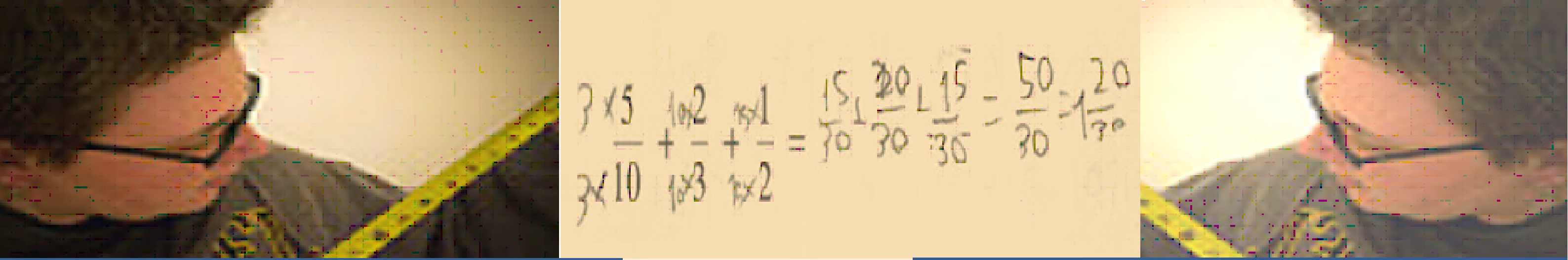


תרומתן של בעיות בלתי שגרתיות

תמי גירון

שיבוץ בעיה שאיננה שגרתית במבחן, מאפשר לבדוק את יישום החומר הנלמד, ברמות שאינן שחזור אלגוריתם או פרוצדורה שתורגלה בכיתה.

בעיה - מעצם שמה והגדרתה - מורכבת מסיטואציה מילולית (מחיי היום-יום או בעיה העוסקת באובייקטים מתמטיים כמו מספרים, צורות, מבנים שחוזרים על עצמם ועוד. המכילה נתונים שונים. כדי להגיע לפתרון הבעיה, התלמיד צריך לייצג את הסיטואציה והנתונים בתוך מודל מתמטי המוכר לו. לעתים, מתאימים מספר מודלים לאותה בעיה. במקרה זה, או שהפותר "שולף" מיד מודל שבו הוא ישתמש לפתרון, או שהוא מתלבט בין מודלים ובוחר את המודל שנראה לו הנוח ביותר לעבודה. אנו נוהגים לקרוא להתלבטות ולבחירה "שימוש בתובנה מתמטית", ולשימוש במודל המתמטי "אסטרטגיה לפתרון".

בחלק מהבעיות המתמטיות, כדי לאתר את המודל המתאים יש צורך לפרק את הבעיה למרכיביה, ולאחר מכן לצרף אותם שוב בדרך שונה, שתאפשר עבודה בתוך המודל המתמטי. פעולות אלו הן פעולות מסדר חשיבה גבוה. ככל שיהיו בבעיה יותר מרכיבים, או ככל שמבנה הבעיה יהיה חדש ולא יהיה מוכר לתלמיד, יידרש יותר שיקול דעת בפירוק הבעיה למרכיביה, בהבנת הקשרים בין המרכיבים, ובהתאמת מודל מתמטי לפתרון. בעיות שכדי לפתור אותן נדרשת חשיבה מסדר קצת יותר נמוך, הן בעיות שגרתיות המאפשרות: או פתרון דינמי בשלבים - מנתוני הפתיחה מתקדמים לאט לאט; או, לחילופין, המבנה כל כך מוכר שניתן להתאים לו מיד מודל מתמטי, מבלי שיהיה צורך לפרק את נתוני הבעיה כדי להבין את הקשר בין הסיטואציה למודל המתמטי. בחלק גדול מהבעיות השגרתיות יש צורך בפירוק הבעיה כדי להבין את הסיטואציה למרכיביה, אבל, ככל שהמרכיבים יהיו יותר מוכרים לתלמידים הפירוק יהיה קל יותר, וכך גם התאמת המודל המתאים לכל מרכיב או שלב בבעיה.

להדגמה אציג את הבעיות הבאות.

בעיה א

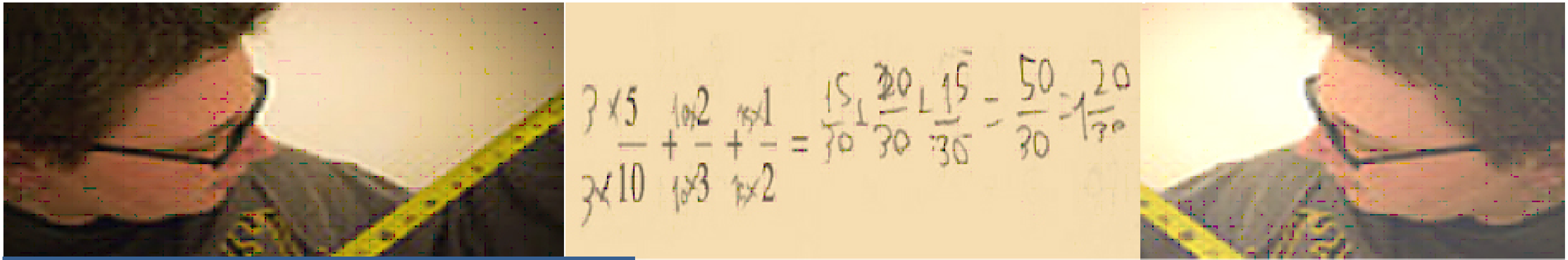
דן קנה 4 מחברות במחיר של 3 ₪ למחברת,

ו- 4 עטים במחיר 5 שקלים לעט.

כמה שילם דן עבור המחברות והעטים?

צורת הצגת הבעיה מאפשרת לעבוד בשלבים תוך כדי קריאה. בשלב הראשון התלמיד יאתר את המבנה הכפלי, ויחשב בעזרת מודל הכפל את מחיר המחברות: 3 x 4. לאחר מכן יחשב את מחיר העטים (מתוך הבנה ששוב חוזר המבנה הכפלי): 5 x 4. ולבסוף, ישתמש במודל החיבור וימצא את התשובה. שני המודלים של כפל וחיבור הם מודלים מוכרים, המוצגים, בדרך כלל, באותו מבנה של קבוצות שוות בכפל (קבוצות של עפרונות וקבוצות של עטים), ובפעולת החיבור מחברים אותו אוביקט (סכומי כסף). גם דרך הצגת הסיטואציה מאפשרת לפתור את השאלה מבלי לקרוא אותה עד הסוף, ולכן הבנת הסיטואציה יכולה להתרחש בשלבים ללא צורך לפרק אותה בהתחלת תהליך הפתרון.

קיימת אפשרות נוספת לפתרון: חיבור המחירים וכפל ב- 4. דרך זו מבוססת על ראייה כוללת של נתוני השאלה, פירוק השאלה למרכיבים, והבנה שמדובר בשתי קבוצות בעלות אותו מספר איברים:



קבוצה של 4 מחברות וקבוצה של 4 עטים. ולכן, ניתן כאילו ל"קבץ" אותם ל- 4 קבוצות שוות, שבכל קבוצה יהיו מחברת ועט, והמחיר של כל קבוצה יהיה סכום המחירים של מחברת ועט. מאחר ומדובר ב- 4 קבוצות כאלו, יש לכפול את סכום המחירים ב- 4.

בעיה ב

מחיר מחברת - 3 ₪.

מחיר עט - 5 ₪.

מה המחיר של 4 מחברות ו- 4 עטים?

צורת ההצגה של בעיה ב, מחייבת קריאה עד הסוף וחזרה לנתונים המוצגים בהתחלה. לכן, ניתן לומר שיש צורך בראייה כוללת ובפירוק והרכבה. אולם, מבנה השאלה מאוד מוכר, ויש לצפות שפתרון השאלה יהיה אלגוריתמי – כפי שהתלמידים תרגלו בבעיות דומות. מתלמיד שעסק בבעיות כפליות וחיבוריות לא נדרשת חשיבה מסדר גבוה כדי לפתור את הבעיה.

בעיה ג

מחיר מחברת ועט הוא 8 ₪.

מה המחיר של 4 מחברות ו- 4 עטים ?

בבעיה ג המבנה של מספר קבוצות החוזרות על עצמן מוכר לתלמידים ומזוהה כמודל הכפל. ההקשר הסיפורי גם הוא מוכר, וכאשר שואלים מהו התשלום עבור מספר חפצים, באופן טבעי התלמיד יחפש את מחירו של חפץ אחד, וישתמש במודל הכפל. אולם, חסר כאן נתון שהתלמיד הורגל לקבל בשאלות שגרתיות - מחיר כל חפץ. מצד שני, יש נתון אחר - סכום המחירים של שני חפצים שונים זה מזה (המחברת והעט). במקרה זה התלמיד צריך לפרק את המידע, ולהבין כיצד הוא יכול להשתמש בנתונים, שאינם שגרתיים, כדי למצוא את הפתרון לשאלה. כאן עומדות לפניו שתי אפשרויות:

האפשרות האחת, להבין את הקשר המספרי שבין מספר העטים ומספר העפרונות (מספר זהה) ולכן אפשר להתייחס לעט ולעיפרון כאל קבוצה שאת מחירה יש לכפול ב- 4. מצב זה, שבו בכל קבוצה יש חפצים מסוגים שונים, והיחס בין מספר החפצים מכל סוג נשמר, איננו שגרתי, ודורש הבנה של מבנה כפלי מורכב, הגובל בחשיבה בסיסית פרופורציונלית. כל אלו דורשים, בשלב זה של הלמידה, מיומנויות חשיבה מסדר גבוה.

האפשרות השנייה היא, להבין שיש אפשרויות רבות למחירי העט והעיפרון כשסכום המחירים נשמר. מאחר וסכום המחירים קבוע, כל האפשרויות למחירים יתנו את אותו הפתרון.

למשל: אם נחליט שמחיר מחברת הוא 2 ₪ ומחיר עט הוא 6 ₪, הרי שניתן לחשב:

.4 x 2 + 4 x 6= 8 + 24 = 32

ואם נחליט שמחיר מחברת הוא 3.5 ₪ ומחיר עט הוא 4.5 ₪, הרי שניתן לחשב:

.4 x 3.5 + 4 x 4.5 = 14 + 18 = 32

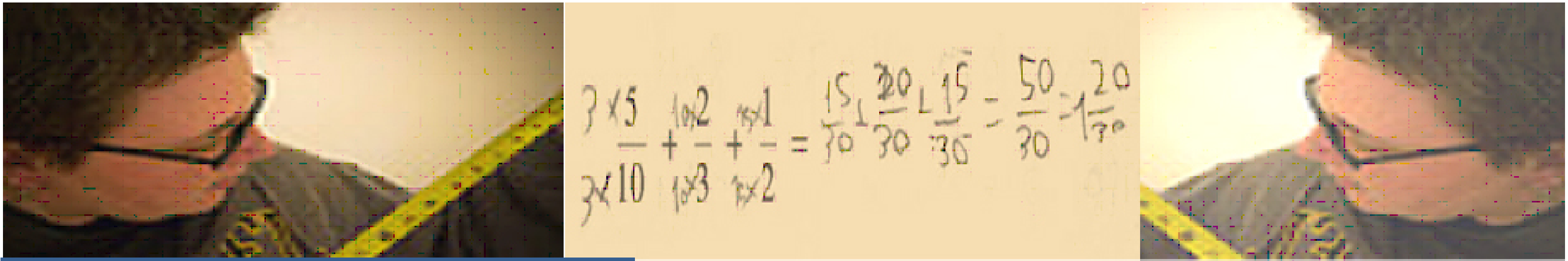
בדרך זו הקשר הקבוע שבין המחירים (סכומם 8) ישפיע על כך שככל שיעלה מחירו של אחד החפצים, ירד מחירו של החפץ השני, ומאחר ומדובר על 4 חפצים מכל סוג, התשלום הסופי יישמר קבוע, ולא יהיה תלוי במחיר של המחברת או העיפרון.

חשוב לשים לב שאחד הפתרונות האפשריים הוא המקרה שבו מחירי המחברת והעט זהים. כלומר: מחיר מחברת הוא 4 ₪, ומחיר עט הוא 4 ₪. במקרה זה החישוב יהיה:

.4 x 4 + 4 x 4 = 32

קשר זה ניתן להציג באמצעות הפונקציה הקווית:

.x + y = 8



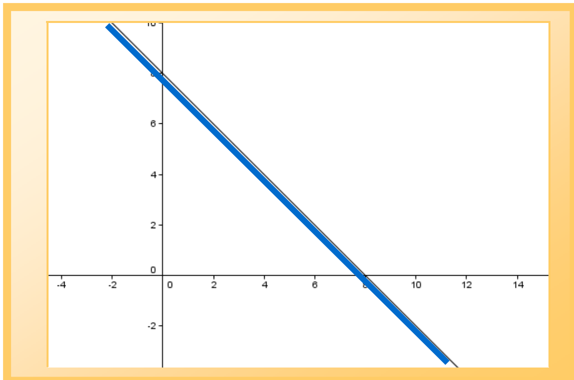
כדי להציג את הייצוג הגרפי של הפונקציה, יש להציב ערכים באחד המשתנים, ולמצוא בעזרת חישוב את הערך של המשתנה השני.

כאשר $x = 0$ יהיה $y = 8 - 0 = 8$, כלומר, אחת הנקודות של הפונקציה היא: (0 , 8) שהיא נקודה על ציר ה- y.

כאשר $y = 0$ יהיה $x = 8 - 0 = 8$, כלומר, אחת הנקודות של הפונקציה היא: (8 , 0) שהיא נקודה על ציר ה- x.

מאחר ומדובר על פונקציה קווית (ממעלה ראשונה) מספיק למצוא 2 נקודות כדי לקבל את הישר, שהוא הייצוג הגרפי של הפונקציה. הערכים של כל נקודה על הישר המחבר בין שתי הנקודות, הם אחת האפשרויות למחירים של עט ועיפרון.

גרף הפונקציה $x + y = 8$ מוצג בסרטוט הבא:



תחום הקיום של הפונקציה, המעניין אותנו. הוא תחום המספרים האי-שליליים (החיוביים וה- 0). מכיוון ש- x ו- y מייצגים מחירים, ולכן אינם יכולים להיות מספרים שליליים. הם חייבים להיות 0 או מספר חיובי. (0, למשל, למקרה שבו משלמים עבור מחברת ומקבלים במתנה עט, או ההיפך.)

קביעת המחיר של כל אחד מהחפצים, בהתחשב באילוץ שסכומם שווה ל- 8, דורשת פירוק נתוני השאלה, והכנסת נתונים משל התלמיד. פעולה זו דורשת חשיבה מסדר גבוה. חשיבה עוד יותר גבוהה תהיה אצל התלמידים שגם יבינו, שכל מחיר שייקבע תחת האילוץ הנתון ייתן את אותו הפתרון. ייתכן שתלמידים צעירים לא יבינו זאת, ויגיעו לפתרון על-ידי דוגמה אחת, וייתכן שחלקם יבדקו זאת על-ידי מספר דוגמאות ויכלילו את המסקנה.

במבחן מיצ"ב לכיתה ה, תשס"ז, הוצגה בעיה דומה לבעיה ג:

מחיר 5 מחברות ו- 2 עטים הוא 70 ₪.

מה המחיר של 15 מחברות ו- 6 עטים?

בדומה לבעיה ג, שהוצגה לעיל, אפשר להציג את נתוני השאלה באמצעות פונקציה קווית:

$5x + 2y = 70$, או בייצוג אחר:

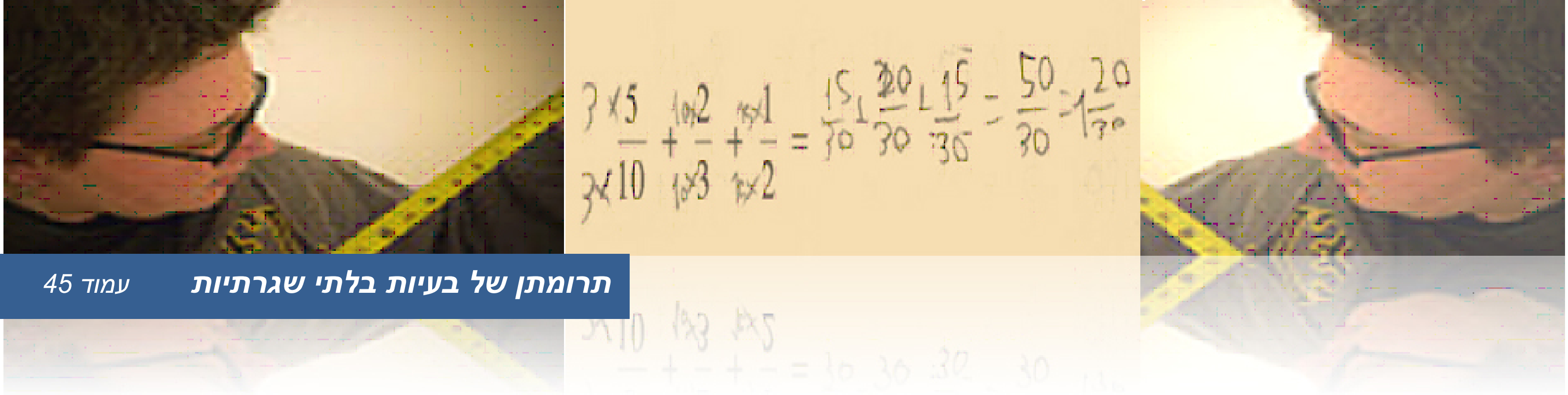
$$y = \frac{70 - 5x}{2} = 35 - 2.5x$$

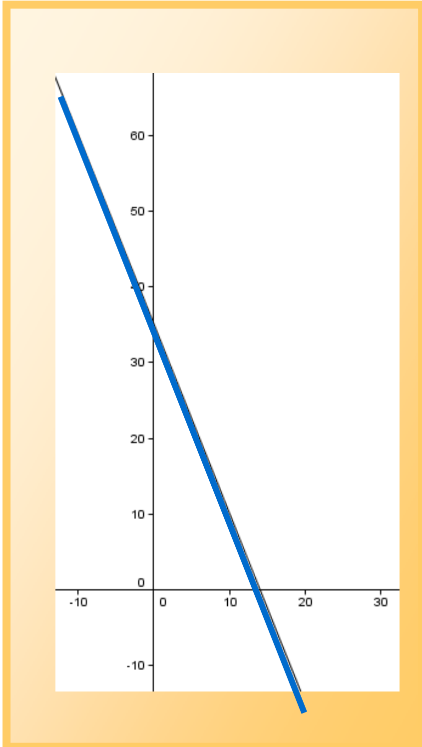
גם כאן, כדי להציג את הייצוג הגרפי של הפונקציה, נציב ערכים באחד המשתנים, ונמצא בעזרת חישוב את הערך של המשתנה השני.

כאשר $x = 0$ יהיה $y = 35$, כלומר, אחת הנקודות של הפונקציה היא: (0 , 35) שהיא נקודה על ציר ה- y.

כאשר $y = 0$ יהיה $x = 14$, כלומר, אחת הנקודות של הפונקציה היא: (14 , 0) שהיא נקודה על ציר ה- x.

גרף הפונקציה $5x + 2y = 70$ מוצג בסרטוט בעמוד הבא.





כמו בבעיה ג, הערכים השווים והגדולים מ- 0 של כל נקודה על הישר המחבר בין שתי הנקודות הם אחת האפשרויות למחירים של מחברת ועט. ערכי אחת הנקודות שעל הישר הם (10,10) והם ייצגו את המקרה שבו מחיר המחברת שווה למחיר העט. חשוב לשים לב שהמספרים בשאלה מאפשרים את ה"שליפה" של אפשרות פתרון זו ללא חישובים. (יש בסה"כ 7 חפצים שעולים ביחד 70 ₪, ולכן האינטואיציה מיד מכוונת לאפשרות שבה כל חפץ עולה 10 ₪ - (70:7).

מאחר ופתרון בעזרת פונקציה קווית איננו חלק מ"ארגז הכלים" של תלמיד בכיתה ה, נדרש כאן פתרון שאיננו שגרתי, המבוסס על פירוק והרכבה, וחשיבה מסדר גבוה.

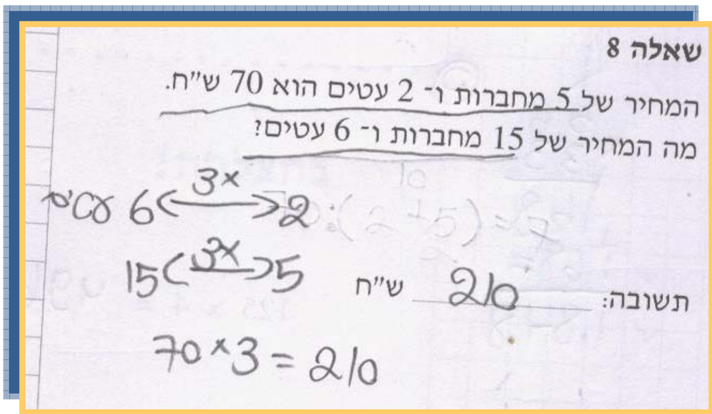
מתוך כ-20,000 מחברות שנבדקו במגזר היהודי, אחוז התלמידים שנמנעו מלענות על השאלה היה: 11.41%, ולגבי העונים (כ- 90% מהנבחנים) הציון הממוצע (של התלמידים ש"העזו" לענות על השאלה) היה 72.05. ציון זה דומה לציון הממוצע של שאלות שגרתיות שהופיעו במבחן זה או מבחנים קודמים. אלא, שאחוז התלמידים שנמנעו מלענות על שאלות שגרתיות היה נמוך יותר (בין 3% ל- 8%).

נראה שנתונים אלו מצביעים על כך, שקיים חשש ראשוני בהתמודדות עם הבלתי מוכר, אולם תלמידים שמחליטים להתמודד, מצליחים לגייס ידע שנלמד, להתאים אותו לצורכי הבעיה החדשה והבלתי מוכרת, ואינם נרתעים משאלה הדורשת חשיבה מסדר גבוה.

כיצד הם עושים זאת ?

להלן נציג מספר דרכים של תלמידים לפתרון השאלה.

פתרון מס' 1


שאלה 8

המחיר של 5 מחברות ו- 2 עטים הוא 70 ש"ח.

מה המחיר של 15 מחברות ו- 6 עטים?

6 $\xleftrightarrow{3\times}$ 2

15 $\xleftrightarrow{3\times}$ 5

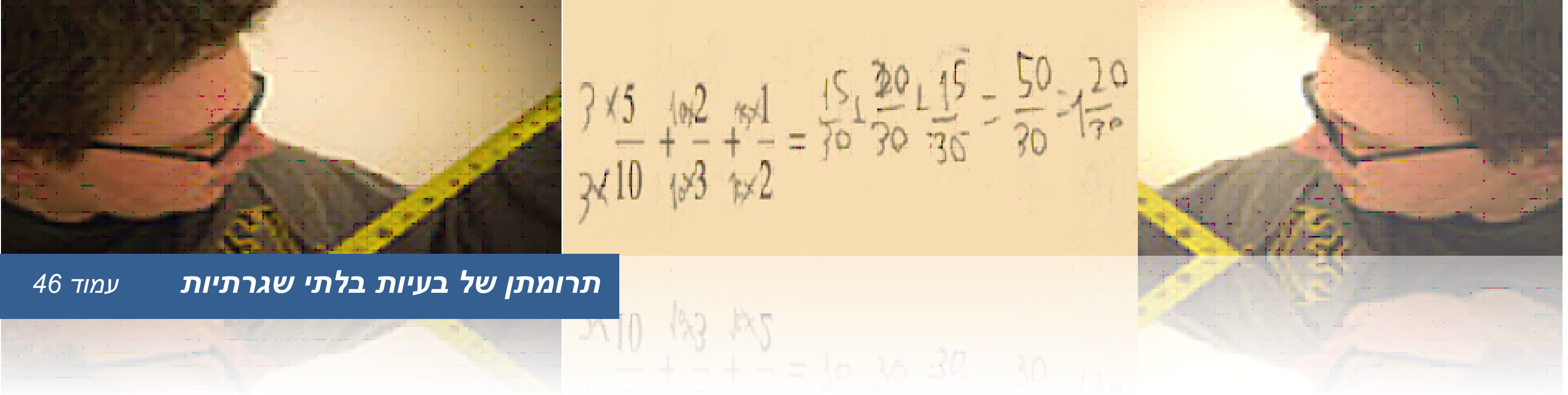
תשובה: 210 ש"ח

$70\times3=210$

על-פי התיעוד, ניתן להבין שהתלמיד הבחין בקשר הפרופורציונלי בין מרכיבי השאלה, והוא ראה ששתי הכמויות מוכפלות פי 3, ולכן כפל גם את המחיר פי 3.

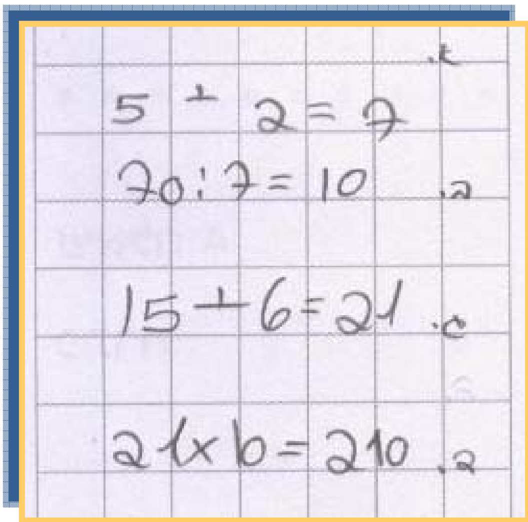
דרך זו של פתרון נשענת על ההבנה שהמודל המתמטי המתאים לשאלה זו הוא מודל הכפל.

התלמיד בודד את הקבוצה המוכפלת, שבאופן לא שגרתי מכילה חפצים משני סוגים, ובכמויות שאינן זהות - 5 מחברות ו- 2 עטים. באמצעות הבנת הקשר הכפלי שבין



15 ל- 5 ובין 6 ל- 2 , הוא הבין שיש לו 3 קבוצות זהות כאלו, ולכן כפל את מחיר הקבוצה ב- 3.
במחברות של תלמידים אחרים שהשתמשו באותה האסטרטגיה אפשר היה גם לראות תרגיל חיבור: 70+70+70.

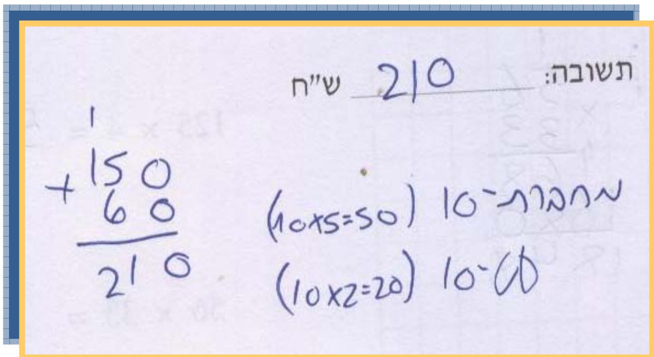
פתרון מס' 2



בפתרון זה, בשל הקשר המספרי שבין מספר החפצים (7) למחיר הכולל (70), ייתכן שהתלמיד יצא מתוך הנחה שמחיר מחברת שווה למחיר עט. ייתכן גם שפשוט לא ידע איך להתייחס לעובדה שיש חפצים מסוגים שונים ובמספר אחר בכל קבוצה, ולכן החליט לחבר את שניהם, כי כאמור, המספרים אפשרו חישוב פשוט. באותו אופן הוא מצא את מספר הפריטים הכולל (21) וחישב את מחירם על-ידי הכפלה ב- 10.

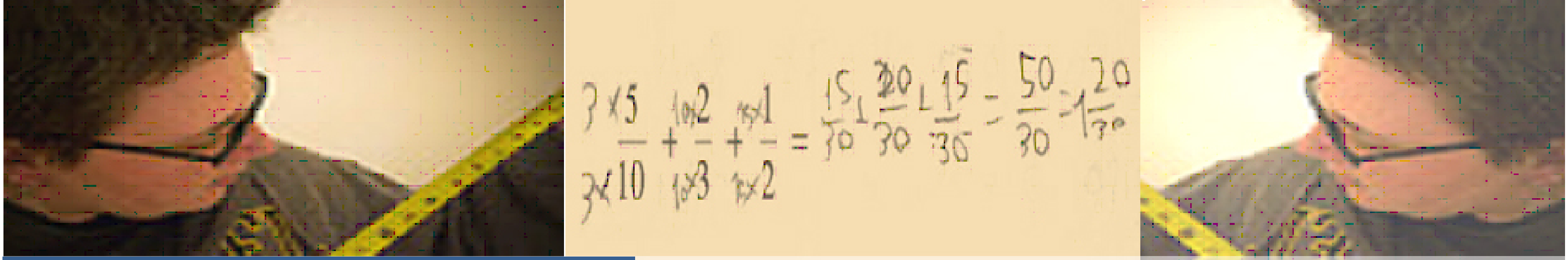
אסטרטגיה דומה אפשר לראות בפתרון הבא:

פתרון מס' 3



בתיעוד הפתרון ניתן לראות בבירור, שהתלמיד הסיק שמחיר המחברת זהה למחיר העט.
מאחר ובסה"כ יש 7 פריטים (מחברות ועטים), והמחיר הכולל הוא 70 ₪, הרי שהסיק שמחיר כל אחד מהם הוא 10 ₪. את המחיר הזה הוא כפל ב- 15 מחברות ולאחר מכן ב- 6 עטים, חיבר את התוצאות והגיע לפתרון של 210 ₪.
התלמיד השתמש באחד הפתרונות האפשריים. במקרה שבו: $10 = y = x$. כלומר, התלמיד נשען בפתרונו על מקרה פרטי שמייצג את כל שאר הפתרונות. ייתכן שלא עשה זאת במודע, אבל קיבל פתרון נכון.

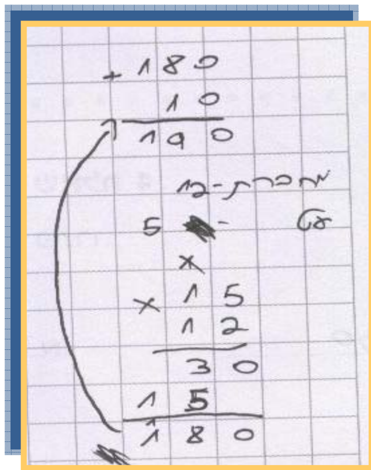
על מנת להבין מה התלמיד הבין והניח, מומלץ להעלות שאלות מסוג זה בכיתה או בשיחות בקבוצות. מחברות המיצ"ב הפנימי, הנשארות בבית הספר, מאפשרות למורים לחזור אל התלמידים על מנת לשוחח אתם על הפתרונות, ואף להציג שאלה ופתרונות של תלמידים לדיון בכיתה. שאלה זו היא דוגמה לשאלה שיכולה לזמן דיון, שניתן באמצעותו ללמוד, האם התלמידים חושבים שהפתרון של מחיר זהה לשני החפצים הוא פתרון יחיד,



או שהם מבינים שהוא אחד מבין פתרונות רבים אחרים אפשריים, שבסופו של דבר יתנו את אותה התשובה. (וזאת להבדיל משאלות פתוחות שמתקבלות בהן תשובות סופיות רבות.)

בפתרון הבא נוכל לראות תשובה של תלמיד שאף הוא בחר מקרה פרטי של מחירים למחברת ולעט, אבל לא את המקרה שבו המחיר זהה לשני הפריטים, שכאמור, היה מאוד קל ומיידי לחישוב.

פתרון מס' 4



גם פתרון זה נשען על מקרה פרטי אחד מבין כל האפשרויות. כנראה שהתלמיד בחר את מחיר המחברת והעט, על-ידי כך שניסה מספרים שיתאימו לתנאי ש- "5 מחברות ו- 2 עטים עולים 70 ₪". הוא בחר את מחיר המחברת כ- 12 ₪, ואת מחיר העט כ- 5 ₪. ואכן, בחירה זו מתאימה לתנאי $12 \times 5 + 5 \times 2 = 70$

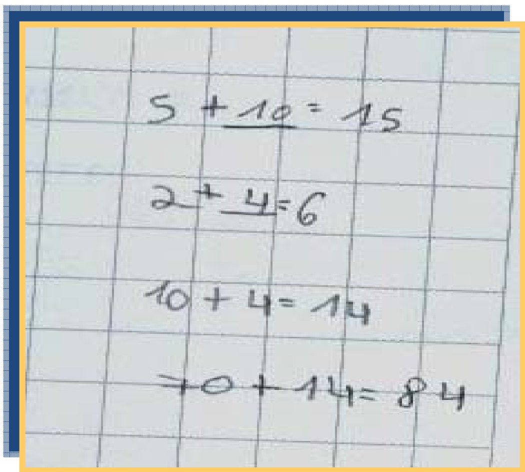
על בסיס מחירים אלו הוא חישב כמה יעלו 15 מחברות. הוא שגה כשהוא הוסיף למחיר המחברות את המחיר של 2 עטים ולא של 6 עטים. אילו היה מוסיף את המחיר של 6 עטים (30 ₪) היה מגיע לפתרון הנכון, שהוא 210 ₪.

חשוב לציין שדרך הפתרון הנשענת על בחירת מחירים לכל אחד מהפריטים, על-פי התנאי המוצג בשאלה, היא דרך מסורבלת וארוכה, וחשוב לעודד את התלמידים לראות את הקשר הפרופורציונלי הכפלי שבין הכמויות הניתנות. יחד עם זאת, חשוב להיות ערים לדרכי פתרון נוספות ולהעלות אותן לדיון בכיתה. חשיבות הדיון היא לא במציאת פתרון השאלה אלא בבחינת הפתרונות השונים ונכונותם.

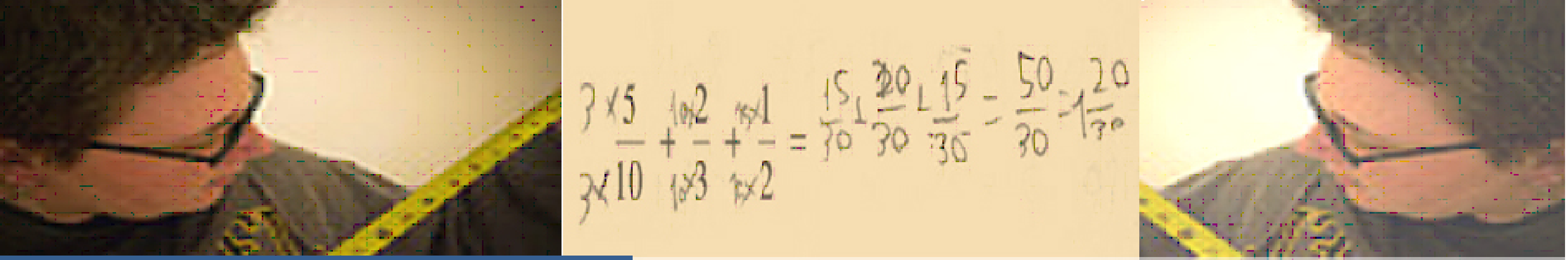
פתרונות שגויים המבוססים על אסטרטגיות שגויות (להבדיל מטעויות חישוביות) שנמצאו בשאלה זו, בדרך כלל, מצביעים על חוסר הבנת הסיטואציה כסיטואציה שניתן לייצג אותה בעזרת מבנה כפלי.

להלן שתי דוגמאות לכך.

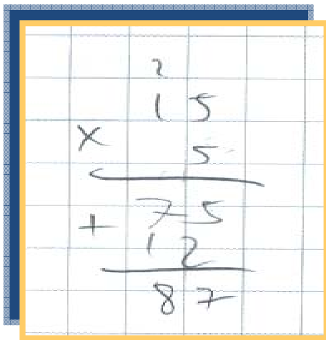
פתרון מס' 5



בשלב הראשון התלמיד בדק מה **ההפרש** בין מספר החפצים בכל אחד מהמצבים. בשלב השני חיבר את מספר החפצים המייצגים הפרש זה עם סכום כסף. ברור שכבר מההתחלה החשיבה הייתה חיבורית ולא כפלית, ובהמשך התלמיד חיבר מספר חפצים לסכום כסף וקיבל את המספר 84, שלא ניתן לתת לו כינוי והוא חסר משמעות לפתרון השאלה.



פתרון מס' 6



יש להניח, שהתלמיד "הרגיש" שיש בבעיה מצב כפלי, אך הוא כפל את מספר המחברות במספר מחברות, ואת מספר העטים במספר עטים - מה שבוודאי לא הביא אותו לפתרון הנדרש.

סיכום

נתוני השאלה ממבחן המיצ"ב והאסטרטגיות לפתרון, מצביעים על כך שתלמידים רבים אינם נרתעים מהתמודדות עם שאלות שאינן מוכרות להם, ושנדרשת בהן פעולת פירוק והרכבה המעידה על חשיבה מסדר גבוה. התלמידים משתמשים באסטרטגיות שונות כדי להגיע לפתרון ומיישמים מודלים שנלמדו גם בסיטואציות שאינן זהות לסיטואציות שנלמדו בכיתה.

השימוש במודל הכפלי בסיטואציות כגון אלו שהוצגו במאמר, עשוי להעיד על תחילת חשיבה פרופורציונלית, המתקשרת, בהמשך הלמידה, להבנת פונקציות וקשרים מתמטיים אחרים. יש להניח שהמספרים הנוחים בשאלה כיוונו גם לבחירת האסטרטגיה, וגם לבחירת המקרים הפרטיים, שבעזרתם חלק מהתלמידים פתרו את הבעיה. בנוסף, יש להניח שהעיסוק (המונחה בתכנית הלימודים כבר בכיתות נמוכות) בשאלות פתוחות, בהן מודגש הרעיון של מיצוי אפשרויות מהווה תשתית לידע ולהעזה לנסות ולמצוא אפשרות שתתאים לנתוני הבעיה, ולעבוד עם אפשרות זו.

העיסוק בשאלות פתוחות מוסיף גם לתחושת הביטחון הנדרשת לתלמיד, כשהוא צריך לחפש בעצמו את הדרך לפתרון שאלות מסוג זה.

תלמידים נדרשים במבחנים לפתור שאלות בלתי שגרתיות, שנדרשת בהן חשיבה מסדר גבוה - פירוק והרכבה. יש חשיבות רבה לחשיפת התלמידים למגוון גדול של שאלות כאלו בכיתה, להיכרות עם אסטרטגיות שונות לפתרון, לדיון וניתוח כל אחת מהאסטרטגיות, והבנת נכונותה או אי- נכונותה, לראיית הקשר שבין האסטרטגיות, ולקישור האסטרטגיות להתנסויות שונות ולידע בתחומים מתמטיים שונים. עיסוק בשאלות בלתי שגרתיות בדרך זו עשוי להעלות את אחוז התלמידים ה"מעזים" לענות על שאלות כאלו במבחנים, ולשפר באופן משמעותי את ההבנה המתמטית שלהם.

מדענים ומומחים למתמטיקה רבים מנסחים את מהותה של החשיבה המתמטית כ"יכולת לפתור בעיות בכלים מתמטיים". מכאן אפשר להעלות את השאלות:

- **האם הצגת שאלה בלתי שגרתית יכולה להיות הפתיח של כל שיעור מתמטיקה, ותחילת מסלול הלמידה של כל השיעור?**
- **האם הצגת שאלות בלתי שגרתיות, איננה יכולה להיות הגורם המאתר והמוביל להוראה כל הנושאים במתמטיקה?**

נראה לי שתכנון הוראה על בסיס הנחות אלו עשוי להגביר את העניין, הסקרנות וההבנה של תלמידים, כבר בגיל בית הספר היסודי.

על כותבת המאמר:

תמי גירון

מדריכה ארצית למתמטיקה בבתי הספר היסודיים ועורכת כתב העת- מספר חזק 2000.