

פעילויות בנושא המעגל וה- π לתלמידי בית הספר היסודי

רונית בסן-צינצינטוס, רינת באור, מיכל בן שמעון, יפית בן בסט

מבוא

בתכנית ההתמקצעות במתמטיקה, המתקיימת במכללת סמינר הקיבוצים, במסגרת מודולת "פיתוח צוות בית ספרי", המשתלמים התבקשו להכין יחידת לימוד בתחום הגיאומטריה, המותאמת לשכבות הגיל השונות של תלמידי בית הספר היסודי.

מתוך ראייה הוליסטית של לימוד הגיאומטריה, בחרנו בנושא הפאי - π , המתקשר למושגים מחיי היום-יום. שיקולים נוספים לבחירתנו היו: מעניין, מאתגר, ייחודי, מזמן משימות חקר, חזותי, מעשיר ידע קיים, מופיע בתכנית הלימודים, ניתן להתאימו לכל שכבות הגיל, ולבנות בנושא זה פעילויות מדורגות על-פי רמות החשיבה של ואן הילה.

במאמר זה נציג פעילויות מתוך מגוון המשימות שהועברו בכיתות השונות. בפעילויות, ניתן דגש על למידת חקר, שילוב אמצעי המחשה זמינים, כמו, שימוש במחוגה, סרגל, חוט, רצועות נייר וכו'.

מטרת הפעילויות הייתה לאפשר לתלמידים התנסויות, כדי לעזור להם לדמיין, להבחין, לחוש וליצור אינטראקציה עם המרכיבים השונים של המעגל.

בדרך כלל, כדי ללמוד מיומנות מסוימת על התלמיד לעשותה בעצמו, ולא שמישהו יאמר לו איך לעשותה, לכן בפעילויות התלמידים היו הפעילים והמורים ליוו את התהליך. הם הקנו לתלמידים את המושגים הנדרשים, תוך כדי הפעילות, והם אלה אשר הובילו את התלמידים להסקת מסקנותיהם.

הנושא הועבר בכיתות א-ו תוך חלוקה ל-3 שכבות גיל: כיתות א-ב, כיתות ג-ד, כיתות ה-ו. הבניית הנושא לכיתות א-ו תוצג בשלבים, כאשר המטרה הכללית היא הבנת היחס בין היקפו של המעגל לבין קוטרו, הלא הוא פאי - π .

להלן תיאור היחידה הלימודית והפעילויות על-פי שכבות הגיל השונות.

פעילויות לכיתות א-ב

נושא המעגל והעיגול אינו מופיע בתכנית הלימודים של כיתות א ו- ב ולכן כדי ללמדו, היה צורך לחשוף את התלמידים למושגים אלה.

בשלב הראשון, נבדק מהו הידע הקודם של התלמידים. נמצא, כי התלמידים אכן מכירים את סוגי הקווים ואת שמות המצולעים, אך ידיעותיהם חלקיות בלבד. בשלב זה של טרום לימוד התקיים שיח מתמטי לגבי המושגים השונים, והתלמידים קיבלו דפי עבודה העוסקים בצורות השונות אותן למדו עוד בתקופת הגן.

בשלב השני, התנסו התלמידים באופן מוחשי בפעילויות שזימנו הכרת מושגים חדשים. יש לציין שכל הפעילויות נעשו באופן הדרגתי המתאים לגיל הלומדים.

פעילות א: סוגי קווים

התלמידים התבקשו להשוות אורכים של קווים ישרים ועקומים, בעזרת אמצעי מדידה כגון: סרטים, חוטים, אטבים וסרגלים, כשעל שולחנות התלמידים הונחו חפצים ואמצעי מדידה שונים. לדוגמה, באחת המשימות נתבקשו למדוד את אורך הבסיס של קופסת עוגיות אשר צורתה גליל (כלומר, את היקף בסיס הגליל). התלמידים מדדו בעזרת האביזרים והגיעו למסקנה משותפת: בכדי למדוד קו עקום כדאי להשתמש בסרט או חוט, ובכדי למדוד קו שבור כדאי להשתמש בסרגל או באטבים.

פעילות ב: העיגול הוא קו עקום סגור

טרם הקניית המושגים מעגל ועיגול התקיים דיון על סוגי הקווים, תוך התמקדות בקו עקום סגור, אשר המקרה הפרטי שלו הוא המעגל. המטרה הייתה לזהות מעגלים מתוך קווים עקומים סגורים.

מסקנת התלמידים: ככל שהמעגל גדול יותר, כך גדול יותר גם היקפו.

פעילות ה: חשיפה למושג "קוטר המעגל"

בשלב הראשון: כל תלמיד בחר חפץ שבסיסו עיגול והעתיק את היקפו על גבי נייר. בשלב השני: התלמידים גזרו את העיגולים שנוצרו. בשלב השלישי: התלמידים קיפלו את העיגולים לשני חלקים שווים באופן מדויק, כלומר, לשני חצאים. קו הקיפול שהתקבל הוא הקוטר. בשלב הרביעי: התלמידים מדדו את אורך הקוטר (שנוצר מהקיפול) בעזרת סרגל. **מסקנת התלמידים:** ככל שהעיגול גדול יותר, כך ארוך יותר גם קוטרו.

פעילות ו: הפאי

כדי להסביר את הקשר בין קוטר המעגל להיקפו, נתאר את הפעילות בה רצינו להמחיש את מושג הפאי. כל אחד מהתלמידים בחר חפץ/גוף שבסיסו בצורת עיגול, החפצים היו בגדלים שונים.

א. התלמידים הדביקו פס צבעוני על גבי היקף המעגל שסביב החפץ, ואחר-כך הניחו את החפצים בתוך קערה עם צבע גואש. הם סימנו את נקודת ההתחלה על גבי הפס שהדביקו, וגלגלו את החפץ על בריסטול, מנקודת ההתחלה במשך סיבוב שלם עד לנקודת הסיום. כתוצאה מפעולה זו התקבל קו ישר או קו עקום מעט. (ראו תמונה בעמוד הבא.)

ב. לאחר שהתלמידים סרטטו את קו המתאר העגול של בסיס החפץ הם גזרו את העיגול, קיפלו אותו לשניים, כך שהחלקים כיסו זה את זה באופן מדויק, ויצרו את הקוטר.

ג. הם מדדו כמה פעמים הקוטר "נכנס" בקו שיצרו קודם בעזרת צבע הגואש. התלמידים הבחינו כי הקוטר נכנס קצת יותר מ-3 פעמים בקו שנוצר מהיקף המעגל.

התלמידים התבקשו להביא לכיתה חפצים עגולים, ואף להצטלם עם פריטים עגולים במרחב בית הספר.

פעילות ג: מעגל ועיגול

הצגת המושגים מעגל ועיגול נעשתה בעזרת פעילויות המבחינות בין המעגל ובין העיגול. המושג מעגל מוכר לכל ילד עוד מתקופת הגן: **"הסתדרו במעגל"**, לכן ראשית התמקדנו במעגל. יצאנו למרחב, החזקנו ידיים ויצרנו מעגלים אנושיים בגדלים שונים. חשוב לשלב בתהליך הלימוד עשיית דברים בידיים, בזרועות או אפילו עם כל הגוף. ירדנו לחצר בית הספר עם החפצים העגולים, אותם הביאו התלמידים מביתם, כדי להטביע בעזרתם מעגלים בגדלים שונים בחול. פעילות נוספת להמחשה ולחיזוק ההבדלים נעשתה בעזרת פלסטלינה הפעם לצורך המחשת מושג העיגול. התלמידים קרצו עיגולים מפלסטלינה בעזרת החפצים העגולים (שהביאו עימם מהבית), ועמדו על ההבדלים בין עיגול הפלסטלינה שאפשר היה להחזיקו ביד ובין המעגל שיצרו בחול שהיה קו מתאר בלבד.



פעילות ד: היקף המעגל

בפעילויות קודמות התלמידים מדדו קווים עקומים סגורים. הפעם מדדו התלמידים את היקף החפצים העגולים, אשר הביאו מהבית, בעזרת סרט או חוט. מדידה זו אפשרה רק השוואה: מי ארוך ומי קצר יותר. בשלב הבא, כדי לקבל את היקפו המדויק של המעגל הונח החוט או הסרט על הסרגל ובעזרתו נמדד האורך של ההיקף בס"מ.

שלב ב – הקוטר ומרכז המעגל

התלמידים גזרו את העיגולים ולאחר מכן קיפלו אותם לשני חלקים שווים. נוצר חצי עיגול שבו קו הקיפול הוא הקוטר.

הגדרנו **מיתר** - קטע ישר המחבר בין 2 נקודות על המעגל. מצאנו שהמיתר הגדול ביותר הוא **הקוטר**. במעגלים שסורטטו בעזרת מחוגה, מצאו התלמידים את מרכז המעגל בנקל, לפי המקום שבו ננעצה המחוגה. בסרטטים אחרים, ניסינו להעביר מספר רב של קטרים - בעזרת קיפולים או על-ידי סרטוט. נקודת החיתוך המשותפת לכל הקטרים היא מרכז המעגל.

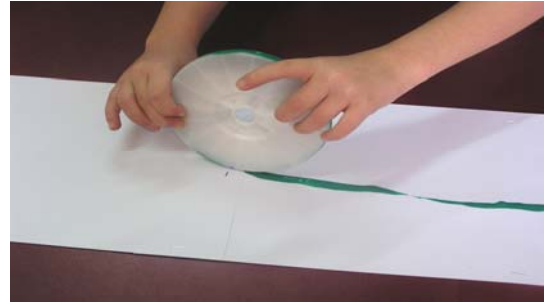
תלמידים בעלי יכולות גבוהות יותר, מצאו את המיתר הארוך ביותר, כלומר, את הקוטר באמצעות הסרגל. לאחר שסרטטו את המעגל, הם מדדו את אורכם של מיתרים שונים על-ידי "הסעת" הסרגל על-פני המעגל (ללא שינוי כיוון). כך נוצרו מיתרים מקבילים, האורך של המיתרים גדל עד שהגיע לאורך מקסימאלי ואחר-כך שוב החל לרדת. המיתר בעל האורך הגדול ביותר הוא הקוטר. בפעילות זו חידדנו את המושגים מרכז המעגל, מיתר, רדיוס וקוטר.

לכל תלמיד היו סרטטים של מעגלים במחברתו ובסרטטים הודגשו המושגים הללו.

שלב ג - היקף המעגל

נשאלה השאלה כיצד נמדוד את היקף המעגל? התלמידים העלו תשובות רבות שאפשרו דיון על אופן מדידת היקף המעגל. מסקנת התלמידים הייתה כי יש להשתמש באמצעי מדידה גמישים. מדדנו את ההיקף עם סרט, ופרסנו את הסרט על גבי אריחי ריצפת הכיתה, על מנת לחשב את אורכו. התלמידים ידעו את אורכו של כל אריח. השימוש באריח כמתווך, סייע לאומדן המדידה. חלק מהתלמידים מדדו את ההיקף בעזרת סרט מדידה המסומן בסנטימטרים.

תופעה זו חזרה אצל כל התלמידים, למרות שלכל תלמיד היה חפץ עגול בגודל שונה. בכל מדידה ניתן היה לראות כי ניתן לסמן על גבי קו המעגל את הקוטר 3 פעמים וקצת.



פעילויות לכיתות ג-ד

גם בתכנית הלימודים של כיתות ג-ד לא מופיע נושא הפאי, אך הצבנו לעצמנו מטרה לשלבו בנושא השוואת שטחים ומדידות, אשר נכלל בתכנית הלימודים. נושא הפאי התווסף לתכנים על-פי תכנית הלימודים, כיחידת העשרה תוך שימת דגש על דרך הלימוד ואופן ההקניה. מתחילת התהליך נעזרו התלמידים באמצעי המחשה שונים, חלקם מוכרים וחלקם פותחו במיוחד להמחשת הפאי. גם בשכבת גיל זו נעשתה הלמידה באמצעות משימות חקר ועבודה עצמית של התלמידים. הלמידה והעבודה נעשו בזוגות או בקבוצות, באופן חווייתי תוך שימוש באמצעי המחשה. תפקיד המורה התמקד בתיווך התהליך.

שלב א - מעגל ועיגול

הבחנה בין מעגל לעיגול - התלמידים סרטטו מעגל בעזרת חפצים עגולים (קופסאות למיניהן) וניתנה הגדרה לעיגול ולמעגל.

כדי לחזק את ההבחנה בין המושגים, התלמידים גזרו עיגולים, הדביקו, וצבעו את שטחם ואת היקפם - ההיקף הוא המעגל והשטח הוא העיגול.

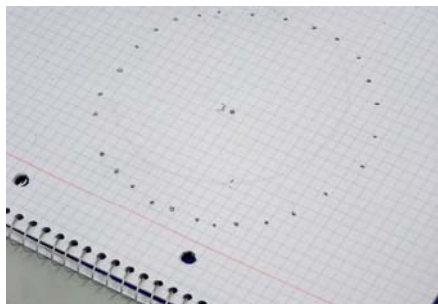
פעילויות לכיתות ה-1

בכיתות ה-1 חקרו התלמידים את היחס בין היקף המעגל לקוטר. התהליך התבצע בשלבים.

שלב א - סרטוט מעגלים שונים בשלוש דרכים שונות

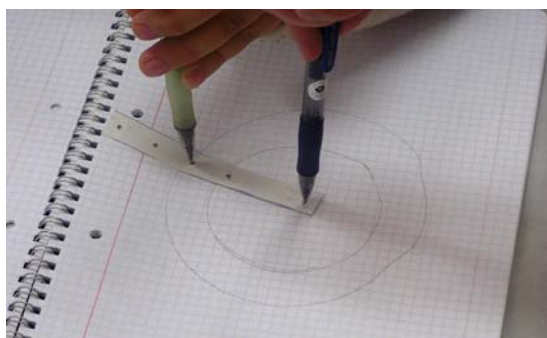
דרך א: בעזרת סרגל ועיפרון

כל תלמיד התבקש לסמן נקודה אחת במרכז הדף, ומספר רב של נקודות במרחק קבוע מאותה נקודה. מסרטוט מספר רב של נקודות מסביב לנקודה שבמרכז התקבל אוסף של נקודות צפופות, התלמידים העבירו ביניהן קו (בסרטוט חופשי) ויצרו מעגל.



דרך ב: בעזרת רצועת בריסטול ושני עפרונות

על רצועת הבריסטול סומנו ארבע נקודות, כך שאחת הנקודות סומנה בקצה הרצועה ואילו שלוש הנקודות האחרות סומנו לאורך הרצועה ובמרחקים קבועים זו מזו. בנקודה שבקצה הרצועה נעצו התלמידים עיפרון וקיבעו אותו לדף. עיפרון שני נעצו כל פעם בנקודה אחת מבין השלוש הנותרות, וסובבו את הרצועה בעזרת עיפרון זה. כך נוצרו שלושה מעגלים בגדלים שונים, כאשר לכולם מרכז משותף.



שלב ד - היחס בין היקף המעגל לקוטרו תמיד קבוע

הערכים שנמדדו נרשמו בטבלה. בעזרת תיווך המורה התלמידים מצאו שההיקף גדול בערך פי 3 מהקוטר. (ראו טבלה 1).

טבלה 1: הקשר בין היקף המעגל לקוטר

קוטר	היקף המעגל	יחס
10	31	$30=3 \times 10$
4.5	14	
15	47	
7	22	
19	60	

בשלב זה נעזרנו במכשיר מיוחד אשר תפקידו להמחיש את היחס הקבוע בין היקף המעגל לקוטרו. המכשיר עשוי עץ, מורכב מעיגול ומזרוע מלבנית צרה, כך שהזרוע ארוכה בערך פי 3.14 מהקוטר. לעיגול מצורפת רצועה גמישה (בצבע שחור) בעזרתה ניתן ללפף את העיגול ולמדוד את אורך הזרוע. ניתן לראות שהיקף העיגול שווה לאורך הזרוע, שהיא פי 3 וקצת מאורכו של הקוטר. הקוטר מסומן בעיגול ואורכו יחידת אורך אחת, על הזרוע מסומנים סימונים של יחידות אורך הזהות ליחידת האורך של הקוטר. כלומר, על הזרוע 3 וקצת יחידות אורך. הכלי פשוט להכנה וממחיש מאוד את מושג הפאי. ניתן ליצור כלי דומה מצלחת קרטון/פלסטיק, רצועת קרטון/סרגל, וסרט/חוט צמר, שאורכו כהיקף הצלחת. לסיכום, התלמידים נחשפו למושג הפאי, והבינו שהוא הקבוע המבטא את היחס בין ההיקף לבין הקוטר.

מכשיר הפאי



תודות למר משה בן-בסט שטרח והכין עבורנו את מכשיר ה- π

רדיוס ומרכז המעגל נוצר הצורך לקפל פעמיים את העיגול.

שלב ג - מציאת היחס בין היקף המעגל לקוטרו

כל תלמיד התבקש לקחת חפץ עגול וללפף סביבו נייר דבק, לאחר מכן להסיר את נייר הדבק ולהדביקו בדף המחברת.

בעזרת סרגל, מדד כל תלמיד את אורך הקו שהתקבל ואת קוטר המעגל.

בשלב זה התלמידים מדדו וחישבו בכל מעגל את:

- אורך ההיקף - בעזרת אורך נייר הדבק
- אורך הקוטר - על-ידי קיפולים
- סכום אורך ההיקף ואורך הקוטר
- ההפרש בין אורך ההיקף ואורך הקוטר
- המכפלה של אורך ההיקף באורך הקוטר
- מנת החילוק של אורך ההיקף באורך הקוטר

התלמידים ריכזו את הנתונים שלהם בטבלאות. המורה אספה את כל הנתונים מהתלמידים, רשמה אותם על הלוח, וביקשה למצוא חוקיות באחת או יותר מעמודות הטבלה.

היקף	קוטר	היקף - קוטר	היקף + קוטר	היקף / קוטר	קוטר / היקף
3125	450	235	495	7.0	0.14
3307	139.75	15	28	21.5	0.045
3	75	10	20	15	0.067
3	27	6	12	9	0.11
3333	7.5	3.5	6.5	5	0.2
36	90	13	23	18	0.056
3	200	20	40	30	0.033
4	25	7.5	12.5	10	0.1
3	75	10	20	15	0.067
305	220	44	44	6	0.167

התלמידים מצאו כי רק בעמודה בה נבדקה מנת החילוק של אורך ההיקף באורך הקוטר התקבלו מספרים דומים: כל המנות היו בערך 3.

בשלב זה הוצג המושג פאי - π בפני התלמידים, והם עמדו על משמעותו: היחס בין היקף מעגל לבין קוטרו.

דרך ג: בעזרת מחוגה וסרגל

התלמידים נעזרו במחוגה כדי לסרטט את המעגל, ובסרגל כדי למדוד את אורך הרדיוס.

בסיום התהליך התקיים דיון על כל שלוש הדרכים לסרטוט והמסקנה: סרטוט מעגל בעזרת מחוגה הוא המדויק והנוח ביותר. (היתרונות והחסרונות מוצגים בטבלה 2)

טבלה 2: יתרונות וחסרונות של שיטות לסרטוט מעגלים.

סוג הסרטוט	יתרונות	חסרונות
בעזרת סרגל ועפרון	זמין, אין צורך באמצעים מיוחדים	לא מדויק
בעזרת רצועת בריסטול ועפרון	זמין, אין צורך באמצעים מיוחדים	לא מדויק, אי אפשר לדעת מה קוטר המעגל
בעזרת מחוגה וסרגל	מדויק, ניתן לדעת את הגדלים של הקוטר והרדיוס	יש צורך במחוגה שלא תמיד זמינה

שלב ב - מציאת מרכז המעגל והרדיוס

התלמידים קיבלו חפצים שיש להם בסיס עגול, והם התבקשו למצוא את מרכז המעגל.

בשלב הראשון התלמידים סרטטו או העתיקו את המעגל למחברתם, ואז התעורר הקושי כיצד למצוא במדויק את מרכז המעגל. לאחר ניסיונות רבים ודיון במליאה, הציעה אחת התלמידות דרך למציאת מרכז המעגל, ותלמידי הכיתה אימצו את הצעתה: "גזרו את העיגול וקפלו פעמיים כך שיתקבל רבע עיגול. נקודת מפגש הקיפולים, היא נקודת מרכז המעגל".

חשוב לציין שכדי למצוא את הקוטר מספיק לקפל את העיגול לשני חלקים שווים, אך כדי להסביר את המושגים

סיכום ומסקנות

העשייה – התנסות פיזית ומנטאלית של הלומד, סיפקה חומר לדין ורפלקציה. המורה ניהל והדריך את הדין. במקום להגיד הוא שאל שאלות מתאימות, ולימד על-ידי הנחיית התלמידים לעשיית הדברים. ניתן לומר שפעילות יצירתית חווייתית וחזותית זו, תרמה להנאתם והנעתם של התלמידים. פעילות חקר בדרך זו, אותה חוו התלמידים, תרמה להעשרתם, להבנת המושג והפנמתו.

מקורות

רייז, ר', ואן דורמולן-אברהמי, נ' ופטקין, ד' (1996). תיאוריית ואן-הילה והוראת גיאומטריה. פרויקט "מחר 98" באצבע הגליל, הטכניון - המחלקה להוראת המדעים. **תכנית לימודים במתמטיקה לכיתות א-ו**. האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים משרד החינוך, התרבות והספורט, 2006.

Van Dormolen, J.& Arcavi, A. (2000). What is a Circle? *Mathematics in School*, 29(5), 15-19.

תרגום המאמר הנ"ל לעברית נמצא בעל"ה:

ואן דורמולן, י' והרכבי, א' (2002). [מה הוא מעגל](#). על"ה – עלון למורי המתמטיקה, גיליון מס' 28, 3-7.

למרות שעל-פי תכנית הלימודים נושא הפאי נלמד בכיתות ו בלבד, בחרנו ללמדו גם בשאר הכיתות, כשהפעילויות הותאמו לידע הקודם של התלמידים, ולשלב התפתחות החשיבה בו הם נמצאים (בהתאם לגיל). נתגלו הבדלים בין שכבות הגיל השונות: **בכיתות א-ב** מצאנו כי היה קושי מצד התלמידים לחקור באופן עצמאי ולהפנים את המושג. בכיתות א-ב התלמידים רק **נחשפו** ליחס הקבוע בין קוטר המעגל להיקפו.

בכיתות ג-ד מצאנו כי התלמידים מסוגלים לעבוד ולחקור באופן עצמאי, וחלקם הגדול אף הפנים את המושג. התלמידים בכיתות ג-ד **הבינו** שקיים יחס קבוע בין היקף המעגל לקוטרו, אך הגיעו למסקנה זו רק על-ידי עזרה ותיווך של המורה.

בכיתות ה-ו התלמידים נהנו מאוד מהחקירה שהייתה מלווה בעשייה, עבדו באופן עצמאי, **הבינו** והפנימו את המושג. בוצעה פעילות חקר עצמאית אשר בסיומה התלמידים **גילו** כי קיים יחס קבוע בין היקף המעגל לקוטרו והוא בערך 3.

לסיכום, בפעילות זו לא ניתנו הגדרות על-ידי המורה באופן מיידי. התלמידים הוזמנו "לעשות משהו".

רינת באור

רכזת מתמטיקה בביה"ס "כפיר" בתל-אביב.
מורה למתמטיקה ולחינוך מיוחד ומאבחנת דיסקטית לליקוי למידה.



רונית בסן-צינצינטוס

מרצה במכללת סמינר הקיבוצים מדריכה מורים ופרחי הוראה בתחום הוראת המתמטיקה.



יפית בן בסט

רכזת מתמטיקה ומחנכת כתיב א' בבית-ספר "ביאליק" בחולון. בוגרת התמחות והתמקצעות במתמטיקה במכללת סמינר הקיבוצים בתל-אביב.



מיכל בן שמעון

מורה למתמטיקה ומחנכת כיתות ה'-ו' בביה"ס "כפיר" בתל-אביב. בוגרת התמחות והתמקצעות במתמטיקה במכללת סמינר הקיבוצים בתל-אביב.

