככל שהפתרון הנו מורכב יותר הדבר משקף יכולת אינטגרציה מורכבת יותר בין פיסות שונות של ידע מתמטי. ולבסוף, הממד הרביעי המתייחס **למקוריות**, בוחן את היצירתיות דרך זווית הראייה של מהו המיוחד בתשובת התלמיד לעומת התשובות הרווחות והנפוצות בקרב חבריו. ממד זה, יכול להוות אמת מידה ליכולת החשיבה המתמטית המקורית של התלמיד. יכולתו ל"תקוף" בעיה מתמטית פתוחה מזוויות חדשות ולא צפויות.

במחקר הנוכחי הגדרנו את דרך ההערכה של תשובות התלמידים באופן הדומה לזה המתואר לעיל. בטרם נפנה לדיון כיצד ניתן להשתמש בכלי גם לשיפור ההוראה והלמידה המתמטית, נתאר כיצד הותאמו הממדים למשימה שלנו ונציג את התוצאות שהתקבלו.

השטף - נבחן באמצעות מספר התשובות הנכונות שהתלמיד נתן לכל מספר.

ניתוח התוצאות לגבי השטף מצביע על שתי תופעות מעניינות:

הבדלים אינדיווידואליים בין התלמידים - היו כאלה שלמספר מסוים לא נתנו אף תשובה אך היה גם מי שלגבי מספר מסוים (20) נתן אפילו שבע תשובות, תוך שימוש כל פעם בנימוק אחר נכון. בסיכום ההבדלים האינדיווידואליים בין הילדים ניתן היה לראות שכ- 4% מהתלמידים לא הצליחו, על אף ניסיונם, להגיע ולו לתשובה נכונה אחת לכלל המספרים. לעומת זאת, 6% מהתלמידים מצאו בין 8 ל- 17 תשובות נכונות. כלומר, יותר מנימוק נכון אחד למספר. באופן כללי אפשר לראות שאצל מעל ל- 50% מהתלמידים השטף נמוך למדי כיוון שהצליחו להפיק מספר קטן של תשובות (1-3). רק 16% מהם הגיעו ל- 4 תשובות נכונות ובודדים הגיעו ל- 5 תשובות.

הגמישות - נבחנה באמצעות מספר המעברים בין הקטגוריות, כפי שזוהו בנימוקי התלמיד. המדד חושב לגבי כל מספר בנפרד ואחר כך סוכמו כלל המספרים. כך, למשל, בדף של אחד התלמידים נמצא שהוא ציין את המספר 20 ארבע פעמים כיוצא דופן, תוך שהוא משתמש בארבעת הנימוקים הבאים:

1. המספר היחיד שהוא כפולה של 2
2. המספר היחיד עם 0
3. היחיד שמתחלק ב- 10
4. היחיד שמתחלק ב- 4

כיצד חושב מדד הגמישות לגביו? הנימוק הראשון שייך לקטגוריה של זוגיות ואי-זוגיות. הנימוק השני שייך לקטגוריה של מאפיינים איקוניים. הנימוק השלישי והרביעי שניהם שייכים לקטגוריה של תכונות כפליות. מכאן, שמספר המעברים בין הקטגוריות הוא 2. תלמיד זה קיבל אם כן ציון 2 בגמישות.

תלמיד אחר נתן שתי תשובות עם הנימוקים הבאים:

1. המספר 23 יוצא דופן כי הוא "היחיד שהספרות שלו הן מספרים עוקבים".
2. המספר 23 יוצא דופן כי הוא "היחיד שאינו שייך לסדרה שבה המספרים גדלים ב- 5".

לתלמיד זה מדד הגמישות הוא 1, כי הוא ערך מעבר אחד בין שתי קטגוריות.

במקרה שתלמיד נתן רק תשובה אחת הוא קיבל ציון 0 שכן לא עבר מקטגוריה לקטגוריה.

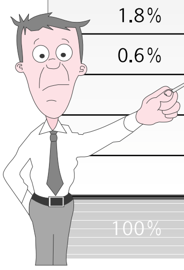
כמו לגבי השטף, גם כאן **היו הבדלים אינדיווידואליים בין התלמידים:** אצל חלק קטן מהתלמידים (כ- 14%) זוהו 6 מעברים ויותר בין הקטגוריות המתמטיות שציינו. מספר גבוה יחסית של מעברים, המצביע על כך שהדבר אפשרי. זאת גם אם התנהגות כזו מאפיינת את המיעוט. מצד שני אצל כ- 5% לא בוצע אף לא מעבר אחד, ואצל אחוז גבוה מהתלמידים (כ- 40%) זוהו רק מעבר אחד או שניים בין הקטגוריות השונות. רוב הנבחנים מרוכזים בשורות המציינות מעבר אחד עד ארבעה.

העיבוד - נבדק באמצעות מספר הצירופים שהתלמיד יזם. זאת, בהתבסס על הרעיון שכל צירוף כולל עיבוד ברמה גבוהה יותר המתבטאת באינטגרציה של מספר תכונות או פעולות מתמטיות. עיבוד זה נעשה על-ידי התלמידים באופן מכוון כדי ליצור מצב שבו המספר הנבחר יובחן מן האחרים.

מן התוצאות אפשר להיווכח שהיו **הבדלים אינדיווידואליים בין התלמידים גם** בממד זה: ראשית, בתשובותיהם של כ- 75% מהתלמידים לא זוהו צירופים, ורק בתשובותיהם של כ- 25% מהתלמידים זוהו בכלל תשובותיהם צירופים (לכל ארבעת המספרים, ראה לוח 1). כלומר, פעולה מסוג זה שעשויה הייתה להגדיל את מספר התשובות, ננקטה במעט מאוד מקרים. היו, אומנם, גם תלמידים שהשתמשו בצירופי תכונות ומניפולציות שלוש, ארבע וחמש פעמים, אך האחוז שהם מהווים הנו זעום (0.6 מהתלמידים בכל מספר). ייתכן שתוצאה זו מצביעה על כך שזו אופציה קשה יותר. אך בה בעת ייתכן גם שהתלמידים לא היו מודעים לאפשרות של ביצוע מניפולציות על המספרים או צירוף בין מספר רכיבים.

אחוז התלמידים שמצאו תשובות נכונות לגבי כל אחד ממרכיבי היצירתיות יחד, לפי התפלגות מספר התשובות הנכונות בסעיפים שטף, גמישות ועיבוד

מספר התשובות הנכונות לתלמיד	שטף	גמישות	עיבוד
0	3.7%	5.5%	75.0%
1	22.6%	26.2%	18.9%
2	15.2%	15.9%	4.3%
3	18.9%	20.1%	4.9%
4	15.9%	12.2%	1.8%
5	6.1%	6.1%	1.8%
6	6.1%		0.6%
7	5.5%		
8 עד 17	6.0%		
6 עד 13		14.1%	
סה"כ 164 תלמידים	100%	100%	100%



לוח 1

המקוריות - נבחנה באמצעות מספר התשובות המיוחדות שנתן תלמיד ושלא נמצאו כמותן אצל האחרים בכיתתו. במחקר הנוכחי לא יכולנו להגיע למסקנות לגבי הבדלים אינדיווידואליים בין התלמידים באשר למידת המקוריות של חשיבתם המתמטית. זאת משתי סיבות: ראשית, התשובות ניתנו על-ידי תלמידים מכיתות שונות ללא זיהוי המשיבים. שנית, התלמידים לא דורבנו מראש לחפש אחר תשובות מקוריות.

מה ניתן לעשות עם כלי זה?

הבחירה במשימות המעודדות יצירתיות כדרך יעילה להוראת מתמטיקה הוצעה גם על-ידי Mumford et al. (1994, 1997), הטוענים שמשימות כאלה יכולות לזמן אמצעי לעיבוי הידע הקודם, ארגונו מחדש ועיבודו. בהתייחסם לבעיות פתוחות מסוג "הפקת בעיות" (problems construction). הם מציינים שהעיסוק בבעיות מעין אלה עשוי לתרום ללמידה לפחות משלושה נימוקים:

1. הפקה יצירתית מחייבת את הלומד להפעיל שוב ושוב ידע קודם ולגזור ממנו את החלקים הרלוונטיים למשימה.
2. בעת שהלומד מנסה להעלות השערות ולאמתן, הוא לוקח חלק פעיל בהבניית הידע שלו ובעיבודו.
3. הפעילות של הלומד בעת שהוא מעריך את נכונות השערותיו מסייעת לו לארגן מחדש את הידע שלו, ומסייעת לו לפתח תכנית פעולה כללית לפתרון בעיות.

נימוקים אלה משמשים חוקרים בתחום הוראת המתמטיקה (למשל, Silver,1994, 1997) כדי לבסס את הטענות הבאות:

א. משימות פתוחות בתחום הוראת המתמטיקה יכולות לשמש גם אמצעי לקידום היצירתיות המתמטית של הלומדים וגם אמצעי הוראה שיסייע בהעמקת הידע המתמטי שלהם, עיבויו וארגונו מחדש.

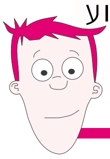
ב. השימוש במםדים, כגון: שטף, גמישות ומקוריות עשויים לשמש גם אמצעי הערכה בידי המורה. באמצעות כלי זה יכול המורה להעריך את מידת היצירתיות של תלמידיו וגם לבצע הערכות שוטפות של הידע המתמטי הפעיל של התלמידים.

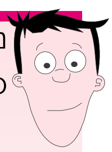
המחקר הנוכחי השתמש בבעיות פתוחות העוסקות בסדרת מספרים שבה התלמידים צריכים לבחור במספר יוצא דופן. כיוון שכל אחד מהמספרים יכול להימצא כיוצא דופן מסיבות שונות, הרי שמשימה זו יכולה לפתח את החשיבה המתמטית היצירתית של התלמיד. מצד שני מטלה כזו יכולה להוות בידי המורה כלי הוראה וכלי אבחון. ניתן מספר דוגמאות.

ברמת התלמיד הבודד

לפי התוצאות, נראה שההבדלים האינדיווידואליים בין התלמידים הנם גדולים. ניתוח ההבדלים יכול להוביל את המורה להעריך את רמת הידע המתמטי ואת אופן החשיבה של התלמידים בכיתתו. זאת על-ידי בחינת והשוואת ציוני התלמידים השונים בכל ממד. השוואה כזו עשויה להוות כלי דידקטי לפיתוח היכולת המתמטית של תלמידים שלא הגיעו לרמות גבוהות, ולעידוד התלמידים שכן הגיעו לרמות גבוהות בממד זה או אחר למתוח קדימה את ביצועיהם.

ניקח לדוגמה את אחד התלמידים שהשיב מדוע 15 הינו יוצא דופן באמצעות 3 נימוקים שונים. הוא נתן את התשובות הבאות: א."כולם מתחילים ב- 2 וזה ב- 1". ב."כל המספרים האחרים מתחילים באותה ספרה וזה לא". ג."ספרת העשרות שלו שונה". ניתוח תשובתו מצביע כי בממד השטף, ציונו 3, ומבחינה זו מצבו די טוב כיוון שהוא מצוי בין 6% העליונים מבין הנחקרים (ראה לוח 1). יחד עם זאת ניתוח ממד הגמישות עשוי להצביע כי שלושת הנימוקים משתייכים לאותה קטגוריה (ציון במימד הגמישות: 0) ואף לקטגוריה הנמוכה ביותר מבחינת רמתה המתמטית (מאפיינים איקוניים). כמו כן ניתוח על סמך ממד העיבוד יכול לשקף ללומד שאף אחד מנימוקיו איננו כולל צירופים (הוא קיבל ציון 0 בממד העיבוד). ניתוח כזה עשוי לסייע למורה לזהות את הדרך בה פתר התלמיד את הבעיה ולעורר ידע רלוונטי מקטגוריות נוספות. יכולת התלמיד עצמו להבין מדוע תשובותיו מוגבלות עשויה לסייע לו לפתח גמישות רבה יותר ואפשרות לבצע עיבוד ברמה גבוהה יותר.





ניקח לצורך השוואה תלמיד אחר שציין את 15 כיוצא דופן והשתמש בשני הנימוקים הבאים: א. "כולם מתחילים ב- 2 וזה ב- 1" ב. "15 הוא היחיד שמתחלק ב- 3". אם נשווה נימוקים אלה לנימוקיו של התלמיד בדוגמה הקודמת, נוכל לסייע לשני התלמידים וגם לשאר תלמידי הכיתה להבין שעל אף שאצל התלמיד הראשון הציון בממד השטף הינו גבוה יותר (3 נימוקים לעומת 2) הרי שאצל התלמיד השני ישנו מעבר בין קטגוריות וציונו בממד הגמישות הינו גבוה יותר. ניתוח כזה של המורה יכול לשמש כלי מובנה להערכת הידע של התלמידים ויכולותיהם ואמצעי יעיל לפיתוח חשיבה מתמטית.

ברמת הכיתה

ראשית, העובדה שהיו הבדלים כה גדולים בכמות ואופי התשובות של התלמידים מזמינה ניתוח של ביצועי התלמידים על-פי מספר ממדים שונים. ניתן לבחון לאור הממדים אילו מהם זקוקים להעמקה ולחיזוק נוספים. למשל, בחינת התכונות בהן השתמשו התלמידים מצביעה כי במחקר זה רוב התלמידים השתמשו בעיקר בנימוקים המתבססים על התכונות הכפליות של המספרים ועל המאפיין של עשרות ואחדות (ראה גרף 1) ואילו הצירופים השכיחים ביותר ערבו שימוש בפעולת החיבור (ראה גרף 2). תמונה זו יכולה לשמש למורה תמרור לגבי סוגי ידע שננקטים פחות, והיא יכולה לברר האם התלמידים לא משתמשים בתכונות אחרות כי הם מכירים אותן פחות? עסקו בהן פחות? האם הם פחות מודעים לפוטנציאל שלהם לשמש כחלק מצירופים מורכבים יותר?

במחקר נמצא כי רק מעטים מבין התלמידים ביצעו מניפולציות. ייתכן שהדבר נובע מחוסר מודעותם של התלמידים שניתן ל"שחק" במספרים, או מחוסר העזה. עידוד בכיוון כזה יכול להרחיב את ראייתם המתמטית ולמתוח את יכולות החשיבה שלהם. למשל, השימוש במניפולציות הכוללות שברים, היה מעט מפתיע, לא צפוי. זאת, כי אין במשימה רמז לאפשרות שנושא השברים הוא רלוונטי. יחד עם זאת גיוסם של השברים למשימה וייצוג נוסף העשיר את מספר התשובות של חלק מהתלמידים שבמחקר. שימוש בידע קודם, שלא תמיד נראה על פניו שהוא רלוונטי הינו מאפיין מרכזי בביצוע היצירתי. מבחינה מתמטית הוא מאפשר לגייס בו-זמנית סוגי ידע שונים שהיו ממודרים ולעשות בהם שימוש אינטגרטיבי חדש.

ניתן גם לבחון את תמונת המצב הקבוצתית שעולה לגבי השטף, הגמישות והעיבוד. יש כאלה מבין התלמידים המגיעים לשטף של 17 תשובות נכונות, יש המבצעים בגמישות 13 מעברי קטגוריות בכלל המספרים, או 4 עד 5 מעברים בהתייחסם למספר אחד בלבד. יש גם המעבדים את הידע שלהם ברמה המאפשרת להם להפיק 5 תשובות שונות המכילות קומבינציות. אך כל אלה אינם מייצגים את הרוב. מורה יכולה לומר לעצמה לנוכח תמונת מצב זו:

א. אם הם יכולים, אולי גם האחרים יכולים. במקרה זה תנסה המורה לעודד עוד ועוד תלמידים להתקדם ברמת הביצוע היצירתי ובכך גם לשפר את השימוש המושכל בידע המתמטי שלהם.

ב. אם תלמידים מסוימים יכולים להגיע לדרגות חשיבה יצירתית ומתמטית גבוהות, אולי ניתוח רפלקטיבי בכל ממד וממד יסייע להם עצמם למצוא עוד דרכים ובכך להעלות עוד יותר את רמת ביצועיהם.

לסיכום

מתן כלי הערכה פשוט יחסית למשימות מתמטיות פתוחות יכול לסייע למורה ולתלמידים להעריך את הפתרונות, והוא אף עשוי לשמש אמצעי חשוב לעידוד חשיבה מתמטית יצירתית.

הערה: לוחות בהם ממצאים מפורטים של המחקר נמצאים בגרסה האינטרנטית של המאמר באתר: http://mathcenter-k6.haifa.ac.il

מקורות

Bransford, J. D., Brown, A. L., & Cocking, R. R. (1999). *How people learn: Brain, mind, experience, and school,* (pp. 19-38). Washington, DC: National Academy Press. Available online at: http://www.nap.edu/html/howpeople1/

Guilford, J.P. (1973). *Characteristics of Creativity.* Springfield, IL: Illinois State Office of the Superintendent of Public Instruction, Gifted Children Section.

Guilford, J.P. (1967). *The Nature of Human Intelligence*, New York: Mc Graw-Hill Book Company.

Mumford, M. D., Reiter-Palmon, R., & Redmond, M. R. (1994). Problem construction and cognition: Applying problem representations in ill-defined problems. In M.A. Runco (Ed.), *Problem finding, problem solving, and creativity* (pp. 3-39). Norwood, NJ: Ablex Publishing Company.

Mumford, M.D., Baughman, W.A., Maher, M.A., Costanza, D.P. & Supinski, E.P. (1997). Process-based measures of creative problem-solving skills: IV. Category combination. *Creativity Research Journal, 10*(1), 59-71.

Reitman, W. R. (1965). *Cognition and thought.* New York: Wiley.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 19-28.

Silver, E. A. (1997). Fostering Creativity through Instruction Rich in Mathematical Problem Solving and Problem Posing. *ZDM - Zentrallblatt fur Didaktik der Mathematik, (3)*, 75-80. In English, available on-line at: http: //www.fiz-karlsruhe.de/fiz/publications/zdm/zdm973a3.pdf

Torrance, E. P. (1969). Creativity: What Research Says to the Teachers. *Series No. 28.* Washington, DC: National Education Association.

Vygotsky, L.S. (1962). *Mind and society: The development of higher mental processes.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Wilson, J.W., Fernandez, M.L., & Hadaway, N. (1993). Mathematical problem solving. In P.S. Wilson, (ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (pp. 57-78). New York: Macmillan and NCTM.