

משחק ה-15
מתוך "מתמטיקה מבדחת"
י. פרלמן. תרגום ועיבוד א. בוכנר, א. ברלס
הוצאת "יסוד", תל-אביב 1977



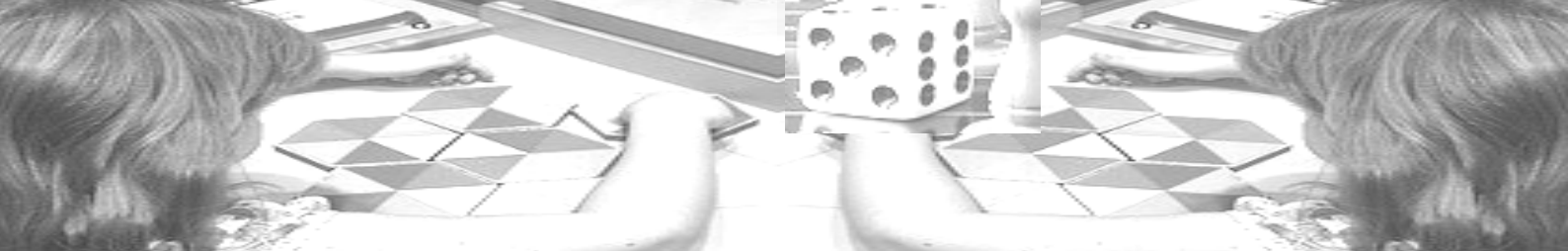
המתמטיקה. התורה המתמטית של המשחק גילתה, שהמספר הגדול של הבעיות, שאפשר להציע במשחק, רק מחציתן ניתנות לפתרון, את המחצית השנייה אין לפתור בעזרת שום תחבולה שבעולם. הובהר אז, מדוע לא עלה בידי איש מבין ההמונים הרבים לפתור בעיות מסוימות למרות המאמצים המרובים ביותר, שהושקעו בפיתורן, ומדוע העזו מארגני התחרויות לקבוע פרסים גבוהים בעד פתירת הבעיות. בשטח זה עלה על כולם ממציא המשחק, אשר הציע לעורך של עיתון ניו-יורקי בעיה, שאינה בת-פתרון, וקבע פרס של 1000 דולר לאיש אשר יפתור אותה. הואיל והעורך היסס, הציע הממציא את נכונותו להוציא את הסכום הנקוב מכיסו הוא. שם הממציא: סמואל לוי.

הקופסונת המפורסמת בעלת הריבועים הממוספרים - היסטוריה מעניינת לה, הידועה רק למספר קטן מאד של המשחקים בה. נמסור בזה את קורותיה בלשונו של חוקר המשחקים הגרמני, המתמטיקאי ו. ארנס.

"בסוף שנות השמונים של המאה ה-19 הופיע בארצות הברית של אמריקה "המשחק ב-15". המשחק נפוץ במהירות רבה, ובשל המספר העצום של המשחקים הנלהבים, שהקיף המשחק, נהפך לנגע ציבורי ממש. אותה תופעה ממש אפשר היה לציין גם בעברו השני של האוקינוס - באירופה. בקרונות רתומים לסוסים יכול היית לראות נוסעים מחזיקים בידיהם קופסות בעלות 15 הריבועים. בעלי משרדים וחנויות היו מיואשים בשל בולמוס המשחק, שתקף את העובדים, והם נאלצו לאסור עליהם את המשחק בשעות-העבודה. בעליהם של בתי-שעשועים ניצלו בכישרון את להיטות ההמונים והיו עורכים תחרויות פומביות של המשחק הזה."

המשחק חדר אפילו לאולמות מלאי הרצינות והחשיבות של הרייכסטג - (בית הנבחרים) הגרמני. "ראיתי ברייכסטג צירים כסופי שיער מסתכלים מתוך ריכוז בקופסה הריבועית שהחזיקו בידיהם- מעלה בזיכרונותיו הגיאוגרף והמתמטיקאי הנודע, זיגמונד גינטר, ששימש ציר בית הנבחרים בשנים בהן השתוללה מגפת המשחק. בפריס קנה לו המשחק שם ברחובות העיר תחת כיפת השמיים, ועד מהרה, עבר מעיר הבירה לערי השדה. גם שם פשט המשחק במהירות רבה. "לא היתה בקתת איכרים אחת, שלא נמצא בה העכביש האורג את קוריו לקורבנו, המוכן להסתבך ברשת הפרושה לרגליו" - כותב סופר צרפתי.

נראה שבשנת 1880 הגיעה קדחת המשחק לנקודת השיא שלה. אכן, זמן קצר אחר-כך הוכרע העריץ בנשק



מטרת המשחק: לעבור, במידה שמאפשר זאת השטח הפנוי, מסידור ארעי חופשי של 15 הריבועים למערך תקין, זאת אומרת, לידי סידור כזה, שהריבועים יהיו ערוכים לפי סדר המספרים שלהם: בפינה השמאלית העליונה – 1 מימין לה- 2, בהמשך בפינה הימנית העליונה – 4, בשורה השנייה, בכיוון משמאל לימין 5, 6, 7, 8 וכך הלאה, כפי שרואים בציור 1.

מערך תקין

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

ציור 1

מערך לא תקין

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

ציור 2

על המשחק וגרסאות מקוונות של המשחק:

- <http://www.net-games.co.il/online-games/Cube-Numbers.html>
- http://www.daviddarling.info/encyclopedia/F/Fifteen_Puzzle.html
- <http://www.x-o.co.il/game.aspx?id=8133>



סמואל לוי (1841 – 1911)

זכה לפרסום רב כמחברן של בעיות מבדחות וחידות-שעשועים מרובות. מעניין הדבר, שבאמצעות הברית לא יכול היה להשיג פטנט על המשחק שהמציא. לפי ההוראות היה עליו להגיש "דגם עבודה", למען אפשר משחק לניסיון. הוא הציע את הבעיה לפקיד משרד הפטנטים. אולם, כשהלה שאל את לוי, אם הבעיה ניתנת לפתירה, ענה, כפי שמספרים, הממציא: "לא. מבחינה מתמטית הדבר בלתי אפשרי". מכיוון שכך, באה התנגדות לאישור הפטנט. לוי נכנע להחלטה זו. יתכן, שהוא היה מפציר יותר, אילו חזה מראש את ההצלחה הבלתי רגילה של המצאתו.

נביא פרטים על תולדות המשחק מסיפורו של הממציא עצמו:

תושבים ותיקים של ממלכת הפיקחות והחרירות, זוכרים בודאי, שבראשית שנות השמונים אילצתי את כל יושבי תבל "לאמץ את כח-מחשבתם" בשל קופסת ריבועים הניתנים להזזה, שנתפרסמה בשם "המשחק ב-15".

15 הריבועים סודרו בקופסה רבועה בסדר רגיל, ורק הריבועים 14, ו- 15 – הוחלפו מקומותיהם, כפי שמראה ציור 2.

עיקרה של הבעיה הוא בזה, שעל המשחק להזיז את הריבועים זה אחר זה ולהביא אותם למצב תקין, כך שהריבועים 14 ו- 15 יחזרו למקומותיהם.



ועוד כותב המחבר בשנת 1977: "הודות לבהירות, שהכניסה המתמטיקה למשחק זה, אין להעלות על הדעת, שבימינו יתכן אותו הבולמוס הקדחתני שבעבר. המתמטיקה יצרה תורת-משחק, שאינה משאירה אפילו נקודה מפוקפקת אחת. התוצאה של המשחק אינה תלויה בנסיבות מקריות כל-שהן, אינה תלויה בפיקחות או בחריפות כמו במשחקים אחרים, אלא בגורמים מתמטיים טהורים, הקובעים את התוצאה מראש בוודאות מוחלטת."

האומנם ?



איך אפשר לדעת אם המערך ניתן לפתרון ?
הבה נתבונן במערך שבציור 3.

מערך לא תקין

1	2	3	4
5	6	7	9
8	10	14	12
13	11	15	

ציור 3

שורת הריבועים הראשונה מסודרת כהלכה, כמו כן השורה השנייה, פרט לריבוע האחרון (9). הריבוע הזה נמצא במשבצת השייכת במערך תקין לריבוע 8. הריבוע 9 מקדים, איפוא, את הריבוע 8. לקידום כזה ביחס לסדר תקין קוראים "הפרעה".

אם נסתכל ביתר הריבועים נגלה קידום של הריבוע 14. הוא מקדים את מצבו התקין בשלושה מקומות (12, 13, 14). יש לנו אפוא, כאן 3 "הפרעות" (14 לפני 12, 14 לפני 13, ו-14 לפני 11). בסך הכל הגענו ל-4 הפרעות. אנו רואים גם שהריבוע 12 נמצא לפני הריבוע 11, כמו כן נמצא הריבוע 13 לפני 11. נוספו, אפוא, עוד 2 "הפרעות", ובסך-הכל מגיע מספרן ל-6.

באופן כזה קובעים בשביל כל מערך את מספר ה"הפרעות" הכללי לאחר פינוי מוקדם של המקום האחרון, בפניה התחתונה מימין.

אם מספר ה"הפרעות" הוא, כמו במקרה שלפנינו, זוגי, הרי שאת המערך הנתון אפשר להביא למצב האחרון התקין. במילים אחרות:

המערך ניתן לפתירה אם מספר ה"הפרעות" הוא זוגי.
אם מספר ה"הפרעות" הוא בלתי-זוגי, הרי שהמערך אינו ניתן לפתירה.