בנייה גיאומטרית - הבעיות הקלאסיות

אסף דביר

במאמר זה אציג את המושגים והכללים של בעיות הבנייה בגיאומטריה היוונית, ואספר בו על מספר בעיות קלאסיות שהועלו בתקופה העתיקה והמשיכו להעסיק את המתמטיקאים עד לתקופה המודרנית.
שתי תרומות מושגיות גדולות היו ליוונים בתחום הגיאומטריה: מושגי ה"אקסיומה" וה"הוכחה", והבניות הגיאומטריות. בתחום הבניות, הם הבינו דבר מהותי: אפשר להסתפק בכלים מינימליים כדי להשיג את מרב הבניות. למעשה - שני כלים בלבד - הסרגל עבור קווים ישרים, והמחוגה - לקווים העגולים. לבחירה זו היו סיבות מתמטיות עמוקות, שאת חלקן נביא להלן. מסגרת הדיון במאמר, תהיה, אם כן, הבנייה הגיאומטרית על-פי היוונים בכלל, ועל-פי אוקלידס בפרט.

כללי הבנייה הגיאומטרית

המתמטיקאי היווני אוקלידס (Euclid, ~300 B.C) נחשב לאבי הגיאומטריה, וספרו, "היסודות" (Stoicheia), משמש עד היום כמקור הייחוס האולטימטיבי לגיאומטריה[1]. על-פי הגדרתו ב"יסודות", בנייה גיאומטרית תהא כפופה לתנאים הבאים:

- האמצעים: מחוגה וסרגל (וכלי כתיבה כמובן) בלבד.
- הסרגל (straightedge ולא ruler, כלומר סרגל נטול שנתות) הוא אמצעי למתיחת קו ישר, ללא מגבלות על אורכו. היעדר שנתות פירושו שאי-אפשר לבצע מדידת אורך באמצעותו.
- המחוגה (compass) היא אמצעי לסרטוט מעגלים וקשתות. יש לה שתי זרועות, אחת מקובעת לנקודה, והשנייה, זו עם העיפרון, ניתנת לפתיחה לכל זווית חיובית הקטנה מזווית שטוחה. ברגע שמרימים את המחוגה ממשטח הכתיבה היא קורסת, כלומר, לא ניתן לשמר את גודל הזווית מסרטוט לסרטוט. אין למחוגה שנתות ואין אפשרות לבצע מדידת גודל זווית או מדידת אורך באמצעותה. ניתן לפתוח אותה לגודל נתון, על-פי שתי נקודות. המשמעות המעשית של הגדרה זו היא היכולת לסרטט קשת או מעגל שלם ממרכז מסוים ברדיוס נתון.
- מספר הצעדים באלגוריתם הבנייה חייב להיות סופי.

מה עומד מאחורי קבוצת הכללים המצומצמת הזו?
הגיאומטריה היוונית היא בעלת אופי לוגי, אקסיומטי, דדוקטיבי, מדויק. אין קירובים, אין מדידות, אין 'בערך' או 'כמעט'. דיוק מוחלט שולט בכיפה. כל מדידה, תהא זו מדידת אורך, או גודל זווית, או נפח באמצעות נוזל, חשופה לטעות, טעות המדידה. ככל שנשכלל את אמצעי המדידה, אולי נשפר את רמת הדיוק, אך האפשרות לטעות כלשהי, גם אם מזערית, נותרת בעינה, וזה לא מספיק טוב בשביל היוונים.
סיבה נוספת נבעה מכך שעולם המספרים של היוונים היה המספרים הרציונליים (מספרים שניתן להציגם כמנה של מספרים שלמים). חלק ניכר מבעיות הבניה היו בעיות 'אריתמטיות', כדוגמת חציית קטע או בניית קטע באורך מבוקש. בעיות אלה אפשר היה לפתור באמצעות הכללים המצומצמים. היוונים, בתחכומם, הבינו את הצורך לקבוע לכל בעיה רלבנטית אורך ייחוס - קטע שגודלו מהווה יחידת מספרים שלמה; וכפי שנראה בהמשך, בנייה של קטע המהווה מכפלה או חלוקה של יחידות שלמות הייתה בעיית בנייה פתירה. יתר על כן, היוונים פתרו בעיות אלגבריות, במקרים רבים, בצורה גרפית, באמצעות גיאומטריה במקום בצורה אריתמטית!

[1] מתמטיקאים יוונים רבים תרמו להתפתחות הגיאומטריה בכלל והבנייה הגיאומטרית בפרט, ואוקלידס לא היה הראשון בהם. ראוי לציין דווקא את אפלטון, פילוסוף שחי כמאה שנים לפניו. אפלטון סבר שגיאומטריה מהווה ידע בסיסי וחיונית להבנת היקום. בשער הכניסה לאקדמיה האתונאית שייסד התנוסס המשפט - "זה שהינו בור בהנדסה, בל יחצה את מפתן דלתי." הוא טבע את חותמו, בין השאר, בכללי הבנייה הנוגעים לשימוש במחוגה.

בניות בסיסיות ובניות מורכבות

קיימות חמש פעולות בנייה[2] הנחשבות לפעולות בנייה בסיסיות:

פ1. סרטוט ישר בין שתי נקודות נתונות.

פ2. סרטוט מעגל העובר דרך נקודה נתונה ומרכזו בנקודה נתונה אחרת.

פ3. יצירת נקודת חיתוך בין שני ישרים לא מקבילים.

פ4. יצירת נקודת השקה, או שתי נקודות חיתוך, בין ישר ומעגל הנוגעים זה בזה.

פ5. יצירת נקודת השקה, או שתי נקודות חיתוך, בין שני מעגלים הנוגעים זה בזה.

נסמן כל אחת מהפעולות ב- **פ1** עד **פ5**.

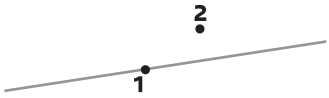
ניתן לפנות לאתר הבא, המדגים בצורה דינמית את הפעולות הנדרשות לכל בנייה בסיסית:

http://www.answers.com/topic/compass-and-straightedge-constructions

נדגים כעת כיצד ניתן לבצע בניות מורכבות יותר באמצעות חמש הבניות הבסיסיות.

בעיה א: בניית ישר מקביל

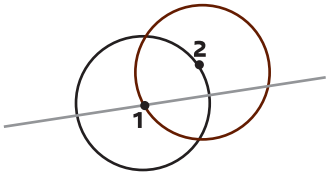
במישור נתון ישר העובר בנקודה 1, ונקודה 2 שאינה על הישר. צריך לבנות ישר מקביל לישר הנתון, העובר בנקודה 2 (סרטוט 1).



סרטוט 1

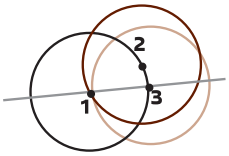
תהליך הפתרון:

העבר מעגל העובר דרך נקודה 2 ומרכזו בנקודה 1(פ2), ומעגל נוסף העובר דרך הנקודה 1 ומרכזו בנקודה 2 (פ2). (סרטוט 2)



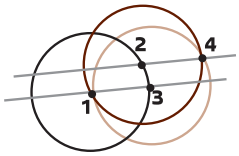
סרטוט 2

סמן ב-3 את נקודת החיתוך בין המעגל הראשון לישר (פ4), והעבר מעגל העובר בנקודה 1 ומרכזו בנקודה 3 (פ2). (סרטוט 3)



סרטוט 3

סמן ב-4 את נקודת החיתוך בין המעגל השני למעגל השלישי (פ5), ומתח ישר בין הנקודות 2 ו-4. זהו הישר המקביל הנדרש.



סרטוט 4

מדוע בניה זו נכונה?

שלושת המעגלים שנבנו הם בעלי אותו רדיוס, לכן כל ארבעת הקטעים, $\overline{12}$, $\overline{13}$, $\overline{24}$, $\overline{34}$, שווים באורכם (=רדיוס). המרובע שנוצר, שקודקודיו מסומנים במספרים 1,2,3,4, הוא מעוין (משפט!) ולכן צלעותיו הנגדיות מקבילות.

בעיה ב: העתקת קטע

נתון הקטע $\overline{AB}$ והנקודה C מחוצה לו.

דרוש לבנות קטע שקצהו ב- C ואורכו כאורך $\overline{AB}$.

סרטוט 5

תהליך הפתרון:

שים לב, אי-אפשר לפתוח את המחוגה לאורך $\overline{AB}$, ולהעבירה לנקודה C, עקב הכלל הנוגע לקריסת המחוגה כשמרימים אותה!

- העבר ב- C ישר המקביל ל- $\overline{AB}$ (ראה בעיה א).
- העבר ב- B ישר המקביל ל- $\overline{AC}$, וסמן ב- D את נקודת החיתוך שלו עם הישר המקביל הקודם.

התקבלה מקבילית, ולכן $\overline{CD}$ הוא הקטע הנדרש. ניתן לסרטט אינסוף קטעים נוספים באורך זה, על-ידי סרטוט מעגל שמרכזו ב- C ורדיוסו $\overline{CD}$.

[2] מנקודה זו ואילך, השימוש במושג המצומצם בנייה (או בנייה אוקלידית) מתייחס לבנייה על-פי כללי הבנייה של היוונים, אלא אם כן נאמר אחרת.

בעיה ג: בניית קטע שאורכו פי $\frac{N}{M}$ מקטע נתון.

נתון הקטע $\overline{AB}$.
דרוש לבנות קטע שאורכו $\frac{N}{M}\cdot\overline{AB}$ כאשר N,M הם מספרים טבעיים נתונים.

תהליך הפתרון (בקצרה):

- הארך את הקטע $\overline{AB}$ לכיוון B עד לקבלת קטע $\overline{AC}$ בעל אורך $N\cdot\overline{AB}$ (קטעי הביניים מסורטטים באמצעות מחוגה.)
- בנה זווית כלשהי מהנקודה A, כך ש- $\overline{AC}$ הוא אחת הקרניים.
- על קרן זו הקצה קטע $\overline{AD}$ בעל אורך $M\cdot\overline{AB}$. את נקודת הקצה של היחידה הראשונה על $\overline{AD}$ סמן ב- E.
- העבר מ- E מקביל לישר $\overline{CD}$. ישר זה יחתוך קטע באורך המבוקש על הקרן $\overline{AC}$ (בדוק!).

להוכחת בנייה זו יש להשתמש במשפט תאלס.

בעיה ד: בניית משולש שווה-צלעות

תהליך הפתרון:

- סמן שתי נקודות A ו- B.
- סרטט ישר בין הנקודות A ו- B (בנייה $פ_1$).
- סרטט שני מעגלים שמרכזם ב- A ו- B, ומחוגם הוא המרחק בין A ל- B ($פ_2$).
- מצא את נקודות החיתוך של המעגלים ($פ_5$), וחבר אותן עם הנקודות A ו- B ($פ_1$).

התקבלו שני משולשים שווי-צלעות, חופפים.

תהליך הבנייה לעיל הוא פשוט ביותר. ברמת מורכבות דומה, אפשר לבצע פעולות בנייה פשוטות כדוגמת: העתקת זווית, בניית זווית ישרה, העלאת אנך.
כל אחת מבניות אלה מודגמת היטב באתר:
http://www.mathopenref.com/constructions.html
(האתר אינו מקפיד על קריסת המחוגה כשמרימים אותה מהדף. גם כאן, נשאיר בידי הקורא את פתרונן של הבעיות הללו באמצעים סטנדרטיים בלבד.)

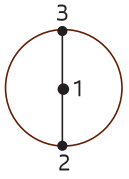
בעיה ה: בניית משושה משוכלל

נתונות שתי נקודות 1 ו-2 במישור. יש לבנות משושה משוכלל שמרכזו בנקודה 1, ואחד מקדקודיו בנקודה 2. (סרטוט 6)

סרטוט 6

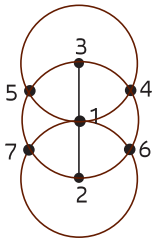
תהליך הפתרון:

העבר מעגל העובר דרך הנקודה 2 ומרכזו בנקודה 1 ($פ_2$), וסמן את נקודת החיתוך ב-3 ($פ_4$). (סרטוט 7)



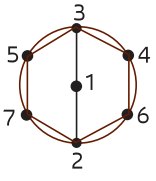
סרטוט 7

העבר מעגל העובר דרך הנקודה 1 ומרכזו בנקודה 2 ($פ_2$), ומעגל העובר דרך הנקודה 1 ומרכזו בנקודה 3 ($פ_2$), וסמן את נקודות החיתוך 4,5,6,7 ($פ_5$). (סרטוט 8)



סרטוט 8

העבר ישרים בין הנקודות 2,6,4,3,5,7,2 ויתקבל המשושה הנדרש. (סרטוט 9)



סרטוט 9

בעיות נוספות אותן ניתן להציג בפני התלמידים:

- בניית משיקים למעגל נתון דרך נקודה נתונה מחוצה לו.
- בניית חוצה זווית לזווית נתונה.
- מציאת נקודת המרכז של מעגל נתון.
- בניית מעגל חוסם למשולש נתון.

מכאן נעבור לסדרת בעיות בנייה מורכבות הרבה יותר, בעיות שהעסיקו את היוונים לאורך כל תקופת הפריחה המתמטית ביוון העתיקה.

בעיות הבנייה הקלאסיות ביוון העתיקה

1. תרבוע המעגל

תרבוע המעגל (squaring the circle) היא, אולי, הבעיה המפורסמת ביותר והקלאסית ביותר של המתמטיקה היוונית. הסוגיה הנה **כיצד לבנות ריבוע השווה בשטחו למעגל נתון.** תרבוע צורות גיאומטריות שונות הייתה סוגיה פופולארית ביותר אצל היוונים. היפוקראטס, לדוגמה, הרבה לעסוק בבעיית ריבוע הסהרונים.

אך מה פשר הדבר לרַבע צורה גיאומטרית כלשהי?

פירושו הוא למצוא בדרך גיאומטרית, מדויקת בקפדנות, ריבוע השווה בשטחו לצורה הגיאומטרית.

ולשם מה ?

כי זו הדרך, מבחינת היוונים, להשוות שטחים. לא הייתה בידם נוסחה לחישוב ישיר של שטח הצורה הגיאומטרית. חישוב השטח נעשה על-ידי מציאת / בניית ריבוע, השווה בשטחו לצורה הגיאומטרית, ואת בעיית חישוב שטחו של הריבוע כבר ידעו לפתור.

תרבוע המעגל הייתה סוגיה קשה ביותר. כל כך קשה, עד כי למרות שהעסיקה את היוונים במשך כל תקופת קיומה של המתמטיקה היוונית, הם לא הצליחו לפתור אותה. כל כך קשה, עד כי רק ב- 1882 הוכיח המתמטיקאי הגרמני לינדמן (Ferdinand von Lindemann) שאי-אפשר לפתור אותה באמצעים שהגדירו היוונים - כללי הבנייה שהובאו לעיל. ההוכחה של לינדמן התבססה על העובדה ש- π הוא מספר טרנסצנדנטי (transcendental), כלומר, אינו יכול להיות שורש של פולינום בעל מקדמים רציונאליים.

המעגל בנוי מקו עקום בודד, רציף. השיטות המקובלות לתרבוע מצולעים אינן ישימות לצורות שהיקפן אינו מורכב מצלעות ישרות, ובפרט לא למעגל. אפשר למצוא למעגל קירוב ריבועי טוב ככל שנרצה. אפשר לבנות את הריבוע המבוקש בתהליך בנייה אינסופי. אך שתי הדרכים הללו אינן עומדות בתנאי הבעיה. לא לחינם הפך הביטוי "לרבע את המעגל' למטבע לשוני המבטא השקעת מאמצים רבים בניסיון לבצע דבר שאינו אפשרי[3].

כיצד ניתן לרַבע מצולע?

- לכל משולש אפשר לבנות מלבן שווה שטח. (ראו פירוט בנספח, בגרסת כתב העת באתר מרכז המורים.)
- לכל מלבן אפשר לבנות ריבוע שווה שטח. (ראו פירוט בנספח, בגרסת כתב העת באתר מרכז המורים.)
- לכל מצולע קמור בעל $n > 3$ צלעות, ניתן לבנות מצולע השווה לו בשטח.

זהו אחד המשפטים היפים בספר 'היסודות'.

שרשור כל הטענות הללו מתווה את הדרך על-פיה ניתן לבנות ריבוע שווה-שטח לכל מצולע קמור. אך מדוע לא ניתן לבצע זאת עבור מעגל?

[3] אריסטופנס - גדול מחברי הקומדיות ביוון העתיקה, היה כנראה הראשון שטבע את המטבע הלשוני "לרבע את המעגל" במחזה "הציפורים" (414 לפנה"ס).

כאמור לעיל, הבעיה קשורה לתכונות המספר π: אם נסמן ב-r את אורך המחוג של המעגל הנתון, וב-x את צלע הריבוע המבוקש, אזי הריבוע המבוקש צריך לקיים את המשוואה על-פיה שטחו (x^2) שווה לשטח המעגל ($\pi \cdot r^2$), כלומר: $x^2 = \pi \cdot r^2$

אם נוציא שורש ריבועי משני אגפי המשוואה, נראה כי צלע הריבוע נדרשת לקיים את המשוואה $x = r\sqrt{\pi}$. אם נצליח לבנות את π אזי אפשר יהיה לבנות גם את $\sqrt{\pi}$ ואת x בהתאם. אך כאמור, לינדמן הוכיח כי π הוא מספר טרנסצנדנטי, וקטעים באורך טרנסצנדנטי אינם ניתנים לבנייה.

חשוב לציין שגם בניית קטע שאורכו שווה להיקף מעגל נתון היא בנייה בלתי אפשרית.

2. טריסאקציית הזווית (חלוקת זווית לשלוש זוויות שוות)

חלוקת זווית לשני חצאים היא בעיית בנייה פשוטה (ראו פירוט בגרסת כתב העת באתר). אינטואיטיבית, ניתן להניח **שחלוקת זווית נתונה לשלושה חלקים שווים** (angel trisection) תהיה בעלת דרגת קושי דומה. ברם, כל הניסיונות של המתמטיקאים היוונים לא צלחו, הבעיה נותרה בלתי פתירה מבחינתם! רק ב-1837, הוכיח המתמטיקאי וונזל (Pierre Wenzel,1818-1848) שלא ניתן לעשות זאת באמצעות סרגל ומחוגה. פרטי ההוכחה הנם מעבר למסגרת מאמר זה; אציין רק שההוכחה שוללת את אפשרות הבנייה הכללית על סמך מקרה פרטי אחד (וזה מספיק!) של זווית בת $\alpha=60^0$. בהתבסס על זהויות טריגונומטריות ניתן לקבל משוואה מתאימה שאינה בעלת פתרון הניתן לבנייה.

הערה: קיימות זוויות שלהן החלוקה לשלוש באמצעות בנייה היא כן ברת ביצוע. לדוגמה: 180^0, 90^0, 45^0.

3. הכפלת הקובייה

בעיית הכפלת הקובייה (doubling the cube) היא בעלת רקע מיתולוגי. **השאלה היא האם וכיצד ניתן לבנות קובייה הכפולה בנפחה מקובייה נתונה.**

כלומר, בהינתן קובייה בעלת צלע באורך x, שנפחה הוא כמובן x^3, נדרש לבנות קובייה בנפח $2\cdot x^3$, כלומר, קובייה שאורך הצלע שלה הוא $x\cdot\sqrt[3]{2}$. בניית ריבוע הכפול בשטחו מריבוע נתון היא אפשרית. האם כך הדבר גם ביחס לקובייה?

ליוונים הייתה סיבה טובה, לפי המיתולוגיה, לרצות שכך יהיה. בסוף המאה החמישית לפנה"ס, תקופת הזוהר של יוון העתיקה, השתוללה מגיפת דבר באתונה (בין קורבנותיה - פריקלס עצמו, כמו גם כרבע מאוכלוסיית עיר המדינה האתונאית). בצר להם, פנו היוונים לאוראקל במקדש האל אפולו באי דלוס. האוראקל כמו אוראקל, נתן תשובה סתומה, על-פיה המענה לעצירת המגיפה יבוא אם ייבנה לאפולו מזבח הכפול מהמזבח הנוכחי. בשלב ראשון, מספרת האגדה, נבנה מזבח בעל צלע כפולה מהצלע המקורית, אך זה לא הביא לעצירת המגיפה, נהפוך הוא. הסתבר שכפי שקרה רבות בעבר, היוונים טעו באינטרפרטציה של התשובה, והדרישה הייתה למזבח שנפחו כפול. לרוע מזלם, צורת המזבח הקיים הייתה קובייה. רק עשרות שנים לאחר מכן, ב- 350 לפנה"ס, הצליחו להקים את המזבח הנדרש, על-ידי מציאת הפתרון הגיאומטרי הנדרש, אך זה, כמובן, כבר לא היה רלבנטי לעניין המגיפה. פתרון זה עשה שימוש בכללי ובאמצעי בנייה רחבים יותר מאלה שמתירה הבנייה האוקלידית. הבעיה המפורסמת הזו נקראת גם הבעיה הדלית.

גם הבעיה הדלית העסיקה את המתמטיקאים במשך מאות שנים, עד שמיודענו וונזל הוכיח שגם במקרה זה מתקבלת משוואה פולינומיאלית ממעלה שלישית ללא פתרון רציונאלי, ובכך סתם את הגולל על האפשרות לפתור את הבעיה.

שלוש הבעיות שתוארו לעיל הן בעלות אופי תיאורטי טהור. הן עמוקות מאוד ולא ניתנות לפתרון באמצעים שהכשירו היוונים. עובדה זו, שלא הייתה ידועה בעת העתיקה, הביאה למאמצים עילאיים בניסיון לפתור אותן, מאמצים שהרחיבו לאין שיעור את בסיס הידע הגיאומטרי בפרט, והמתמטי בכלל. מהלך זה מוביל אותנו לבעיה רחבה הרבה יותר, שבה נרחיב את עומק הדיון - בעיית סרטוט המצולעים המשוכללים.

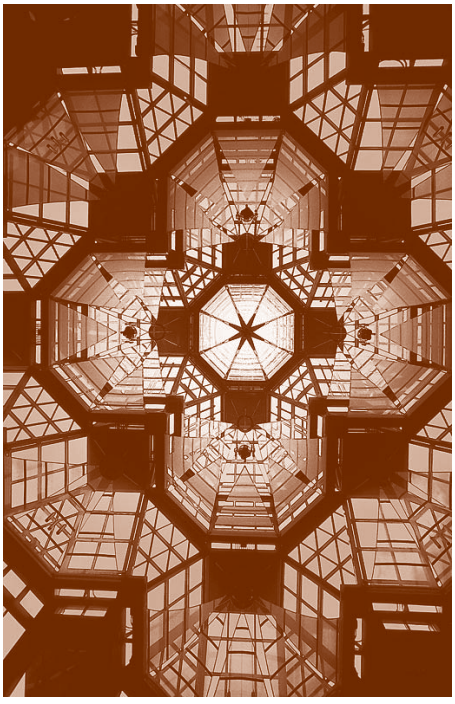
בעיית המצולעים המשוכללים

שלוש הבעיות שהוצגו בסעיף הקודם הן אולי המפורסמות ביותר, ולבטח ידועות יותר מבעיית המצולעים המשוכללים. הן גם מופיעות, בדרך כלל, כמקשה אחת. אף-על-פי-כן, אני סבור כי בעיית המצולעים המשוכללים חשובה יותר מבחינה מתמטית. היא רחבה יותר ופתרונה מחייב כניסה לקשת גדולה יותר של תחומים באלגברה.

ניסוח הבעיה הינו פשוט ביותר - **אילו מצולעים משוכללים ניתנים לבנייה (באמצעים שהתירו היוונים)?**

היוונים שעסקו בגיאומטריה ידעו לבנות מצולע משוכלל בן n צלעות, כאשר $n\in\{3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16\}$

גאוס (Carl Friedrich Gauss, 1777-1855), נסיך המתמטיקאים המהולל, הוכיח כי הבעיה פתירה גם למצולע בן 17 צלעות, משהו שלפניו איש לא שיער כי הוא בר ביצוע. רק כדי לסבר את האוזן, בניית מצולע משוכלל בן 17 צלעות היא פרוצדורה המורכבת מ- 155 צעדים של בניות בסיסיות! גאוס שהוא בעל זכויות כה רבות בתחומים רבים אחרים, היה כה גאה על התגלית הספציפית הזו, עד כי ביקש שעל מצבת הקבר שלו ייחקק מצולע משוכלל בן 17 צלעות.



המקרה של מצולע משוכלל בן 17 צלעות היה רק מקרה פרטי, במסגרת משפט הרבה יותר כללי אותו הצליח גאוס להוכיח. בעוד הדרך בה היוונים מוכיחים כי מצולעים משוכללים בני 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16 צלעות הם ברי בנייה, מבוססת על בנייה פרטנית של כל מקרה[4], מגיע גאוס לניסוח של משפט כללי.

גאוס הוכיח כי מצולע משוכלל בן n צלעות ניתן לבנייה אם ורק אם מספר הצלעות הוא מהצורה: $n=2^k$ או

$n=2^k p_1 p_2 \dots p_r$ כאשר $k\geq 0$ ו- $p_1, p_2, \dots, p_r$

הם r מספרי פרמה ראשוניים שונים.

מספר פרמה הוא מספר שצורתו $F_n=2^{2^n}+1$ כאשר $n\geq 0$.

המספרים הראשונים בסדרה זו הם:

$$F_0=3,\quad F_1=5,\quad F_2=17,\quad F_3=257,\quad F_4=65537$$

נראה כיצד נוסחה זו מאגדת בתוכה את כל המצולעים המשוכללים שהיוונים הכירו:

עבור $k=0$, $p_1=3$ נקבל את המשולש ($n=3$).

עבור $k=2$ וללא מספרים ראשוניים נקבל את הריבוע.

עבור $k=0$, $p_1=5$ נקבל את המחומש ($n=5$).

עבור $k=1$, $p_1=3$ נקבל את המשושה ($n=6$).

עבור $k=0$, $p_1=3$, $p_2=5$ נקבל את המצולע בן 15 הצלעות.

ובצורה דומה עבור המצולעים האחרים שנותרו, בני 8, 10, 12 ו- 16 צלעות.

להוכחה שמצולע בן 17 צלעות הוא בר בנייה הגיע גאוס בהיותו בן 19. התהליך הוא כה מורכב, עד כי פרוצדורת הבנייה בפועל של מצולע משוכלל בן 17 צלעות, מורכבת, כאמור, מ- 155 צעדים.

הדגמת התהליך הזה מופיעה באתר http://wims.unice.fr אשר למשפט הכללי, הוכחתו היא מעבר למסגרת מאמר זה.

שלמי תודות - ברצוני להודות לפרופסור **רון אהרוני** מהפקולטה למתמטיקה בטכניון, שליווה ללא לאות את הכנת המאמר והיתווה את כיווניו בהערות מועילות.

לסיכום

הבנייה האוקלידית הייתה מאבני היסוד של המתמטיקה היוונית. אף כי מדובר לכאורה בבעיה גיאומטרית גרידא, הרי שבפועל היא טמנה בחובה, כמו כל הגיאומטריה ביוון העתיקה, עיסוק אנליטי מלא בתורת המספרים. העובדה שלא היו בידי היוונים הכלים המתמטיים, לכלל ההוכחות הנדרשות כדי להתמודד עם ניתוח בעיות הבנייה הללו, היא בבחינת 'מעז יצא מתוק'. ההתמודדות עם בעיות שאינן ברות פתרון מבחינה תיאורטית, הביאה את הגיאומטריה היוונית לפסגות ידע מופלאות.

מקורות

Hardy, G.H., & Wrigt. E.M. (1979). *An Introduction to the Theory of Numbers*, (pp. 57-62). (Construction of the regular polygon of 17 sides).Oxford:Clarendon Press.

על מחבר המאמר:

אסף דביר

מנהל הנדסה בחברת הי טק.
חובב מתמטיקה.

4 המשפט אודות אופן ההוכחה הפרטני של היוונים מחייב עידון מסויים, בהיותו פזיז מדי. ראוי להזכיר גם הכללה אחת אליה הגיעו היוונים: בהינתן פתרון לבעית הבניה של מצולע משוכלל בן n צלעות, ניתן גם לבנות מצולע בן $2n$ צלעות (כיצד?).