

לאונרד אוילר (18.09.1783-15.04.1707)

מרגארט פרויט



קשר הקבוע עם אחד המתמטיקאים הגדולים של התקופה הייתה השפעה מכרעת על התפתחותו של לאונרד אוילר כמתמטיקאי: יכולותיו המתמטיות כה הרשימו את יוהאן ברנולי, עד שהמתמטיקאי הנודע פעל לשכנוע את אביו של אוילר להניח לבנו עם לימודי התאולוגיה והשפטות (בินיהם גם עברית) ולהתמקד ב לימודי המתמטיקה. כישרונו הגדל של לאונרד אוילר לא אכזב את אלה שהאמינו בו, והתקנות שתלו בו הוכחו את עצמן. בשנת 1726, כאשר היה בן תשע-עשרה בלבד, כתב עבודה בנושא הסידור של תרנים של אוניות - מעשה גדול עבור מי שגדל בסביבה הרטית וכנראה לא ראה אוניה מימי. העבודה על התרנים זיכתה אותו בפרס השני של האקדמיה למדעים של פריס. שנה לאחר מכן נסע אוילר הצער לסטנט פטרסבורג שברוסיה והצטרכ לאקדמיה למדעים שנשודה על-ידי הצארית יקטרינה, אשתו של פטר הגדול, שנתיים לפני מותה (היא

מאמר זה הוא תחנה ראשונה במסע ההיסטורי חדש המתחיל מطبع הדברים באוט אלף. כמו תמיד נדרשתי גם הפעם להכרעה: האם א עשרה בדמות מתמטיות חשובות – ארכימדס, אוקlidס, אוילר...
אלא שעל הבחירה הפעם הקלה העובדה, שהשנה חוגגים 300 שנה להולדתו של אוילר, יש אמרורים אחד מארבעת המתמטיקאים החשובים ביותר בכל הזמנים: **ארכימדס, ניוטון, גאוס ואוילר**.

אוילר סיפר פעמי שאחדות מתגלויותו הגדלות ביותר התחוו בשעה שבילה בחיק משפחתו ותפקיד כאב: תינוק קרוך בין זרועותיו וחתול אחר מתרוץ טבבו.

על חייו

לאונרד אוילר (Leonhard Euler) נולד ליד העיר באזל שבסוויץ, בנם של מרגארט ופאול. אביו היה כומר שלמד מתמטיקה מתוך אהבה למקרה והוא מורה הראשון של בנו. האב פאול שאך לכך שבניו ילך בדרכו הרוחנית, יהיה איש דת וילמד תאולוגיה. ואכן בגיל שלוש-עשרה החל לאונרד ללימוד באוניברסיטת באזל לימודי תאולוגיה ושפטות, כמצאות אביו. באותה עת למד באוניברסיטת באזל גם ניקולאס ודניאל, בני משפחתו ברנולי, שהפכו במרוצת הזמן, כמו רבים מבני משפחתם, למתמטיקאים ידועי שם. יש אומרים שהודות לאופיו הננו והידידותי הצליח אוילר הצעיר להתיידד עמו ועם אביהם, המתמטיקאי הדגול יהן ברנולי. וכך כתוב לאונרד הצעיר: "קיבلت את הסכמתו [של יהן ברנולי] לבקר אצלו באופן חופשי בכל יום וראשון אחרי הצהרים, והוא הסביר לי באופנות כל דבר שלא היה יכולתי להבין" (Youschkevitch, 1970).

והוא כתב מחקרים חשובים במקוון נושאים: תורת המספרים, מכנית, אנליזה מתמטית ועוד. בנוסף, הוא עסק ביישומים לתיאוריות שפיטה לנושאים במוסיקה ובבנייה מפות. על בעבודותיו בנושא תורה המתמטיקה נכתב שהמחקר היה מתקדם מידי במתמטיקה עבור המוסיקאים, יותר מידי מוסיקלי עבור המתמטיקאים.

עם מותה של הצארית אנה, אחיניתו של פטר הגדול (מלכה בשנים 1730-1740) נכנסת רוסיה לתקופה של אי-שקט פוליטי המלאה באווירה מתחה וחשדנית ואולי אף מסוכנת לזרים. אוילר עצמו כתב שרטוטה בתקופה זו היא "ארץ שבה כל אמירה מסתימת בתליה". (Dunham, 1999). בנסיבות אלה גענה אוילר בשנת 1741 להזמנתו של הקיסר פרדריך הגדול והctrף לאקדמיה למדעים בברלין, שנcosaהה 15 שנה קודם לכן על-ידי המתמטי הדגול לייבניץ (פרויום, 2002).

אוילר התגורר בברלין 25 שנה, וכך הוא כתב בתקילת שהותו בעיר: "אני יכול לעשות כרצוני במחקר... המלך קורא לי המורה שלי", ואני חושב שאני האדם המאושר בעולם". למורות חי בברלין, המשיך אוילר לעסוק במחקריהם גם עבור האקדמיה הרוסית, ואף קיבל חלק ממשלוחם מרוסיה. על מעמדו הרם בעת הייתה תעיד העובדה, שבתקופת שהותו ברוסיה כאשר פרצו קרבות בין צבאות רוסיה ורומניה, ביתו הושמד והוא איבד אתרכושו, אוילר, שהיה גערץ בשתי המדינות, קיבל פיצוי רב על נזקיו (Dunham, 1999).

בשנותיו בברלין פרטם אוילר יותר משלוש מאות מאמרים, בספרים ספרים בנושא האנליזה, ועסק גם בפרסום מדע פופולרי - "מכתבים לנשיכת גרמניה". פרט לעבודתו הפוריה במחקר מתמטי ניהל אוילר את מצפה הכוכבים ואת הגינה הבוטנית, טיפל בעניינים כספיים, ייעץ בנושא מפעלי הipsis, ניהל את פרטומן של מפות ותכנן את מערכת המשאבות של הארמון המלכותי. הקיסר שלם לו בנדיות, ואוילר נהנה מתנאים כלכליים טובים מאוד.



מלכה משנת 1825 ונפטרה ב-1827). תחילת אוילר התגואר בביתה של דניאל ברונולי, חברו מאוניברסיטת באזל, שההמלצתו יוצאה אל הפועל ההזמנה לאקדמיה למדעים בסנט פטרסבורג.

בשנת 1730 התמנה אוילר לפרופסור לפיזיקה באקדמיה של סנט פטרסבורג, ושלוש שנים לאחר מכן, עם עזיבתו של חברו, הפרופסור למתמטיקה דניאל ברונולי, התמנה אוילר לפרופסור למתמטיקה במקום ידידו הטוב. התקדמותו בהיררכיה האקדמית העניקה לו ביחסון כלכלי, ובעקבותיו הוא נשא בינוואר 1734 את קטרינה, בתו של ציר ממשפחה שויצרית, לאישה. לבני הזוג נולדו 13 ילדים, אך רק חמישה מהם נותרו בחיים לאחר גיל הונקות (כפי שקרה במשפחות רבות אחרות באותה זמנו). רק שלושה מילדיהם האריכו ימים לאחר מות הוריהם. אחד מבניו של אוילר, יהונ אלברכט, הפך ברבות השנים למדען חשוב בזכות עצמו והוא לעוד לאביו במחקריו הרבים.

לי昂רד אוילר היה איש אדיב, נעים הליכות ומסביר פנים. למורות שבמחצית השנייה של חייו הוא היה איש אמיד, הראותנות לא נטה חלק בסגנון חייו והוא ניהל אורח חיים פשוט ושגרתי. גם לצורת העין לא היה מקום בלבד, ומספרים עלייו שכשר ידידו לעתיד, המתמטי לואי לגרנד' (Lagrange), מצא שביכולתו לבצע שיפוריים באחד מחקריו של אוילר, אוילר לא התמלא קנה, אלא הביע שמחתו על כן. יתרה מזאת, התוטפות במאמריו דרבנו את דמיונו של אוילר והוא החל לעסוק בשכלול נסח משלו לאוטו מחקר. זאת דוגמה נחרצת לעובודה מושתפת של שני מתמטיקאים גדולים לטובת התפתחות המתמטיקה, ביגוד לעוינות, הפלגנות והתקינות שקרו אי מדור זה פגirm. בסיפוריו חיהם של מתמטיקאים אחרים.

אוילר בורך בכישרונו לשפטות ובזיכרונו פנוונאל. מוחו היה מקום אחסון למוגון גודל של עבודות מוחרות, בינהן רישומות של מספרים ראשוניים, הוכחות ודרשות, נוסחאות ושירם. בשעות המנוחה הוא אהב לගרום הנאה לחבריו בדקלו שירים של משוררים אходדים. בשנותיו בסנט פטרסבורג פרחה ושגשגה גאוניותו של אוילר

היו מעבר לעולה על הדעת. בזכותם הצליח אוילר להמשיך בעבודתו בתחום האופטיקה, האלגברת והתנוועה הירחית. מדהים הדבר, שלמעשה בתקופת שהותו ברוסיה, מאז היותו בן 58, יצר אוילר מכחית מכל עבודהו,盍 את לירות עיורונו המכטט מוחלט. אומץ לו ווחלטו הנושאות לא להיות מובט על-ידי גזרת הגורל ולהמשיך ליצור למחרות העיורון - הם דוגמה לניצחון רוח האדם, ומשמשים מקור השראה למתמטיקאים וליזרים וחוקרים באשר הם. מכיה נספתח ניחתה על אוילר בן ה- 66 כאשר אשתו אהובה קטרינה, שעמה חי למעלה מאבעה עשרים, נפטרה בשנת 1773. שלוש שנים מאוחר יותר נשא אוילר לאישה את אחותה החורגת אביגיל והוא חלה עמו את שנותו.

"ב- 18 ספטמבר 1783 בילה אוילר את החציו הראשון של יומו כהרגלו" (Dunham, 2007). הוא לימד מתמטיקה את אחד מנכדיו, ופתר מספער בעיות מתמטיות הקשורות בתנועת כדורים פורחים. לאחר הצהרים ערך מספר חישובים הקשורים בכוכב הלכת אורנוס, השביעי במרקוזו מהשמש, שהתגלה רק שנתיים קודם. על משוואותיו אלה יסתמכו האסטרונומים שיגלו בשנים הבאות את כוכב הלכת נפטון. אלא שאילר כבר לא יזכה ללמידה על תגלית זו, כי בשעה חמיש של אותו אחר צהרים הוא לאה בשטף דם מוחי ומות עברבו של אותו יום. אוילר נפטר בטנט פטרסבורג.

תרומת אוילר למחקר המתמטי

לייאונרד אוילר היה הכותב הפורה ביותר בתחום המתמטיקה בכל הזמנים. עבדתו השלהמה כוללת מעל 860 ספרים וממאמרים. אפשר לומר שכמעט לא היה תחום

במתמטיקה שאילר לא הותיר בו את חותמו. אחד המאפיינים החשובים שלו בעבודתו היה נכונותו להבהיר את תגליותיו בפרטיו פרטיטים. המורה המתמטיangi ג'ורג' פוייה כתב: "אוילר עשה מושהו שף מתמטיangi גדול אחר במעטדו לא עשה. הוא הסביר כיצד הגיע לממצאים ואני מWOOD התענינתי בכך" (פרויום, 2004). אוילר כתב כאילר היה מדבר עם הקורא, מפרש ומבahir עבורו את תהליכי הගילוי, ולפעמים אף מתנצל על חוטר ההקפה על הדוק המתמטי. עבדתו באקדמיה לא אפשרה לו למדוד והוא לימד רק את העוזרים שלו (Alexanderson, 1983).



בחולף הזמן החלו היחסים בין אוילר ובין הקיסר פרדריך הגדול להתדרדר, על רקע מעורבותו המתחמשת של הקיסר בינויולה של אקדמיה בברלין. בנוסף, גם התרחשויות בחצר הרא兜תנית והזוהרת של הקיסר פרדריך לא תאמו את השקופתיו השמרנית ואת אורח החיים פשוט והצנוע של אוילר. התוצאה הייתה, שלאן מניע הגינוי הקיסר פיתח תחושות של זלזול ולעג כלפי גודל המתמטיקאים שבחזרו. עוניותו של הקיסר, מחד גיסא, והתקדים והמידות בחצרו, מיידך גיסא, גרמו לאוילר לעזוב את ברלין ולשוב בשנת 1766 לטנט פטרסבורג. הוא התקבל בכבוד רב על-ידי הצארית יקטרינה השנייה שכונתה יקטרינה הגדולה, אשר שלטה ברוסיה בהצלחה מרובה בין השנים 1762 – 1796. מהלך זה היה, כמובן, למורת רוחו של הקיסר פרדריך

והוא רגز מאוד על עזיבתו של אוילר. עוד בהיותו בן 31 בלבד כבר התחליל אוילר לטבול מבעיות ראייה, שעל-פי עדותו באו לו בעטיה של עובודתו המאומצת בבניית מפות (אם כי חוות דעת מודרנית קובעת שהיא צהו זו מחלת שפוגעה בראייתו). שנתיים מאוחר יותר איבד המתמטיקאי את הראייה בעינו הימנית. בשנת 1766 בהיותו בן 59, וחמן קצר לאחר שבו לטנט פטרסבורג, איבד כמעט כלולתו את הראייה גם בעינו השניה. הוא הגיע על מכיה זו באופטימיות האופיינית לו בהצהירו: "מעתה תהינה לי פחות הנסיבות דעת". איינשטיין כתוב פעמי שקיימות שתי דרכים לחיות את חייך, האחת היא לחיות כאילו שום דבר אינו נס, והאחרת, לחיות כאילו כל דבר הוא נס. ניתן לומר שליאונרד אוילר בחר בדרך השנייה.

היעירון לא הביא להאטת קצב עבודתו של אוילר. הוא נתמך על-ידי עוזרים שונים, ביניהם גם מדענים בזכות עצם, כאמור, בנו והוא היה לו עוזר רב. בתשובהו המרגשת למכתבו של המתמטיקאי לארכנד' כתב אוילר: "כל החישובים שלך והוקראו לי... אבל מכיוון שאינו מוסgal לך או לכתב, אני חייב להתודות שדמוני לא יכול היה לעקוב אחר כל השלבים של החישובים שלך, וגם לא לזכור את משמעותם של הסימנים שלך. בכך הוא הדבר שמחקרים מסווג זה גרמו לי בעבר נאה... אך כתה אני יכול לעסוק רק במה שאני יכול לבצע בראש..." (Varadarajan, 2006).

יכירנו הנפלא של אוילר וכולתו לבצע חישובים בעל-פה

n	$\phi(n)$
1	$\emptyset(1)=1$
2	1
3	2
4	2
5	4
6	2
7	6
8	4
9	6
10	4
11	10

טבלה 1

דוגמה נוספת לשני מספרים עמייתים היא (220,284) :
הגורמים החזוביים של המספר 220 הם:

1,110, 22, 20, 11, 10, 5, 4, 2, 1 .
הגורמים החזוביים של המספר 284 הם:

1,142, 220, 171, 4, 2, 1 .
 אoilר, אשר נאמר עליו כי הוא "עוורן חישובים מטוביים באוטה קלות שבאה אדם אחר נושם", מצא 60 זוגות של מספרים עמייתים וערך את תכונותיהם.

הגשרים של העיר קניגסברג - תורה הגורמים
 את העיר קניגסברג חוצה נהר גדול ובתוכו אי אחד (סרטוט 1).

שבעה גשרים חיברו את האי D, את היישה B, שהייתה לכודה בין שני שטחים של הנהר, ואת היישות שנן גודת הנהר, C ו- A .

השאלה שהוצגה בפני אוילר הייתה:
אם ניתן לעורן סיור הליכה שבמהלכו עברוים את כל שבעת הגשרים, כל גשר ורק פעם אחת בלבד?

אוילר ותורת המספרים
 בסנט פטרסבורג פגש אוילר בクリיסטיאן גולדבארך Goldbach (1764-1760) איש נמרץ ואינטלקטואלי, שעליון אמר: "המתמטיקה הייתה עבורי תחביב... והריגול צורה של פרנסה" (Varadarajan, 2006). במהרה התפתחה בין השנים חברות ארוכת ימים ששימשה כזרע לעובדו של אוילר. גולדבארך ביקש לדעת את חוות דעתו של אוילר בעניין ההשערה שהעליה המתמטי פרימה בשנת 1660.

ההשערה מנicha כי כל מספר שלם מהצורה $1 + 2^n$ (הנקרא "מספר פרמה"), הוא מספר ראשוני, אם המספר n עצמו הוא חזקה של 2.

אוילר בדק את ההשערה עבור $n = 1, 2, 4, 8, 16$.
 ומצא את המספרים הראשונים: $3, 5, 17, 257, 65537$.
 עבור $n = 32$ (החזקת החמשית של 2) המספר הוא

.4294967297

אוילר ראה שהמספר זה מתחלק ב- 641 لكن המספר אינו ראשוני.

בבדיקה השערות אחרות של פרימה הכניט אוילר לראשונה בתחום החקיר המתמטי את הפונקציה $(n)\emptyset$ (פ' של n) כאשר n שלם חיובי. פונקציה זו מוגדרת כמספר השלים החזוביים הקטנים או השווים ל- n וזרים לו. (טבלה 1) מספרים זרים הם מספרים שאין להם שום מחלק משותף מלבד 1. כל מספר גדול מ- 1 אינוزر לעצמו. על פי ההגדרה $\emptyset(1)=1$.

לדוגמה, עבור $n=9$ המספרים המבוקשים הם המספרים 1, 2, 4, 5, 7, 8 . נוכל להבחן שהמספרים 3, 6 ו- 9 אינם זרים ל- 9 .
 $\emptyset(9)=6$

ונכל לבחון שכאשר המספר p ראשוני אז $1-p=\emptyset(p)$

בין הנושאים האחרים שאoilר בדק בתחום תורה המספרים, נמנה גם הנושא של "מספרים עמייתים". מספרים עמייתים הם זוגות של מספרים שכל אחד מהם הוא סכום גורמיין החזוביים של המספר الآخر בזוג. יש לציין שהמספר 1 נחשב לגורם, אולם המספר אינו נחשב לגורם של עצמו.

האם ניתן לסרטט גраф, במשיכת קו ישרים אחד (ambil להרים את היד עד לסיום הסרטוט), שיתאר את מסלול ההליכה?

קל להבחין כי ניתן לסרטט מסלול כזה ורק אם בכל פעם שנכנסים לצומת אשר נמצא במרכז המסלול (לא בתחוםו, או בסופו של המסלול), ניתן גם לצאת ממנו. במקרים אחרים, נוכנים ליבשה דרך גשר אחד ווחבים אותה דרך אחרת. לכן כל צומת אשר נמצא במרכז המסלול חייב להיות מחובר לפחות זוגי של קשתות (גשרים), מלבד הצמתים הנמצאים בתחום המסלול או בסוף המסלול. בתחום המסלול נחוץ רק קו אחד כדי לצאת מהצומת, ובסיום המסלול נחוץ ורק קו אחד כדי להיכנס לצומת סיום המסלול.

נדון בשתי אפשרויות:

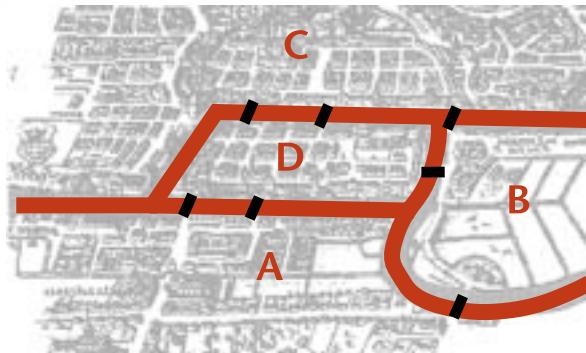
(1) אם המסלול מתחילה בצומת אחד ומסתתיים בצומת אחר אז כל צומת (יבשה) כזה חייב להיות מחובר למספר אי-זוגי של קשתות (גשרים).

(2) אם המסלול מתחילה ומסתיים באותו צומת, אז הצומת הזה (יבשה) חייב להיות מחובר למספר זוגי של קשתות (גשרים), בדיקו כמה שאר הצמתים (שבראשם המסלול).

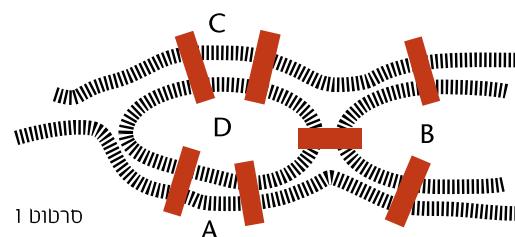
המסקנות הן:

1. כאשר צומת תחילת המסלול שונה מצומת סיוםו של המסלול, אז ניתן לעורוך סיור שבמהלכו עוברים את שבעת הגשרים, כל גשר ורק פעם אחת בלבד, אם ורק שתיים מהビשות (הצמתים) מחוברות למספר אי-זוגי של גשרים.
2. כאשר סיום של הסיור חוזרים לנקודת המוצא ניתן לעורוך סיור כזה ורק פעם אחת כל גשר פעם בלבד. במקרה זה מחוברים למספר זוגי של קשתות (גשרים).

בשנת 1736 הוכיח אוילר שאם בגראף יש יותר מאשר צמתים מחוברים למספר אי-זוגי של קשתות (גשרים), אז אין מסלול שעובר דרך כל גשר פעם אחת בלבד. בגרף המכבר את מפת העיר (סרטוט 2) כל ארבעת הצמתים מחוברים למספר אי-זוגי של קשתות (גשרים), ולכן ניתן לסרטט גראף אין מסלול שעובר דרך כל גשר פעם אחת בלבד. כ- 150 שנה מאוחר יותר, בשנת 1875 הוסיפו תושבי קניגסברג גשר נוסף, המקשר את שני היישובות B ו- C.

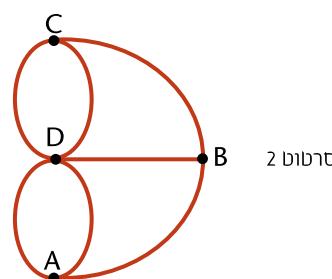


הגשרים בעיר קניגסברג



אוילר הציג את הבעיה בזורה חדשה בעדרת גראף (סרטוט 2), והתובנה החשובה זו שלו היא שהנicha את אבני היסוד, أولי שלא במתכוון, לעני חדש במתמטיקה הידועה כ"תורת הגראפים".

כל ארבעה היישובות (hai C והיישובות A,B) מיצגת בגרף על-ידי צומת. גשר המחבר בין שני איזורי יבשה מיוצג על-ידי קישור - קשת המחברת בין שני הצמתים המתאימים בגרף. נתבונן בגרף שרטטנו (סרטוט 2):

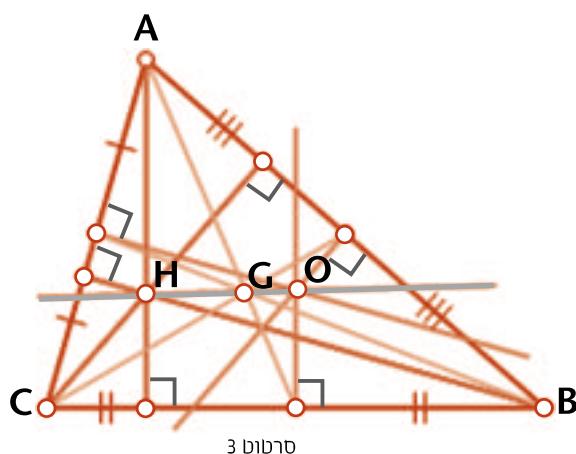


לדוגמה, מהצומת (היבשה) A יוצאות 3 קשתות (גשרים), שתיים לצומת D (hai) ואחת לצומת (היבשה) B. מהצומת B יוצאות גם 3 קשתות (גשרים), אחת לצומת A, אחת לצומת C והאחרונה לצומת C. לכן, ניתן לנסח את בעיית הגשרים של קניגסברג כך:

יש לציין, שבעור כל המתמטיקאים שעבדו לפני אוילר היה זה בלתי אפשרי לחשב על תכונות גיאומטריות אשר לא כרכות במדידות. והיויתה זו פעם נוספת שאוילר השתמש ביכולת הగבואה של חישובתו לגלות זווית ראייה מפתיעת, ראשונית ומקורית. עבדתו בנושא זה נחשבת למקור של ענף חדש במתמטיקה הידוע בשם "טופולוגיה". הרעיון שמצוינה הטופולוגיה תורמים כום כמעט לכל תחום של המתמטיקה המודרנית.

אוילר והגיאומטריה האוקלידית

נדמה היה שלאחר עבודתם של היוונים, הגיאומטריה אינה יותר תחום שנitinן לגנות בו דברים חדשים. אך מוחו הסקרן של אוילר, שהשתוקק לגנות כל סוד, לנבור בכל פרט, שידע תמיד להתבונן בעבודות ידועות מנוקדות מבטח חדשה, מקורית, ולגנות עבודות מפתיעות - הצליח בכל זאת להדעים עם משפט הקשור במשולש המוצג להלן:



במשולש $\triangle ABC$ (טרטוט 3) נסמן:
באות **H** את נקודת מפגש הגבהים, באות **G** את נקודת מפגש התיכוןים ובאות **O** את נקודת מפגש האנכים האמצעיים (אנך אמצעי הוא ישר העובר דרך אמצע צלע המשולש ומאונך לה). המשפט המפתח של אוילר אומר, שנקודות המפגש של התיכוןים, של הגבהים, ושל האנכים האמצעיים שבסמלולש, נמצאות על ישר אחד. הקו העובר דרך שלוש הנקודות המייחודות הללו במשולש נקרא על שמו של אוילר – "הקו של אוילר".

באופן זה העלו לארבע את מספר הקשותות המכוברות לשני הצמתים האלה, ولكن נותרו רק שני צמתים אי-זוגיים: **D, A**. מובן שבמצב זה המסלול הדרוש קיים. השימוש הזה של הוספת קשת (גשר) חדשה גרם להסרה מיידית של המוגבלה. התגלית מלאת ההשראה של אוילר הבילה לתובנה בעלת ערך:

"המבנה של גרפים ורשתות הוא המפתח לבנת העולם המורכב שמסביבנו... מחשבים המקוררים ביניהם באמצעות קווי טלפון, מולקולות בגופנו הקשורות על-ידי ריאקציות ביוכימיות, ולקחוות המקוררים באמצעות קשרי מסחר, אitem המחברים בגשרים - כל אלה הם דוגמאות לא-גרפים... בעניין המתמטיים ככל אין אליה אחית: גראן או רשת" (ברבאשי, 2004).

תגלית נוספת של אוילר היא הנוסחה המקשרת בין מספר הצמתים, מספר הקשותות ומספר האזוריים הסגורים בין הקשותות (למספר האזוריים יש להוסיף את המספר 1 שמסמל את כל המישור).

הנוסחה מצביעה על כך שבכל גראן קיים הקשר הבא:
 $e = f - v + 2$

כאשר **v** מציין את מספר הצמתים, **e** מציין את מספר הקשותות, ו- **f** מציין את מספר האזוריים הסגורים (כולל כל המישור) של הגראן.

לדוגמה בגראן שבטרטוט 2:
 $V = 4 \quad e = 7 \quad f = 4 + 1 = 5$
 $4 + 5 - 7 = 2$

אוילר העביר את הנוסחה זו למרחב והוכיח אותה עבור הפאוןום, שהם גופים תלת-ממדיים הבנויים ממצולעים בלבד. כדי לנו, לכל סוג פאון יש ברוב המקרים מספר שונה של פאות, קדקודים ומקטעות. עם זאת אוילר גילתה שהנוסחה מתאימה לכל הפאוןומים.

בכל פאון קיים הקשר: $e = f - v + 2$
כאשר **v** מציין את מספר הקדקודים, **f** מציין את מספר הפאות ו- **e** מציין את מספר המקטעות של הפאון.



מחקרים של ליבניץ וניוטון יצר ויצב את האנליזה המתמטית - המדע של המשתנים והפונקציות שלהם (פרויום, 2002). על תרומתו נאמר: "אוילר עשה עבור האנליזה המתמטית מה שעבודתו של אוקלידס עשתה עבור הגיאומטריה" (Dunham, 1999). בספר "מבוא לאנליזה של האינטגרו" ניתן למצוא את זהות המפורשת המקשרת בצורה מפתיעה בין המספר i "המייצג" את האלגברה, המספר e "המייצג" את האנליזה, והפונקציות הטריגונומטריות \cos ו- \sin .

זהות היא: $x \sin i + \cos x = e^{ix}$.
נקדים ונאמר שאוילר הגדר בטיסון $i^2 = -1$ ו- e מספר שהוא בטיסון של הלוגריתם הטבעי שערכו מתחילה - $2.7182818284590\ldots$.
צורה אחרת של הנוסחה המפורשת היא $i = 0 + 1 + \pi + e^{i\pi}$.
ניתן לציין שאחד ההישגים שהביאו לאוילר תהילה רבה הוא פתרון בעיה שהביסה מתמטיקאים גדולים אחרים (יוהן ברונולי וליבניץ), והוא חישוב סכום הטור:
 $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$
אוילר הצליח להוכיח את העובדה המפתיעה שסכום טור זה הוא $\pi^2/6$.

אוילר והאנליזה המתמטית

בשנת 1748 רשם אוילר את הספר "מבוא לאנליזה של האינטגרו" – *Introduction In Analysis In Infinitorum*. (אנליזה היא ענף במתמטיקה העוסק בין היתר בחקרת פונקציות). בספר זה misuse אוילר את התהילה של החלפת מושג המשנה המוושם לעצמים גיאומטריים, במושג הפונקציה כנוסחה אלגברית. [הספר] היה העבודה הראשונה שבה מושג הפונקציה מילא תפקיד מפורש ומרכזי. בהקדמה טוען אוילר, ש"אנליזה מתמטית היא המדע הכללי של משתנים והפונקציות שלהם" (קלינר, 1994). הספר גרם להפרדת האנליזה מן הרקע הגיאומטרי שלה ולהיפיכת מושג הפונקציה למושג בסיסי ומרכזי במתמטיקה.

יש לציין שלפני אוילר עסקה דנה האנליזה בתכונות העקומות הגיאומטריות, ואילו אחוריו דנה האנליזה בתכונות של פונקציות. لكن ניתן לומר שבעבדתו השתנתה המתמטיקה בצורה משמעותית. פרט לפונקציה בכללה עוסק בספר בפונקציות טריגונומטריות, בפונקציות לוגריתמיות, בטורים ובמגוון נוסחים אחרים.

יש לציין שבאמצעות מחקרים אחרים שפרטם הייתה לאוילר תרומה מכרעת גם לפיתוחו של החשבון הדיפרנציאלי והאנטגרלי. ניתן לומר שאוילר אחד את



גשרי קניגסברג. איור: יונת קציר
yonat@studyonat.com
הוצג בתערוכת "אוילר במתמטיקה" במוזיאון המדע "בולםפילד" בירושלים

השנים האחרונות, והוא סוג של ריבוע לטיני מדרגה 9. כידוע, כל הטעודוקו הם שבכל אחד מתשעת הריבועים שמורכבים את התשבץ, יושבצו כל הספרות בין 1 ל- 9 מבלי שאף ספרה תופיע בו פעמיים.

סוף דבר

אחד מגדולי המתמטיקאים בכל הזמנים עסק אוילר בכל תחומי המתמטיקה שבו קיימים בתקופתו, והוא פעל בפיתוח של תחומיים חדשים (כגון טופולוגיה). שפウ יצירתיו עיצבו את פניה ואופייה של המתמטיקה בכל הדורות מאז ועד היום. אם נרצה לנצל אף לומר שאילר השפיע גם על עולם השעועעים שלנו. איינשטיין כתב ש"דמיון חשוב יותר מידע". אצל המתמטיקאי ליונרד אוילר לא היה צורך לבחור בין השניים, כיוון שהוא התברך בשניהם.

מקורות נבחרים

- ארבל, ב' (2005). **קיצור תולדות המתמטיקה**. תל אביב: הוצאת מכון מופ"ת.
- ברבאשי, א' (2004). **קישורים, המדע החדש של הרשותה**. תל-אביב: משכל,
- גזית, א' (2004). **מצאתי... ! על אנשים שאהבו לחשב ולהשכ卜**. הוצאה המחבר.
- פרום, מ' (2002). גוטפריד ווילhelm ליבנץ. **ספר חזק 2000**, גלילון 3.
- פרום, מ' (2004). ג'ורג' פוייה. **ספר חזק 2000**, גלילון 8.
- קלירוני, ר' (1994). **אמרים נבחרים בהיסטוריה של המתמטיקה**. חיפה: הוצאה "קשר חם".

Alexanderson, G. L. (1983). Ars expositionis: Euler as writer and teacher. *Mathematics Magazine*, 56 (5), 274-278. Condorcet, M. J. (1783). *Eulogy for Euler*.

www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Extras/Euler_elogium.html

Dunham, W. (ed.). (2007). *The Genius of Euler: Reflections on his Life and Work*. Washington D.C: Mathematical Association of America.

Dunham, W. (1999). *Euler the Master of Us All*. Washington D.C. : Mathematical Association of America.

Youschkevitch, A. P. (1970-1990). *Dictionary of Scientific Biography*. New York: Scribner

Varadarajan, V.S. (2006). *Euler Through Time: A New Look at Old Themes*. Los Angeles, CA: University of California.

אוילר וטימניטס מתמטיים

חלק גדול מהטימניטים המתמטיים שאוילר השתמש בהם בספרו, נקבעו לתמיד השפעתם הגדולה של מחקריו על המתמטיקה כולה. נציין מספר דוגמאות:

A, B, C עברו קודקוד המשולש 1 - **a, b, c** עברו צלעות המשולש, **(a)** f) לציין פונקציה של x, האות היוונית **Σ** עברו סכום, האות **e** עברו הבסיס של לוגריתם טבעי, הקיצורים **sin** ו- **cos** עברו הפונקציות הטריוגונומטריות. בין הפעולות של אוילר בתחום הcompania השימורית, יש לציין את עבודותיו בקרטוגרפיה ואת מחקריו באסטרונומיה, ובهم חקרת תנונות הירוח והשפעתן על הגאות והשל. ספרו "מכניקה" (1736) מציג בפעם הראשונה את חוקי התנועה של ניוטון באופן מתמטי.

শעשועים רצניים

אוילר חיבב במיוחד את השימוש בריבועי קסם. ריבוע קסם הוא טבלה שבה סכום המספרים בכל שורה, عمودה ואלכסון הוא זהה.

בשנים האחרונות לחיה, עסק במחקר הקשור בריבוע הליטני וגילתה תוכנות מעניינות. הריבוע הליטני הוא ריבוע המכולק לששבצות על-ידי **Ch** שורות ו- Ch עמודות. במקומות מסוימים ביריבוע הליטני מופיעות האותיות הראשונות באלף-בית הליטני ומכאן השם. על האותיות להיות מסודרות כך שככל שורה ובכל עמודה תופיע כל אות בדיק פעם אחת. הרבה שנים כאחריו יותה, התברר כי לריבועים הליטניים יש ישנים מעשים רבים, בעיקר בטטטיטיקה אר-גאם ישומים לפתרון בעיות של חלוקת משאבים והקצתם. שימוש נוסף לריבועים לטיניים הוא השעשועון "סודוקו", הלהיט של

על מחברת המאמר:

מרגרט פרוים

מרצה ומדריכה פדגוגות לפנחי הוראה ולמורים בפועל בתחום המתמטיקה במכללת תלפיות. חברה בצוות מרכז המורים הארצי למתמטיקה בחינוך היסודי והקדם יסודי, הפקולטה לחינוך, אוניברסיטת חיפה. חברה מערכת כתבת העת מספר חזק 2000. margaret1@012.net.il

