

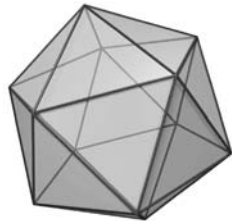
מסע בין גופים שונים הקשורים למספר 60

ג'רי רוזן

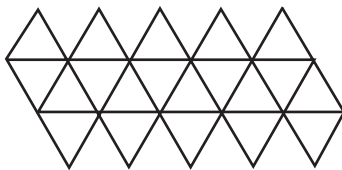
בכל הגופים שנטפל במאמר זה יש תכונות הקשורות למספר 60.

מעשירומון לעשירומון קטום

נתחיל בגוף משוכלל הנקרא עשירומון (ICOSAHEDRON) (איור 1). העשירומון הוא אחד מחמשת הגופים המשוכללים של אפלטון. לעשירומון יש תכונות שמעניינות אותנו בהקשר של המספר 60. יש לו 20 פאות (F), 12 קדקודים (V) ו-30 מקצועות (E).



איור 1: עשירומון



איור 2: פריסה של עשירומון

כל פאה בעשירומון היא משולש שווה-צלעות. כל קדקוד הוא מפגש של 5 פאות, ומכל קדקוד יוצאים 5 מקצועות. הפריסה של העשירומון מוצגת באיור 2.

עולם הגיאומטריה הנלמד בבתי הספר נראה לכאורה כאוסף של צורות, מושגים, הגדרות ותכונות. בין כל אלו קיימים קשרים היוצרים את ההיגיון הלוגי שבבסיס הגיאומטריה. אמנם, בבית הספר היסודי עוסקים מעט מאוד בלוגיקה שבבסיס הגיאומטריה, אבל הצגת קשרים שבין צורות שונות ובין מושגים שונים, עשויה לחדד את היכולת להבנת המושגים הגיאומטריים אצל התלמיד.

בתהליכי למידת הגיאומטריה אפשר לשלב חקירות, המבוססות על מעבר מצורה לצורה, שיחדדו את הקשרים שבין הצורות השונות ויבליטו שימור ושינוי תכונות. התלמידים שיבחינו בקשר ההיגיוני שבמעברים בין הצורות, יפתחו, בנוסף לתובנות גיאומטריות, גם ראייה מתמטית הכוללת יכולת לראות תהליכים דינמיים.

מטרת הפעילות המוצגת במאמר היא לפתח ראייה ותובנה גיאומטרית, תוך כדי ראיית צורות המסתתרות בתוך צורות אחרות, וראיית הקשרים שבין גופים שונים. במהלך ראיית הקשרים, ניתן גם להדגים ולהדגיש את הרצף הלוגי במעבר בין הגופים השונים.

תחילה נראה מעבר **מעשירומון לתריסרון**, שניהם גופים משוכללים. כאשר נרצה לחזור מה**תריסרון לעשירומון**, נראה שחייבים לשלב גופים נוספים. הגופים הנוספים הם מקבוצת הגופים של ארכימדס.

נבהיר תחילה את המושגים:

גוף משוכלל הוא פאון קמור שכל פאותיו הן מצולעים משוכללים חופפים, ומספר הפאות הנפגשות בקדקוד שווה בכל הקדקודים. (הגדרה מתוך מילון מונחים בגיאומטריה, ת"ל התשס"א). חמשת הגופים המשוכללים של אפלטון מוכרים מאוד: **הארבעון**, **הקובייה**, **התמניון**, **התריסרון** ו**העשירומון**.

פחות מוכרים הם 13 הגופים החצי משוכללים SEMI-REGULAR של ארכימדס, הבנויים מלפחות שני סוגים של מצולעים משוכללים.

כמה קדקודים יש בגוף החדש?

נחשב זאת כך: לעשירומון היו 12 קדקודים. בכל מקום שהיה קדקוד יש פאה בצורת מחומש שיש לה 5 קדקודים. כלומר, במקום קדקוד אחד יש עכשיו 5 קדקודים. **בסך הכל**

- 60 קדקודים.

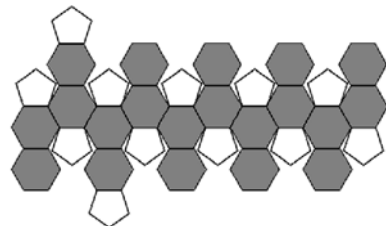
הגוף שקיבלנו דומה לכדורגל, אבל כדורגל הוא עגול והגוף שלנו בנוי מפאות שהן שטוחות. (איור 5)



איור 5

הגוף נקרא עשירומון קטום (TRUNCATED ICOSAHEDRON). הכינוי של העשירומון הקטום הוא: BUCKYBALL. הדמיון של העשירומון הקטום לכדורגל מוביל אותנו לשאלה - למה לקחו את הגוף הזה כתבנית לכדורגל? ידוע לכולנו שאפשר ליצור ריצוף עם משושים משוכללים וחופפים - שלושה בכל קדקוד. בדרך זו במפגש בין הקדקודים נוצרות זוויות של 360 מעלות, המבטיחות יצירת מישור. אם נחליף משושה אחד שבריצוף במחומש משוכלל בעל אותו אורך צלע, לא נוכל ליצור ריצוף ונוצר רווח. כאשר "סוגרים" את הרווח על-ידי הצמדת צלע של משושה לצלע של מחומש, חייבים לצאת מהמישור, וכך נוצר הגוף הכדורי.

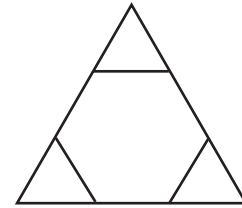
בדרך זו גם יוצרים את הפריסה של העשירומון הקטום. (איור 6)



איור 6

בשלב זה ביצענו את המעבר מעשירומון לעשירומון קטום. בשלב השני של העבודה נעבור לגוף הדואלי של העשירומון - התריסרון, ונבצע בו מעבר דומה מתריסרון לתריסרון קטום.

ניקח כל פאה של העשירומון, נחלק כל מקצוע שבפאה ל- 3 קטעים שווים, ונחבר את הנקודות כמו באיור 3.

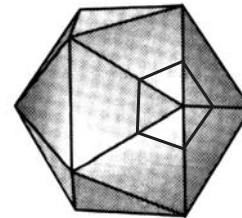


איור 3

על כל פאה נוצר משושה משוכלל. אפשר להוכיח זאת בהסתמך על תכונות שוויון צלעות וזוויות במשולשים שווי-צלעות.

אם נבצע חלוקה זו על כל פאה בעשירומון, נוצרת פירמידה מחומשת בכל קדקוד. (איור 4)

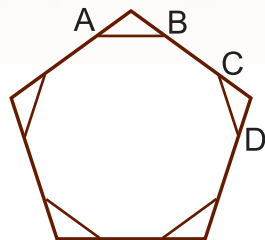
בכל העשירומון נוצרות 12 פירמידות כאלה.



איור 4

אם נסיר את כל הפירמידות האלה, נקבל גוף חצי משוכלל שהוא אחד מ- 13 הגופים של ארכימדס. לגוף הזה יש את התכונות הבאות:

- בכל מקום שבעשירומון היה קדקוד - יש פאה בצורת מחומש משוכלל. כלומר, היו 12 קדקודים - עכשיו יש 12 פאות מחומשות.
- בכל מקום שבעשירומון הייתה פאה בצורת משולש שווה-צלעות, עכשיו יש פאה בצורת משושה משוכלל. בסך הכל יש 20 פאות משושות.
- סביב כל פאה בצורת מחומש משוכלל יש 5 פאות בצורת משושה.
- בכל קדקוד נפגשים מחומש ושני משושים.



איור 9

בכל קדקוד נוצרת פירמידה משולשת. בסך הכל 20 פירמידות כאלה. כאשר מסירים את כל הפירמידות האלה, מקבלים שוב גוף חצי משוכלל, שהוא אחד מ-13 הגופים של ארכימדס.

לגוף הזה יש את התכונות הבאות:

- במקום שהיו בתריסרון קדקודים, עכשיו יש משולשים שווי-צלעות, בסך הכל 20 משולשים.
- במקום שהיו בתריסרון פאות בצורה של מחומש משוכלל, עכשיו יש מעושרים משוכללים, בסך הכל - 12 מעושרים.
- סביב כל משולש יש 3 מעושרים.
- בכל קדקוד נפגשים משולש ושני מעושרים.

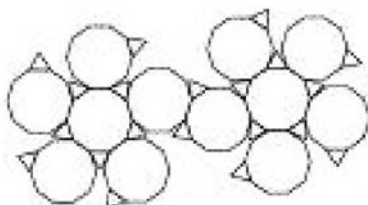
כמה קדקודים יש בגוף החדש?

קודם היו 20 קדקודים והחלפנו כל קדקוד בפאה משולשת, שהיא הבסיס של פירמידה משולשת. כלומר, במקום קדקוד אחד יש עכשיו 3 קדקודים. **בסך הכל 60 קדקודים.**

גוף זה נקראת **תריסרון קטום** (איור 10). את הפריסה אפשר לראות באיור 11.



איור 10: תריסרון קטום



איור 11: פריסה של תריסרון קטום

גופים דואליים

לכל גוף יש בן זוג שנוצר מהחלפת כל קדקוד בפאה וכל פאה בקדקוד.

זוג גופים כאלה נקראים גופים דואליים זה לזה.

מהו הגוף הדואלי של העשירומון?

אם לעשירומון יש 20 פאות (F), 12 קדקודים (V) ו-30 מקצועות (E), צריך למצוא גוף משוכלל שיש לו 20 קדקודים (V) 12 פאות (F) ו-30 מקצועות (E).

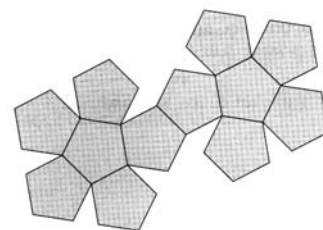
בין הגופים של אפלטון קיים גוף שיש לו 12 פאות, שכל אחת מהן היא מחומש משוכלל, וסביב כל קדקוד יש 3 מחומשים משוכללים.

גוף זה נקראת תריסרון (DODECAHEDRON) (איור 7).



איור 7: תריסרון

את הפריסה של התריסרון נראה באיור 8.



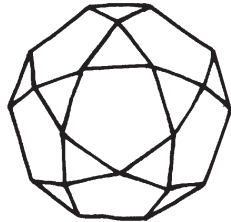
איור 8: פריסה של תריסרון

מתריסרון לתריסרון קטום

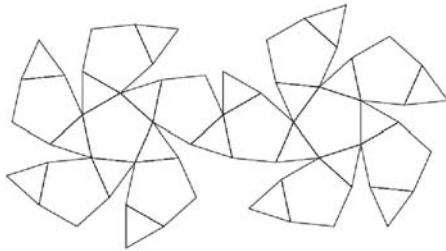
נבצע על התריסרון פעולה דומה לזו שביצענו על העשירומון - נחלק כל מקצוע לשלושה קטעים (איור 9) כך ש- $AB=BC$ (בסיס המשולש השווה שוקיים שקודקודו הוא קודקוד המחומש שווה לקטע האמצעי שנוצר על צלע המחומש). כאשר ביצענו פעולה זו על העשירומון, הפכנו משולש שווה-צלעות למשושה משוכלל. הפעם נהפוך מחומש לעשירון משוכלל (DECAGON).

ISRAEL

גוף זה קיבל את השם ICOSIDODECAHEDRON - עשירומון-תריסרוני (איור 13). את הפריסה שלו אפשר לראות באיור 14.



איור 13: עשירומון-תריסרוני



איור 14: פריסה של עשירומון-תריסרוני

תכונות העשירומון התריסרוני:

- יש לו 20 פאות בצורת משולש שווה-צלעות, ו-12 פאות בצורת מחומש משוכלל.
- יש לו 30 קדקודים. מספר קדקודיו הוא חצי ממספר הקדקודים של התריסרון הקטום וגם חצי ממספר הקדקודים של העשירומון הקטום (לשניהם יש 60 קדקודים). במעברים שביצענו, מתחננו במקרה אחד משולשים משוכללים, ובמקרה השני מחומשים משוכללים, עד שקדקודיהם התלכדו. לכן, בכל מקום שהיו קודם שני קדקודים עכשיו יש רק אחד.
- בכל קדקוד יש לו 2 משולשים ושני מחומשים, לסירוגין.
- בכל קדקוד יש לו 4 מקצועות, לכן **בגוף זה 60 מקצועות**.

עד עכשיו ביצענו מעברים מעשירומון לעשירומון קטום, ומהתריסרון לתריסרון קטום. כדי להשלים את המעבר מהעשירומון לתריסרון חסר לנו גוף אחד נוסף. נתבונן בציור של הגוף של התריסרון הקטום (איור 10). נתמקד בקדקודי המשולשים ונדמיין שאנחנו מותחים אותם עד שקדקוד של משולש אחד ייפגש עם הקדקוד של המשולש האחר. אם נצליח לעשות זאת, העשירומון יחזור להיות מחומש משוכלל. זאת, מאחר וכל "מתיחה" כזו הפכה שלוש צלעות של המעושר המשוכלל לצלע אחת. כלומר, כל מעושר הפך להיות מחומש.

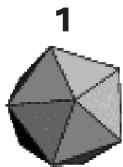
קיבלנו פאון חצי משוכלל, המורכב מ-12 מחומשים משוכללים, ו-20 משולשים שווה-צלעות.

נחזור אל העשירומון הקטום. נתבונן בציור שלו (איור 12) ונתרכז במחומשים. נמתח את קדקוד המחומש עד שקדקוד של מחומש אחד ייפגש עם קדקוד של מחומש אחר. כל "מתיחה" כזו השפיעה על מספר הצלעות של המשושה "שמעליו התבצעה המתיחה". בעקבות כך, המשושה חזר להיות משולש שווה-צלעות.



איור 12

גם עכשיו קיבלנו פאון חצי משוכלל, המורכב מ-12 מחומשים משוכללים, ו-20 משולשים שווה-צלעות כמו קודם. כלומר, גוף זה משלים את המעבר. כלומר, בעזרת מתיחת העשירומון הקטום הגענו לאותו גוף שהגענו אליו בעזרת המתיחה של התריסרון הקטום.



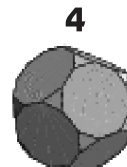
Icosahedron



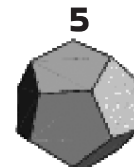
Truncated Icosahedron



Icosidodecahedron



Truncated Dodecahedron



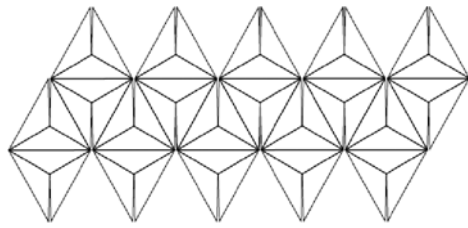
איור 15



גם לתריסרון הקטום יש גוף דואלי, שהוא **גוף בעל 60 פאות** הנקרא TRIAKIS ICOSAHEDRON יש לו 32 קדקודים ו-90 מקצועות. (איור 19) והפריסה באיור 20.



איור 19

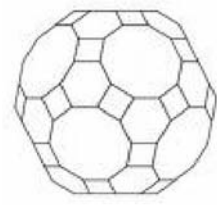


איור 20

למעוניינים, ניתן להרכיב את הידע בעזרת האתר:
<http://local.wasp.uwa.edu.au/~pbourke/geometry/polyhedra>

השלמנו, איפה, את כל שלבי המעברים בין הגופים. נוכל לראות את המעברים שביצענו בעזרת איור 15: בשלב הראשון עברנו מגוף 1 לגוף 2. בשלב השני מגוף 5 לגוף 4. ובשלב האחרון מגוף 4 ומגוף 2 לגוף 3. אחרי שהשלמנו את הקשרים אפשר לראות את הרצף מ-1 עד 5 או להיפך.

אם נמשיך לקטום את העשירומון התריסרוני נקבל את TRUNCATED ICOSIDODECAHEDRON, הנקרא גם: GREAT RHOMBICOSIDODECAHEDRON (איור 16) לגוף זה 30 פאות ריבועיות, 20 פאות משושות ו-12 פאות בצורת עשירון משוכלל. כמו כן יש לו 180 מקצועות.



איור 16

כדי להשלים את העיסוק במספר 60, נציין שגם לעשירומון הקטום יש גוף דואלי, שהוא **גוף עם 60 פאות** הנקרא PENTAKIS DODECAHEDRON. (איור 17) יש לו 32 קדקודים ו-90 מקצועות. הפריסה באיור 18.



איור 17



איור 18

על מחבר המאמר:

ג'רי (גרשון) רוזן

M.A. במתמטיקה. מורה למתמטיקה כ-40 שנה מתוכן כ-30 שנה בבית חינוך גליל מערבי ו-10 שנים באנגליה. תלמידיו מכל הגילאים: ילדי גן, יסודי, תיכון, מורים וסטודנטים באוניברסיטה. כתב הרבה חומרי למידה, בין השאר חוברת הגיאומטריה של חוליות בהוצאת מכון וייצמן, ופעילויות "חומשי-רוח המתמטיקה" שהתפרסמו במקומות שונים. הופיע בכנסים בינלאומיים ופרסם מאמרים בארץ ובעולם בנושאים שונים הקשורים להוראת המתמטיקה.