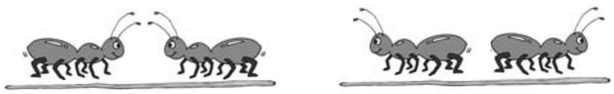
המקרה המוזר של הנמלים על המוט

פרק מתוך ספרו של פרופ' אהרוני, "מתמטיקה, שירה ויופי" שיצא בהוצאת הקיבוץ המאוחד.

רק על עצמי לספר ידעתי
צר עולמי כעולם נמלה
"רק על עצמי", רחל (בלובשטיין), 1931-1890

על מוט באורך מטר אחד נמצאות נמלים במספר כלשהו. הנמלים נעות - חלקן ימינה, חלקן שמאלה, אבל כולן באותה מהירות: בדיוק מטר אחד בדקה. המוט צר, כרוחב נמלה אחת, וכאשר שתי נמלים נפגשות אין הן יכולות להמשיך בדרכן. במקום זה הן מתנהגות כמו כדורי ביליארד שהתנגשו, כלומר, כל אחת מהן הופכת את כיוונה וממשיכה בכיוון ההפוך, באותה מהירות.



כששתי נמלים נפגשות (כבאיור משמאל) הן הופכות כיוון (כבאיור הימני).

מדי פעם גם מגיעה נמלה לקצה המוט, ואז היא נופלת ונעלמת לבלי שוב.

האם בסופו של דבר ייפלו כל הנמלים מן המוט? ואם כן, תוך כמה זמן?

ממבט ראשון, נראה שהדבר תלוי במצב ההתחלתי, כלומר, במספר הנמלים על המוט ובמערך שלהן. אם יש הרבה נמלים, נראה שאם בכלל ייפלו כולן, זה עלול לקחת זמן רב. איך אפשר לבחון זאת?

כבר חשפנו את סודם הראשון של המתמטיקאים: הסתכלות בדוגמאות. כל חשיבה מתמטית מתנהלת כמשחק פינג-פונג מעודן בין דוגמאות והפשטות. ההבדל בין החבטות בכיוון המופשט והחבטות בכיוון הדוגמאות הוא, שאת הדוגמאות אפשר לזמן בצורה מודעת, בעוד שתהליך ההפשטה מתרחש ללא שליטה מודעת. משום כך נחוץ לפתוח בדוגמאות. כמובן, סיבה נוספת לפתיחה בדוגמאות היא, שהדוגמאות הן חומר הגלם להפשטות. ובכן, הדוגמה הפשוטה ביותר היא זו של נמלה אחת. אם הנמלה נמצאת בקצה אחד של המוט והולכת לכיוון הקצה השני, היא תיפול תוך דקה. בכל מקרה אחר היא תיפול תוך פחות מדקה. אבל לא נגענו כאן עדיין במהות הבעיה, משום שבמקרה זה לא היו התנגשויות. נתבונן, אפוא, בשתי נמלים, ונתחיל במקרה שבו, כך נדמה לפחות, ייקח להן זמן רב ליפול: שתיהן נמצאות בקצוות מנוגדים והולכות זו לקראת זו.

כעבור חצי דקה הן תיפגשנה באמצע המוט, תהפוכנה כיוון, וכעבור עוד חצי דקה הן תיפולנה, כל אחת באותו קצה שממנו יצאה. אם כך, שתיהן תיפולנה אחרי דקה אחת בדיוק. הנה דוגמה קצת יותר מסובכת: נמלה א' נמצאת בקצה הימני, נמלה ב' נמצאת בדיוק באמצע המוט, והן הולכות זו לקראת זו.

פגישתן תהיה במרחק רבע מטר מן הקצה הימני, ואחריה תלך נמלה א' עוד רבע מטר ימינה, עד שתיפול מן הקצה הימני, ואילו נמלה ב', שכבר הלכה רבע מטר, תלך שמאלה עוד שלושת רבעי המטר עד שתיפול בצד השמאלי. בסך הכול תעבור נמלה ב' מטר אחד, ומאחר שהיא הולכת מטר בדקה, הדבר יארך דקה.

זה כבר מתחיל לעורר חשד. בכל שלוש הדוגמאות (נמלה אחת, נמלים שמתחילות מן הקצה, נמלה שמתחילה באמצע) הנמלים נפלו מן המוט תוך דקה. אבל ייתכן שעלינו לעלות את דרגת הסיבוך ולהתבונן בשלוש נמלים. ניקח, למשל, מקרה שבו נמלה א׳ נמצאת בקצה הימני והולכת שמאלה; נמלה ב׳ נמצאת בקצה השמאלי והולכת ימינה; נמלה ג׳ נמצאת בדיוק באמצע והולכת ימינה.

לאחר רבע דקה תיפגשנה א׳ ו- ג׳, ותהפוכנה את כיוון הליכתן. ברגע הפגישה של א׳ ו- ג׳ נמצאת ג׳ במרחק שלושת רבעי המטר מצד שמאל, ואילו ב׳ נמצאת במרחק רבע מטר מצד שמאל. הנה כך:

אחרי רבע דקה

לאחר שתהפוך את כיוונה, א׳ תיפול עד מהרה בקצה הימני. הנמלים ב׳ ו- ג׳ הולכות זו מול זו ולכן תיפגשנה באמצע המוט. עד אז הלכה כל אחת מהן חצי דקה. כשהן נפגשות הן משנות כיוון, ותוך חצי דקה נוספת תיפולנה שתיהן. שוב, דקה! תוך דקה בדיוק לא תישאר אף נמלה על המוט! מוזר למדי, בכל המקרים נפלו כל הנמלים תוך דקה. האם יש כאן חוק כללי? האם הדבר נכון תמיד? התשובה היא "כן", וההוכחה אינה מסובכת, אבל היא דורשת הארה. כלומר, תובנה שהופכת באחת את הדברים לפשוטים בתכלית. למרבה המוזרות, ההארה אינה מוסיפה אינפורמציה, אלא דווקא להפך, מתעלמת מאינפורמציה. היא מתעלמת מזהותן של הנמלים. אם לא אכפת לנו מי הן הנמלים, מה קורה ברגע הפגישה של שתי נמלים? ובכן, למעשה לא קורה דבר. לפני הפגישה אחת הנמלים הלכה שמאלה והשנייה ימינה; אחרי הפגישה קורה בדיוק אותו דבר ־ גם אז נמלה אחת הולכת שמאלה והאחרת ימינה, וכל זה באותה מהירות, והרי איזו נמלה הולכת שמאלה ואיזו ימינה כלל אינו משנה לצורכי הבעיה!

המסקנה היא שאפשר להתעלם כליל מן הפגישות. מטרתן רק לבלבל. השאלה זהה לחלוטין לשאלה: נמלים צועדות על מוט באורך מטר אחד, כל אחת במהירות של מטר לדקה, בלי להתנגש ובלי לשנות כיוון. תוך כמה זמן ייפלו? בנוסח זה אין כאן חידה של ממש: כל אחת מהן תיפול תוך דקה או פחות. תלוי במרחק ההתחלתי שלה מן הקצה שלכיוונו היא צועדת.

המתמטיקאים הם עם בר מזל. משלמים להם בשביל לשחק. לנוכח המיליארדים המושקעים במחקר מתמטי ובחינוך מתמטי, אפשר היה לצפות שהם יידרשו לעסוק בנושאים שימושיים, אבל למעשה ההפך הגמור הוא הנכון. הם מרשים

לעצמם (בין השאר) לשחק בבעיות כמו חידת הנמלים, ובעיניהם יש לכך ערך. מדוע? משום שאת סוד שימושיותה יוצאת הדופן של המתמטיקה אפשר לראות כבר בחידה הזאת. משתקף בה כוחה העיקרי של המתמטיקה: ההפשטה. הדבר מתבטא, לפני הכול, בהצגת הבעיה. הנמלים בבעיה הן נמלים מתמטיות: נמלים אמיתיות אינן הולכות במהירות אחידה, ואינן מצייתות לחוקים כה פשוטים. הנמלים שלנו מקיימות כללים ברורים ומובחנים. המתמטיקה היא חקר מערכות המצייתות לכללים מוגדרים היטב. אבל עוד יותר מאשר בהצגת הבעיה, ניכרת ההפשטה בפתרונה. הסוד היה במציאת חוקיות פנימית, כאילו גילינו בתצלום רנטגן את המבנה הסמוי שמתחת לדברים. וחוקיות זו התגלתה כשהתעלמנו מפרט מסוים, שהתגלה כטפל – זהותן של הנמלים.

ההתעלמות מן הטפל היא תכונה עיקרית של כל חשיבה מתמטית. המתמטיקה מביאה את תהליך ההפשטה לקיצוניות. היא לוקחת עץ שנראה מורכב ומסובך, מפשיטה אותו מעליו וחושפת את הגזע. חישבו, למשל, על מושג המספר. מי שהמציא את המושג "4" הבין שלגבי חוקי החשבון אין זה משנה אם לפניו 4 אבנים או 4 עפרונות; ואם אלה עפרונות – מה צבעם וכיצד הם מסודרים. מושג הכמות אינו תלוי בפרטים טפלים מעין אלו.
הפשטה פירושה מציאת חוקיות, וחוקיות משמעה כלליות. הכלליות חוסכת מאמץ של חשיבה: במקום לחשב כמה הן 6 פעמים 7 אבנים ו- 6 פעמים 7 עפרונות, מחשבים פעם אחת ולתמיד את התרגיל, והתוצאה תהיה תקפה לגבי כל סוג של עצמים, בכל זמן שהוא. כוחה של ההפשטה הוא, אפוא, בחיסכון במאמץ. "מתמטיקה נועדה לעצלנים", אמר המתמטיקאי גיאורג פויה. "פירושה הוא להרשות לעקרונות לעבוד בשבילך". מבחינה זו חידת הנמלים היא שימושית מאוד. אמנם, ישירות אין היא מועילה לכלום, משום שאין בעולם נמלים כאלה, אבל היא מחנכת את הפותר אותה, או את לומד הפתרון, לחשיבה מופשטת. היא גם מקרינה על בעיות אחרות שבהן יופיעו עקרונות דומים. ייתכן אפילו שהיא הומצאה מתוך עיסוק בבעיה מסובכת יותר, שמקורה במציאות – תנועה של אטומים, תנועה של חבילות גלי אור ("סוליטונים"), שאכן מתנהגים בהתנגשויות כפי שמתנהגות הנמלים בפתרון – הן עוברות זו דרך זו. אין זה נדיר שבעיות מתמטיות יפות נולדות מתופעות פיזיקליות.

עוד 60

שישים שנה של ספרי לימוד במתמטיקה


גדול מדינת ישראל במספרים

כשקמה מדינת ישראל היו בה 274000 עובדים. במשך שלש שנות קיומה נוספו בה עוד 107000 עובדים. כמה עובדים היו במדינה לאחר שלש שנות קיומה?

כשקמה מדינת ישראל היו בה 18362 טלפונים. בשנה הראשונה לקיומה נוספו בה 6324 טלפונים. ובשנה השניה לקיומה נוספו עוד 5003 טלפונים. כמה טלפונים היו במדינה בשנה השלישית לקיומה?

בשנה השלישית לקיום מדינת ישראל הגיעו לארץ 32453 עולים מעירק, 46178 מרומניה, 26499 מפולין ו־64325 מארצות אחרות. כמה עולים באו לארץ אותה שנה?


שעור שמיני

חבור בטורים

ביום העצמאות השלישי היו בישראל הישובים הבאים

37 בגליל,
31 בשפלת עכו,
7 בעמק החולה,
16 בהרי־שומרון,
17 בעמק הירדן,
289 בשרון,
42 בעמק יזרעאל,
51 ביהודה ובדרום,
13 בעמק בית־שאן,
38 בנגב.

כמה ישובים עבריים היו באותו יום בכל ישראל?

מתוך: "חשבון"
ז. אריאל הוצאת מטכ"ל תשי"ג 1953