

## שיעור על חילוק בשבר כהדגמה לכמה עקרונות הוראה רון אהרוני

במאמר זה יוצגו כמה עקרונות הוראה שיודגמו לאחר מכן בשיחה על חילוק בשברים. הדגמה זו תהווה הזדמנות לספר על הוראת חילוק מספר בשבר - אחד הנושאים הנחשבים לקשים בהוראת השברים. המאמר יכלול כמה טעיפים על עקרונות הוראה שונים, ובסופו פרק אחד, במבנה של שיחה בין מורה ותלמידה, על הוראת חילוק מספר בשבר. העקרונות שעליהם מדובר במאמר הם ראשוניים מכדי שיהיה צורך לבססם במחקרים סטטיסטיים, או לייחס אותם למאמר זה או אחר. משום כך גם לא הוספתי הפניות למאמרים או מחקרים מתחום החינוך המתמטי. הדבר נכון גם לגבי התוכן הדידקטי של המאמר: דרך ההוראה הזאת של חילוק שברים אינה חדשה, כמוכן, אבל איננה נפוצה, ולכן, לדעתי, תוסיף דבר מה למוורים. מובן שאין זו הדרך היחידה להוראת החילוק בשבר, אבל נראה לי שהיא דרך מוצלחת.

### "שאל אותי שאלה יותר פשוטה"

כשהייתה בת שמונה בערך לימדה אותי בתי הקטנה, פרק חשוב בהוראה. שאלתי אותה שאלה, והיא ביקשה "שאל אותי שאלה יותר פשוטה". היא לא התכוונה להתחמק מן השאלה, אלא ביקשה ממני שאבנה לה מדרגה נוספת בדרך לפתרון השאלה המקורית.

לאחר שתדע לפתור את השאלה הקלה יותר, תוכל לגשת לשאלה הקשה. אם חישוב  $6+9$  קשה לילד בכיתה א, צריך לשאול אותו תחילה מהו  $1+9$ , ואז  $2+9$ ,  $3+9$  וכ'. אם חישוב  $35+23$  קשה, שאל קודם כמה הם  $20+30$ , וכמה הם  $5+3$ . שאלה קלה יותר משמעה, בדרך כלל, פירוק של השאלה הקשה.

### שתפו את התלמידים בעקרונות חשיבה בסיסיים

כדאי לשתף את הילדים בעקרונות החשיבה הבסיסיים. למשל, כשאני משתמש בכיתות בעיקרון שעליו סופר בסעיף הקודם, אני מקדים ומספר את הסיפור על בתי. את התלמידים אני ממריץ לבקש גם הם שאלה קלה יותר כאשר אינם יודעים את התשובה. אני מספר להם על כך שללמוד זה כמו לטפס על בניין - נחוצות מדרגות קטנות. יש ילדים עם רגליים ארוכות יותר, והם יכולים להסתדר עם מדרגות גבוהות, ויש ילדים עם רגליים קצרות יותר, ובשבילם נחוצות מדרגות נמוכות. אבל כל אחד יכול לפתור כל בעיה, אם מספקים לו מדרגות נמוכות מספיק.

### דירוג

לאחרונה נפגשתי עם תלמידים, שקובצו מתוך כיתות ג וכולם התקשו בחשבון. חלק מן הילדים לא ידעו לחבר מספרים מתחת ל-20. בשלב כלשהו שאלה המורה את השאלה הבאה: "נערכו 3 פגישות, כל אחת בת 50 דקות. כמה זמן ארכו כל הפגישות, בשעות ודקות?".

תיארת לי מה יקרה - יהיה ילד אחד או שניים שידעו להשיב, וכל השאר יישארו לגמרי מאחור. לכן התערבתי, וסיפרתי את הסיפור על בתי, וכן את הסיפור על המדרגות. אמרתי להם שאני אשאל אותם שאלות מקדימות, והבטחתי להם שבכל שלב הם יידעו לענות. ניגשתי דווקא לילדה שסירבה קודם לכן לשתף פעולה, ושאלתי אותה כמה הן 60 דקות. היא ידעה - שעה אחת. עתה שאלתי - וכמה הן 61 דקות? גם זאת היא ידעה, שעה ודקה. ו-62 דקות? עברתי בין הילדים, ולא פסחתי על אף מספר. מדי פעם גיוונתי בקפיצות, כדי לעניין את התלמידים החזקים יותר - אם 80 דקות הן שעה ו-20 דקות, כמה הן 90 דקות? כמה הן 30 דקות? אכן, חצי שעה, ואם כן 90 דקות הן שעה וחצי. אבל אחר כך חזרנו לתלם, ודילגנו בקפיצות של דקה. לבסוף הגענו לכך ש-119 דקות הן שעה ו-59 דקות. וכמה הן אם כן 120 דקות? שעה ו-60 דקות. אבל כמה הן 60 דקות? אכן, שעה, כלומר אלה הן שעה ושעה, כלומר, שעתיים. לבסוף הצלחנו לענות על השאלה כמה הן 150 דקות, וכך ידענו להשיב על השאלה המקורית. כל זה לא לקח הרבה זמן, ובסיכומו של דבר חסך זמן. אי-דילוג על שלבים חוסך זמן, בחשבון סופי.

## דגש על משמעות, ודקויות של משמעות

לפעולות החשבון יש שני רכיבים: חישוב, שפירושו איך לבצע את הפעולה, ומשמעות, שפירושה מתי לבצע אותה, כלומר, לאיזה מצב במציאות היא מתאימה. מבין השניים, המשמעות חשובה יותר. יש המלמדים קודם חישובים, ורק אחר כך את המשמעות, דרך בעיות מילוליות. זוהי טעות: הדבר הראשון שצריך ללמוד הוא משמעות הפעולה. בעיות מילוליות צריכות להיות השלב הראשון, לא האחרון. והילד עצמו צריך להיות מסוגל להמציא בעיות מילוליות, או כפי שנהוג לקרוא להן בבית הספר היסודי: "סיפורים חשבוניים".

לפעולה אחת יכולות להיות מספר משמעויות, ונחוץ ללמוד את כל המשמעויות. ראשית, משום שהתלמיד יפגוש את המשמעויות השונות במהלך לימודיו. תלמיד בכיתה ז' שלא למד שלחיסור יש גם משמעות של הפרדה לסוגים, ורגיל שבחיסור תמיד משהו נגרע או נעלם, יתקשה להשיב על השאלה: "בכיתה יש 30 תלמידים, מהם x בנות, כמה בנים יש בכיתה?". הבחנה בין דקויות של משמעות היא דרך מעולה להכיר את המשמעות. החשובה בין דקויות המשמעות בחילוק היא ההבחנה בין חילוק לחלקים (שבו,  $6:2=3$ ; משום שכאשר מחלקים 6 עצמים ל-2 חלקים שווים כל חלק מכיל 3 עצמים), וחילוק להכלה (שבו,  $6:2=3$ ; משום שכאשר מחלקים 6 עצמים לקבוצות של 2 יש 3 קבוצות). מדוע הבחנה זו חשובה, נראה בפרק על חילוק בשברים.



## אין דוגמאות פשוטות מדי

כל מתמטיקאי יודע: כשאתה עוסק בנושא חדש, הדבר הראשון להסתכל בו הוא דוגמאות פשוטות ככל האפשר, מתוך הנושא החדש. **לא קיימת "דוגמה פשוטה מדי"**. דבר זה נכון עוד יותר בהוראה. צריך לעודד את התלמידים להסתכל בדוגמאות הפשוטות ביותר האפשריות. כאשר לומדים חיבור, עודדו את התלמידים להמציא את התרגיל הפשוט ביותר שהם יכולים למצוא. כאשר לומדים חציית גבול העשרת (מספרים קטנים מ-10 שסכומם גדול מ-10) בקשו מהם להמציא תרגיל פשוט ככל האפשר מסוג זה. שאלו את תלמידים: מהו התרגיל הקל ביותר של חיסור, שבו המחוסר הוא 1000 וצריך בו פריטה? מהו תרגיל החילוק הפשוט ביותר שבו מחלקים בשבר?

## תנו לתלמידים להמציא שאלות

מבנה השיעור של מורה שואל - תלמיד עונה, אינו בהכרח המאלף ביותר לתלמיד. הידיעה לשאול שאלות היא דרגת הבנה אחרת מאשר הידיעה להשיב על שאלות. בקשו מתלמידים למשל: המציאו שאלות חיסור שבהן אין צורך בפריטה; המציאו תרגיל חילוק ב-3 שבו אין שארית; המציאו תרגיל חילוק ב-3 שבו יש שארית 1. המציאו תרגיל חילוק בשבר שתוצאתו היא  $\frac{1}{2}$ ; המציאו תרגיל חילוק ב- $\frac{1}{2}$  שתוצאתו היא 1.

עיסוק בשאלות מסוג זה מתחבר לעקרון חשיבה חשוב, והוא ההיפוך. כשלומדים תהליך, כדאי ללמוד גם את ההיפוך שלו. אם לומדים לתרגם בעיות מילוליות לתרגילים חשבוניים, רצוי לעשות גם את ההפך - להתאים סיפור חשבוני לתרגיל נתון. המצאת שאלות היא אחת הדרכים להפוך תהליכי חשיבה.

**שיחה על חילוק בשברים**

איך מחלקים ב- $\frac{2}{3}$ ?

בפרק הזה אתפוס שתי ציפורים במכה אחת: אסביר איך מחלקים בשבר, ובאותה הזדמנות אדגים גם את יישומם של עקרונות ההוראה שנידונו לעיל. אעשה זאת דרך סיפור על שיחה שערכתי עם בתי, גפן, שלמדה אז בכיתה ד. כוונת הבאת השיחה כאן אינה להציג שכל מורה יערוך שיחה כזו עם כל תלמיד, אלא לספק כמה רעיונות לשיחה מסוג זה. את עקרונות הלמידה שיופיעו בשיחה כאן אציין באותיות מודגשות.

**אני** (להלן-"א"): למדנו איך כופלים שברים. בואי נראה איך מחלקים בשבר. למשל, איך מחשבים  $10 : \frac{2}{3}$ . איך, לדעתך, צריך להתחיל?

**גפן** (להלן-"ג"): צריך לשאול שאלה יותר קלה.

**(התחל משאלה יותר קלה. הילדה כאן למדה את החוק הזה. שתף את הילדים בכללי ההוראה הנכונים.)**

**א:** יפה. אם כן, נתחיל מחילוק בשבר יותר קל. איזה שבר הוא הכי פשוט, בעיניך?

**ג:**  $\frac{1}{2}$

**א:** חצי הוא באמת שבר שאנחנו מכירים ומבינים היטב. האם תוכלי להמציא לי תרגיל חילוק פשוט ככל האפשר, שבו מחלקים ב- $\frac{1}{2}$ ?

**(התחל מדוגמאות פשוטות ככל האפשר; תן לתלמיד להמציא שאלות.)**

**ג:**  $1 : \frac{1}{2}$

**א:** האם את יכולה לחשב זאת?

**ג:** כן. זה 2, כי  $1 : 2 = \frac{1}{2}$ . אם  $6 : 2 = 3$  אז  $6 : 3 = 2$ . ככה גם אם  $1 : 2 = \frac{1}{2}$  אז  $1 : \frac{1}{2} = 2$

**א:** יפה! אבל הנה עוד דרך, שלי עצמי קל יותר להבין.  $6 : 2 = 3$  כי 2 נכנס ב-6 שלוש פעמים. זוכרת איך קראנו לזה? **ג:** כן, חילוק להכלה.

**(דקויות של משמעות מועילות - הן מופיעות בהקשרים שונים. כאן מדובר בדקות ההבחנה בין סוגי חילוק, הנחוצה ביותר כאשר לומדים חילוק בשברים.)**

**א:** כמה פעמים נכנס ב-1  $\frac{1}{2}$ ?  
**ג:** 2.

**א:** אם כן, כמה הוא  $\frac{1}{2} : 1$ ?  
**ג:** 2.

**(להתבונן באותו דבר מכמה זוויות - ראינו שתי דרכים לחלק 1 ב- $\frac{1}{2}$  יש עוד דרכים להוראת החילוק בשבר, וכדאי להשתמש ביותר מאחת.)**

**א:** תוכלי עכשיו לומר לי כמה הם  $\frac{1}{2} : 3$ ?

**(לדרג - להכניס כל פעם רק עיקרון חדש אחד.)**  
**ג:** כן.  $\frac{1}{2}$  נכנס ב-1 פעמיים. לכן ב-3 הוא ייכנס  $3 \times 2 = 6$  פעמים.  
**א:** יפה. ו- $\frac{1}{2} : 4$ ?  
**ג:** 8.

**א:** ו-1  $\frac{1}{2} : 5$ ? **(ייצוב ההבנה, על-ידי תרגול.)**  
**ג:** 10.

**א:** מהו הכלל?

**ג:** לחלק ב- $\frac{1}{2}$  זה לכפול ב-2.

**(אל הכלל הגענו דרך דוגמאות; את הכלל יש לנסח במפורש.)**

(לדוגמה, תרגול שהייתי מכניס בהוראה בכיתה: כמה חצאי תפוח יש ב-4 תפוחים? כמה הם  $\frac{1}{2} : 4$ ? כמה פעמים נכנס ב-10  $\frac{1}{2}$ ? כמה הם  $\frac{1}{2} : 10$ ? חילקו 34 חפיסות שוקולד בין ילדים, וכל ילד קיבל  $\frac{1}{2}$  חפיסה. כמה ילדים היו? כמה הם  $\frac{1}{2} : 34$ ? את הפעולה יש ללמד דרך המשמעות.)

**א:** טוב, עכשיו נעבור לחילוק ב- $\frac{1}{3}$ . מהו  $\frac{1}{3} : 1$ ?

**ג:**  $\frac{1}{3}$  נכנס ב-1 שלוש פעמים, לכן  $3 = \frac{1}{3} : 1$ .

**א:** ו- $\frac{1}{3} : 4$ ?

**ג:** ב-1 נכנס השבר  $\frac{1}{3}$  שלוש פעמים, אם כן ב-4 הוא נכנס  $4 \times 3 = 12$  פעמים.

**א:** האם תוכלי לנסח את הכלל כאן?

**ג:** כן. לחלק ב- $\frac{1}{3}$  הוא לכפול ב-3.

**א:** אנחנו יודעים כבר לחלק בשני שברים: חילוק ב- $\frac{1}{2}$  הוא כפל ב-2, חילוק ב- $\frac{1}{3}$  הוא כפל ב-3. איך מחלקים ב- $\frac{1}{4}$ ?

## סיכום

אמונתי היא שתפקידו של מאמר בעיתון למורים הוא לחזור על עקרונות הוראה בסיסיים, ולספר על יישומם בנושאים בסיסיים. גם במאמר זה לא ניסיתי בשום צורה לחדש דבר מה, להפך: המאמר הוא סיכום של כמה עקרונות הוראה מאד בסיסיים שאמורים להיות נחלתם של כל המורים. עקרונות אלה נכתבו לספר שעומד לצאת לאור בשם "ללמד", שנכתב ביחד עם משה ריין.

על מחבר המאמר:

## פרופ' רון אהרוני



מרצה בפקולטה למתמטיקה בטכניון. מזה מספר שנים מקדיש, בהתנדבות, חלק גדול מזמנו לחינוך מתמטי בבתי-ספר יסודיים ובחטיבות ביניים. ממייסדי העמותה הישראלית לקידום החינוך המתמטי לכל (המפיצה את ספרי "מתמטיקה יסודית"), והיועץ המדעי שלה. כתב את "חשבון להורים" - ספר להורים ולמורים על חינוך מתמטי בגילאים הצעירים (הוצאת שוקן).

ג: כופלים ב- 4.

א: יפה, הבנת את הכלל. (ליודעי האלגברה: חילוק ב-  $\frac{1}{x}$  הוא כפל ב-  $x$ .)

(דוגמאות נוספות לתרגול: אם מחלקים 5 עוגות, כך שכל ילד מקבל  $\frac{1}{2}$  עוגה, כמה ילדים היו? איזה תרגיל עשית? (תשובה:  $5: \frac{1}{2} = 5 \times 2 = 10$ ). אם פועל חופר כל יום  $\frac{1}{4}$  מטר של תעלה, כמה ימים נחוצים לו לחפור תעלה שאורכה 10 מטרים? איזה תרגיל עשית? אם מחלקים 20 חפיסות שוקולד, כך שכל ילד מקבל  $\frac{1}{5}$  חפיסה, כמה ילדים יש? איזה תרגיל עשית?)

א: עכשיו נחלק ב-  $\frac{2}{3}$ . נחזור לרגע לחילוק ב-  $\frac{1}{3}$ . אם מחלקים 10 עוגות בין ילדים, כך שכל ילד קיבל  $\frac{1}{3}$  עוגה, כמה ילדים היו?

ג:  $30: \frac{1}{3} = 30 \times 3 = 90$ , היו 30 ילדים.

א: נכון. מה יקרה עכשיו אם במקום  $\frac{1}{3}$  עוגה כל ילד יקבל  $\frac{2}{3}$  עוגה, כלומר, פי 2 מקודם? לכמה ילדים העוגה תספיק?

ג: כל ילד מקבל מנה שקודם הספיקה ל-2 ילדים. אם כן, העוגה תספיק לחצי ממספר הילדים, כלומר, ל-  $2:30 = 15$  ילדים.

א: יפה. איזה תרגיל אנחנו עושים כאן? תזכרי - מחלקים 10 עוגות, וכל ילד מקבל  $\frac{2}{3}$  עוגה.

ג:  $10: \frac{2}{3}$

א: נכון. ואיך חישובת זאת?

ג: קודם כפלתי ב- 3, ואחר כך חילקתי ב- 2.

א: נסחי לי את הכלל לחלוקה ב-  $\frac{2}{3}$ .

ג: לחלק ב-  $\frac{2}{3}$  הוא לכפול ב- 3 ולחלק ב- 2.

א: האם תוכלי לנסח לי את הכלל לחלוקה בשבר בכלל?

ג: כן. כופלים במכנה, ומחלקים במונה.

בואו נחזור על הכלל:

**בחלוקה בשבר כופלים במכנה שלו, ומחלקים במונה.**