

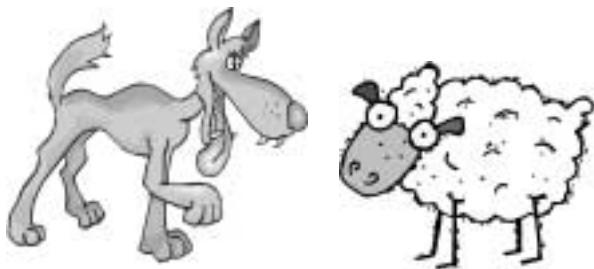
## משחקי אסטרטגיה ככלי לפיתוח החשיבה

משה סטופל, גלעד הר-שפר

### איש עם זאב, כבש וקלה של כרוב

הסיפור הוא על אדם שהוא מעהן בדרך ואתו זאב, כבש וקלה של כרוב. כרנצה עברו נהר בסירה, התברר שהוא יוכלה לשאת רק אותו ואת אחד משולשת הדברים אשר היו אותו. על כן עמדו בפניו בעיות הבאות: אם ישאיר את הכבש והחאיב בלבד ללא השגה יתרווח הזאב את הכבש, ואם ישאיר את הכבש והכרוב בלבד יוכל הכבש את הכרוב. נשאלת השאלה איך יעביר בכל זאת את שלושתם בשלום? כדי להגיע לפתרון חייבים לדעת שהחאיב אינו אוכל כרוב.

את המשך ניתן לקרוא במקור. להלן יוצגו חסימה משחקים. בארבעת המשחקים הראשונים יבואו אסטרטגיות הניצחון. במשחק החמיישי על המתמודדים לגלוות את האסטרטגיה לניצחון.



### משחקי אסטרטגיה

#### 1. מי שבתו המספר 1 הוא המנצח

שני מתחרים משחקים אחד נגד השני במשחק המספרים. הכללים הם:

- כל אחד בתורו אומר מספר אחד.
- ניתנת להתחילה בכל מספר טבעי, רצוי גדול מ-50.
- כל שחקן אומר מספר שלם הקlein מהמספר שהוכרז לפניו אך גדול או שווה למחציתו.
- מנצח זה שבתו נותר לו המספר 1.

### הקדמה

משחקים, חידונים, תשbezים ומשימות שונות, מהווים בכל גיל חלק חשוב בתרבות הפנאי. כל אחת מהפעילות הללו מחייבת חשיבה, הכוללת ניתוח אפשרויות והסקת מסקנות. כשם שתרגול בכל תחום מאפשר רכישת מיומנויות ומספר את יכולת הביצוע, כך גם פעולות חשיבה מסוימות את יכולת החשיבה וביחד את הרחבתה לחשיבה רב-כיוונית. ההתמודדות עם משימות שונות מהוווה עיסוק, שבדרך כלל, יש בו דחף ולהתלחין, כשהנהנה ובורת מלאה אותם עם השגת פתרונות יצירתיים ומפתחים בדרך לא סטנדרטית. בכל אחת מהמשימות הרבות ישנו מספר אלמנטים מרכזיים, כגון: כללי המשחק, הצורך בידע כללי או ספציפי, רכישת מיומנויות של התמודדות עם אתגרים, אך בעיקר שימוש במינימוניות קוגנטיביות ובכלים שכליים המנתבים את המתוודד אל המטרה.

במאמר זה יוצגו מספר משחקי אסטרטגיה, שבהם יש להפעיל חשיבה לצורך גיבוש אסטרטגיית הפתרון, זו שתביא להצלחה, באמצעות שימוש בכלים מתמטיים, בחשיבה לוגית ופיתוח אלגוריתם. במאמר מופיעים משחקים ואסטרטגיות לניצחון. להתמודדות עם המשימות הללו אין צורך בידע מתמטי עמוק ומספיק ידע בחשבון בסיסי.

### משימות ומשחקי אסטרטגיה

המילה אסטרטגיה מופיעה לאחרונה לעתים קרובות בכל התקשרות. לפי מילון אבן – שwon פירוש המילה: תורה ניהול מלחמות, ערךตน והכנתן, או בינויו אחר – צירוף פעולה לשם תכליית מטרימת. התיחסות לשאלה משחקים מתמטים ביצירוף המינוח אסטרטגיה ניתן למצוא אצל קויזנר, סומובול ועמית (2005).

הקדמה להציג המשימות ומשחקי האסטרטגיה, ראוי להזכיר bahwa מוכרת מהייבת חשיבה לוגית ואסטרטגיה נכונה לפתרונה, הנמצאת אצלaben שושן ובק (1944).

קל לראות שכל מספר בסדרה הוא פערם המספר הקודם בטורפת 1, והסדרה המורחבת היא:  
 $2, 5, 11, 23, 47, 95, 191, 383, \dots$

$$a_{n+1} = 2a_n + 1$$

$$a_1 = 2$$

ניתן לבקש מהתלמידים למצוא בסדרה עוד שני דברים מעניינים:

1. סדרת הפרשיהם היא סדרה הנדסית שמנתה היא 2:  
 $3, 6, 12, 24, 48, \dots$
2. ספרות האחדות של מספרי הסדרה, להוציא את המספר הראשון, כווות סדרה מחזורי: 5, 1, 3, 7, 5, 11, 23, 47, 95, 191, 383, 767, ...

**הערה:** ניתן לחת כל אחד ממשחק, כגון: המספר הבא חייב להיות לפחות  $\frac{2}{3}$  (מעוגל כלפי מעלה) של המספר הקודם. במקרה זה הירידה בערכי המספרים האפשריים תהיה יותר מוגבהת, ותקבע סדרה אחרת של מספרים שתוביל לאסטרטגיית ניצחון.

מהי האסטרטגיה לניצחון?

#### הדגמת המשחק - מקרה ראשון

| שחקן ראשון | שחקן שני |
|------------|----------|
| 68         | 102 ←    |
| 25         | 45       |
| 10         | 16       |
| 4          | 6        |
| ①          | 2        |

השחקן השני הפסיד

#### הדגמת המשחק - מקרה שני

| שחקן ראשון | שחקן שני |
|------------|----------|
| 60         | 120 ←    |
| 23         | 38       |
| 11         | 20       |
| 5          | 8        |
| 2          | 3        |
| ①          |          |

השחקן הראשון הפסיד

כפי שראוי מהתוצאות, הידע המתמטי היחיד הנדרש למשחק הוא לחשב את הגבול התיכון: מחצית המספר הקודם מעוגל כלפי מעלה למספר שלם.

כל שמתקדמים במשחק, הולך וקטן המספר עליו יכולם להכריז המנצח. מי שmagiu ראשוני יותר לבחירה המספר 1 בלבד. מי שרצה להגיע למספר 2 עליו להגיע בתورو הקודם למספר 5, המחייב את המנצח השני לבחור את אחד המספרים 3 או 4.

לאחר מספר התמודדות וניסיונות התוצאות (ניצחון או הפסד), מגעים לאסטרטגיית הניצחון: להכריז בשלב מסוים של המשחק על אחד מהמספרים של הסדרה הבאה,  
 $5, 11, 23, \dots$  ולהמשיך בה בתורו.

מי הם שאר מספרי הסדרה?

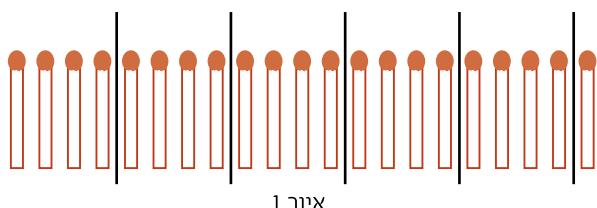
## 2. **ליקות גפורים**

**שני שחקנים לוקחים, כל אחד בתורו, גפורים מערימה שבה 21 גפורים.**

**בכל תור חייב כל משתתף ליקח 1-3 גפורים, לפי רצונו. מנצח מי שבתוון לא נותרו גפורים ליקח.**

באייזו אסטרטגיה צריך לפעול השחקן השני, כדי לזכות בתחרות?

**הערה:** כל שחקן מכירϊ בקול כמה גפורים לוקח בכל טיבוב.  
**הפטرون:** מחלקים את הגפורים לחמש קבוצות של 4 גפורים כל אחת, ונשאר גפuro אחד בלבד, כנראה באירוע 1.



### סדרות גפרורים 1-2-3

א. במידה ושחקן אחד ייקח את הגפרור הבודד, השחקן השני ייקח גפרור אחד מתוך ה- 3. נותרו 2 גפרורים + 2 גפרורים.



אם השחקן הראשון ייקח 2 גפרורים, אז השחקן השני ייקח גפרור אחד וינצח, או הפוך.

ב. במידה ושחקן אחד ייקח את שלושת הגפרורים, השחקן השני ייקח את הגפרור הבודד, ואז יישארו 2 גפרורים. בטור הבא ייקח השחקן גפרור אחד וינצח.

ג. במידה ושחקן אחד ייקח 2 גפרורים, אז השחקן השני ייקח גפרור 1 וינצח, או הפוך.

ד. במידה ושחקן אחד ייקח את 2 הגפרורים השחקן השני ייקח את 3 הגפרורים וינצח.

### סדרת גפרורים 1-1-1-1

נשארו 4 גפרורים כל אחד בשורה נפרדת. כל אחד מהשחקנים נאלץ בכל תור לחתך רק גפרור אחד הנשאר בשורה. השחקן הראשון יוקח גפרור אחד. השחקן השני יוקח גפרור אחד.

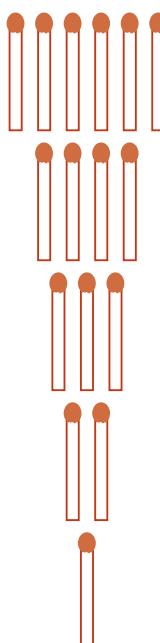


שחקן הראשון יוקח גפרור אחד ומנצח.

ניתן למצוא סדרות נוספות המובילות לניצחון.

הערה: על בסיס שתי המשימות האחרונות ניתן לבנות ממשימות דומות על-ידי שינוי מספר הגפרורים, כולל המשחק, וכן להפוך אותו למשחק של שלושה מתמודדים.

בכל סיבוב לוקחים המתמודד השני מספר גפרורים, המשלימים את הכמות שלחק הרראשון באוטו סיבוב לקבוצה של 4 גפרורים. כך יאלץ המתמודד הראשון לחתך בסיבוב השישי את הגפרור הבודד, ככלומר, מנצח המתמודד השני שלא נשארו לו גפרורים לחתך.



### 3. מגדל הפוך של גפרורים

נתון מגדל של גפרורים הבנוי משורות של גפרורים. בשורה התחתונה גפרור אחד, ובשאר השורות מספר הגפרורים גדול בטדור הבא: 2,3,4,6

כל משתתף לוקח בתורו כמה גפרורים שהוא חפץ, אך רק שורה אחת שאותה בחור. מפתיד מי שבתורו נותר לו לחתך גפרור אחד שהוא אחיד מהאחרון במשחק. באיזו אסטרטגיה יש לפעול כדי לנצח במשחק?

(אפשר לשחק את המשחק ללא גפרורים, כך שבכל תור מוחקים בקו על האירור את סימני הגפרורים שנלקחו.)

### חלק מהסטרטגייה לניצחון

יש לחשב סדרות שונות של גפרורים אשר יובילו לניצחון בטוחה. המטרה של המשחק היא להגיע בכמה הפעולות האפשריות לאחת כן הסדרות, ולהשאיר את המצב המוצג לשחקן היריב.

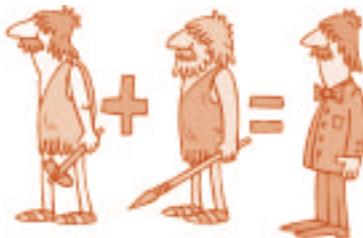
להלן דוגמאות לחלק מסדרות גפרורים המובילות לניצחון.

#### 4. רוביינזון קרווזו "השני"

משימה זו דומה לבעית "אשכול הבנות והקוק" שהוצגה בגיליון 13 של כתבת עת זה על-ידי ד"ר אברהם תורגן. הבעיה המוצגת כאן פשוטה יותר מאשר שבכל שלב, ניתן לחלק את כמות האגוזים ללא שארית. דרך הפתרון לסוג זה של בעיות שהוצגה במאמר של ד"ר תורגן מותבסת על אריתמטיקה ואילו במקרה זה נציג דרך אלגברית ודרך המבוססת על ייצוג השלים וחלוקת בעזרה של מלבנים. בעיות מסווג זה ניתן למצוא במקורות רבים ואנו מקווים שמהן דרכים לפתרון יאפשרו לקוראים לבחור לכל בעיה את הדרך הייעילה ביותר ואך להמציא דרכים חדשות ומקוריות.

##### הבעיה

מליח שספינטו נטרפה בסערת-ים הגיע אל אי בודד. בסיוורו להכרת איזור מחייתו החדש, הוא מצא כמות מסוימת של אגוזי קוקוס. כדי להחיקות את נפשו הוא החל באכילת אגוזי קוקוס.



- ביום הראשון הוא אכל ממחית מאגוזי הקוקוס שאסף.
  - ביום השני הוא אכל ממחית מאגוזי הקוקוס שנותרו.
  - ביום השלישי הוא אכל רבע מהה שנותר.
  - ביום הרביעי הוא אכל שלישי מהה שנותר.
  - ביום החמישי הוא אכל חצי מהה שנותר.
  - ביום השישי הוא אכל אגוז קוקוס יחיד - האחרון שנותר.
- כמה אגוזי קוקוס מצא המלח בסיוורו הראשוןabei?

למציאת הפתרון יש לבחור את האסטרטגיה הפטולה ביתר. ניתן למצוא את הפתרון על-ידי בניית טבלה המתארת בכל יום את כמות אגוזי הקוקוס שאכל ואת הכמות שנותרה לימים הבאים, וזאת על-ידי סימון הכמות הראשונית ב-X.

| יום       | כמות האגוזים שנותרה                               | הכמות הימית של אגוזי קוקוס שאכל                                |
|-----------|---|--|
| יום ראשון | X   |  |
| יום שני   | $\frac{1}{2}X$                                    | $\frac{1}{2}X$   |
| יום שלישי | $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}X = \frac{1}{4}X$   | $\frac{1}{2}X - \frac{1}{4}X = \frac{1}{4}X$                   |
| יום רביעי | $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}X = \frac{1}{16}X$  | $\frac{1}{4}X - \frac{1}{16}X = \frac{3}{16}X$                 |
| יום חמישי | $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{16}X = \frac{1}{16}X$ | $\frac{3}{16}X - \frac{1}{16}X = \frac{2}{16}X = \frac{1}{8}X$ |
| יום שישי  | $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}X = \frac{1}{16}X$  | $\frac{1}{8}X - \frac{1}{16}X = \frac{1}{16}X$                 |
| יום שישי  | $\frac{1}{16}X = 1$                               | 0  |

מכאן  $16=X$ , כלומר, המלח אסף 16 אגוזי קוקוס.

מלבן E מייצג את כמות האגוזים שהמלח אכל ביום השלישי (רבע ממה שנשאר), מלבן F מייצג את כמות האגוזים שאכל ביום הרביעי (שליש ממה שנותר לאחר היום השלישי), G מייצג את כמות האגוזים שאכל ביום החמישי (חצי ממה שנותר לאחר היום הרביעי) ו- H מייצג את האגוז שנותר לאכילה ביום השישי.

שטח המלבן H הוא  $\frac{1}{16}$  משטח המלבן המקורי והוא מייצג אגוז קוקוס יחיד שאכל ביום האחרון. מכאן, שטח הכל הורא מצא 16 אגוזים בסיטוריו ביום הראשון בא. אסטרטגיה זו ממחישה ויזואלית את שלבי החישוב שהוצעו בפתרון האלגברי שתואר באמצעות הטבלה.

הערה: ניתן לגוון את המשימה על-ידי הכנסת שינויים בתנאים כגון: שביום האחרון (היום השישי) הוא אכל 2 אגוזים, או מראש חלוקה אחרת לימים ואך שינוי מספר ימי האכילה.

### **5. עברור את המנהרה במוגבלת זמן**

על ארבעה אנשים לעبور מנהרה מפותלת וחסוכה. בשל היותה צרה מאוד יכולים לעبور בה בעת ובוונגה אחת שני אנשים בלבד.

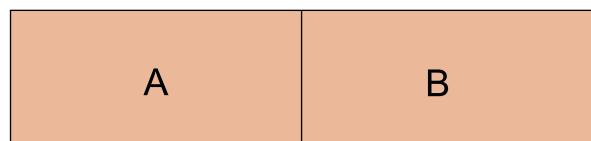
- הראשון עבר את המנהרה בדקה אחת.
- השני עבר את המנהרה בשתי דקות.
- השלישי עבר את המנהרה ב- 4 דקות.
- הרביעי עבר את המנהרה ב- 5 דקות.

לרשوت האנשים פנס נישא עם סוללה ל- 12 דקות בלבד. כיצד יוכל האנשים לעبور את המנהרה במוגבלת זמן הפנס? הערה: כאשר שני אנשים עוברים יחד את המנהרה המעבר נמשך לפי הזמן של האיטי מבין השניים. כאמור, את האסטרטגיה למציאת הפתרון נשאיר לכם הקוראים.

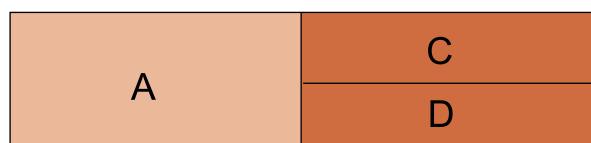
בעיה דומה ניתנת למצוא במקור ארגז (1985).

דרך זו, מחיבת הכרת המושג תבנית מספר וכן שליטה בפעולות אלגבריות פשוטות, שבדרך כלל נלמדות בכיתה זו, لكن היא אינה ישינה לתלמידי כיתות ה-ו שעדיין אינם מכירים את הכללים המתמטיים הנ"ל.

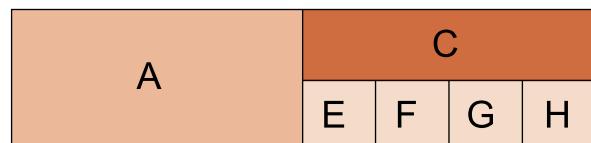
משמעותם כה, יש להתמודד עם המשימה בדרך חלופית על-ידי הצגת פתרון מתחכם המשלב פתרון מהתחלת הבעיה אל סופה עם פתרון נוספת של הבעיה אל תחילתה, באמצעות אירור גרפי, כפי שמודגם להלן.



שטח המלבן הגדל מייצג את הכמות הראויונית של האגוזים. את המלבן הגדל נחלק לשני מלבנים שווי שטח A ו- B. מלבן A מייצג את כמות האגוזים שאכל המלח ביום הראשון וairoו מלבן B מייצג את כמות האגוזים שנותר ביום השני.



את מלבן B, נחלק לשני מלבנים שווי שטח: C - מייצג את כמות האגוזים שהמלח אכל ביום השני, ו- D מייצג את כמות האגוזים שנותרה בתום היום השני. E,F,G,H נחלק לארבעה מלבנים שווי שטח: H



על מחברי המאמר:

**ד"ר משה סטופל**

פיזיקאי ומתמטיקאי בעל תואר שלישי בהנדסת חומרים מתקניון. ראש החוג למתמטיקה במכיליה האקדמית הדתית שאנן בקרית שמואל, חיפה. בעבר מנהל בית-ספר תיכון דתי לבנות. [stupel@bezeqint.net](mailto:stupel@bezeqint.net)

**ד"ר גלעד הר-שפר**

בעל תואר שלישי במנהל ציבורי מאוניברסיטת קוןקורדייה בארה"ב. משמש כרכז מחשוב וכמרצה במכיליה האקדמית הדתית לחינוך "שאנן" בקרית שמואל, חיפה. כמו כן מרצה בתחומי המנהל ומנהל עסקים, מעביר סדנאות בנושאי חשיבה שונים. חובב חידות ופתרון ותגורי חשיבה במתמטיקה. [gilads@macam.ac.il](mailto:gilads@macam.ac.il)

**מקורות**

אבן שושן, א' ובק, י' (1944). **אחדות נא** (עמ' 110). ירושלים: הוצאה " עבר ".  
 ארץ, ב'צ' (1985). **لتפסת ראש** (עמ' 37 משימה 69). תל-אביב: הוצאה ספרים תפ"ר.  
 סמורס, ג' (1972). **100 חידות היגיון** (עמ' 39). רעננה: מי-אן.  
 קויזנר, י', סוכובול, פ' ועמית, מ' (2005). **משחקים מתמטיים: אסטרטגיה + הגיון= ניצחון**. חברהת הכנס השנתי של המורים למתמטיקה בישראל.  
 תורגמן, א' (2007). בעיות מוכיחות. **מספר חזק 2000**, גילון 13.



ילדים משחקים במשחקי חשיבה בטורוכת "שם השחקן" בכויזיאון המכdu ע"ש בלומפילד בירושלים.