

מקומה של יצירתיות בפתרון בעיות לא שגרתיות בסדרות

אצל מורים למתמטיקה בבית הספר היסודי ומתכשרים להוראה בתחומי דעת אחרים

אביקם גזית, דורית פטקין

להגיע להחלטה מהי התשובה המתאימה ביותר. בדקה הנוספת שנותרה רשם את תשובתו:

"עלה על גג הבניין עם הברומטר והפל אותו מעבר למעקה תוך כדי מדידת זמן הנפילה באמצעות שעון עצר. ואז, תוך שימוש בנוסחת הנפילה החופשית, חשב את גובה הבניין".

בשלב זה שאל הבורר את חברו אם הוא מוכן להסתפק בתשובה זו, והחבר הסכים לתת לתלמיד את מלוא הנקודות. כאשר עזב הבורר את הכיתה, נזכר שהתלמיד אמר שיש לו כמה תשובות לבעיה והיה סקרן לדעת מהן. הוא חזר לכיתה ושאל את התלמיד למה התכוון והתלמיד ענה:

"ישנן דרכים רבות למדוד באמצעות ברומטר את גובה הבניין. למשל, אפשר להוציא את הברומטר ביום שמש, למדוד את גובהו, את גובה הצל שהוא מטיל ואת גובה הצל שמטיל הבניין. ואז באמצעות יחסים של ערך משולש (באמצעות שימוש במשפט הפרופורציה של תאלס) ניתן לחשב את גובה הבניין. קיימת שיטה פשוטה בה עולים במדרגות הבניין ומסמנים על הקיר את גובה הברומטר עם העלייה במדרגות. סופרים את הקווים וכופלים באורכו של הברומטר.

אם רוצים שיטה מורכבת יותר אפשר לקשור את הברומטר לקצה חבל ולהניע אותו כמטוטלת היורדת עד למרצפת הרחוב. מחשבים את ערך ה- g , שהוא קבוע הנפילה החופשית, והפרש בין ערכי g ייתן את גובה הבניין. במקרה שאין הגבלה לתשובה פיסיקלית דווקא, אפשר לקחת את הברומטר, לדפוק על דלתו של שוער הבניין ולהציע לו את הברומטר החדש אם יואיל לומר מה גובה הבניין".

מתהלך סיפור שמקורו לא ידוע, אך הוא מבוסס על מקרה אמיתי בו מעורבים שני פיסיקאים, חתני פרס נובל, נילס בוהר (Nils Bohr) וארנסט רתרפורד (Ernest Rutherford). שניהם היו מרצים לפיסיקה באוניברסיטת מנצ'סטר, והסיפור מתייחס למקרה כאשר אחד מהם התבקש להיות בורר בערעורו של תלמיד. המקרה התפרסם בספר ה"קווארק והיגואר" תחת הכותרת: סיפור הברומטר. התלמיד ערער על כך שקיבל ציון 0 על תשובה, שלדעתו מגיע לו עליה מלוא הציון. המורה פנה לחברו להיות בורר, ואותו מורה קרא את

"כיצד אפשר לדעת את גובהו של בניין באמצעות ברומטר?".

תשובתו של התלמיד הייתה: "עלה על גג הבניין עם ברומטר. קשור את הברומטר לחבל ארוך, ושלשל אותו מגג הבניין עד שייגע במרצפות הרחוב. משוך את הברומטר ומדוד את אורך החבל! אורכו של החבל הוא גובה הבניין".

המורה הבורר חשב לעצמו שהתשובה מעניינת ובעצם נכונה, אבל התלבט באם מתן מלוא הנקודות יראה את בקיאותו של התלמיד במקצוע הנלמד - פיסיקה. מאחר והתשובה נראתה לבורר מתחכמת במידת מה, הציע לתלמיד, בהסכמת חברו, לנסות ולענות שוב על השאלה, והתלמיד הסכים. לתלמיד הוקצבו שש דקות בהן התבקש להראות בקיאות כלשהי בתכני הפיסיקה.

לאחר חמש דקות לא רשם התלמיד דבר, ואמר לבורר שיש לו למעשה מספר תשובות לשאלה זו, והוא מנסה

תרגיל מתמטי שגרתי, הוא יגיע לפתרון באמצעות חשיבה אסוציאטיבית רגילה, בה תורגל ואליה הסתגל. אך אם ניתן לתלמיד משימה שאינה מסתמכת על אלגוריתם מיידי, אזי בשלב הפתרון אי-אפשר להסתמך רק על תהליך אסוציאטיבי רגיל, אלא נחוץ תהליך מורכב יותר. תהליך מורכב זה מבקש יחס אסוציאטיבי חדש בין מרכיבי הבעיה, קשר שלא היה ידוע קודם - צירוף ביסוציאטיבי, שמאפשר להגיע לפתרונות יצירתיים (Martindale, 1989).

מתמטיקה ויצירתיות

יצירתיות במתמטיקה באה לידי ביטוי על-ידי ניסוח עצמאי של בעיות מתמטיות לא מסובכות, מציאת דרכים ואמצעים לפתירת בעיות אלו, ומציאת שיטות מקוריות לפתרון בעיות לא שגרתיות. אחת הדרכים ליצור מצבים הדורשים חשיבה יצירתית היא להציג בעיות פתוחות בהן אין פתרון אחד חד-משמעי.

אם נשאל תלמידים כיצד נחלק שווה בשווה 12 תפוחים בין 3 קערות, האלגוריתם הוא חד-משמעי, ותשובה אחת מתבקשת בתנאים הנתונים. אבל אם נשאל כיצד נחלק שווה בשווה 12 תפוחים בין מספר קערות, לשאלה זאת אין פתרון אחד, והתלמיד צריך להניח הנחות לפני שיינתן את הפתרון מתוך כמה תשובות אפשריות (Yee, 2005).



בשלב זה הפסיק הבורר את התלמיד, ושאל אותו האם באמת אינו יודע את התשובה הנדרשת לשאלה. וכך מסתיים הסיפור שבכוונתו להציג את המרכיב היצירתי בחשיבה - אותו מרכיב שלטענת התלמיד מערכת המבחינים בבית הספר מכוונת נגדו (Gell-mann, 1994).

מסיפור זה עולה השאלה מהי אותה יצירתיות שבאה לידי ביטוי בתשובותיו של התלמיד, והאם אפשר למצוא אותה ולשלב אותה בפתרון בעיות במתמטיקה?

Torrance (1969), מגדיר יצירתיות כתהליך הכולל תחושה של אלמנטים מפריעים, חסרים, והצורך לגבש רעיונות בקשר אליהם. יצירתיות הינה היכולת ליצור דבר מה חדש ומקורי מאלמנטים קיימים. עולות אם כן שתי שאלות: כיצד באה יכולת זו לידי ביטוי? ומהו התהליך הקוגניטיבי בו מתרחשת חשיבה יצירתית?

התהליך היצירתי

קיימת הסכמה אצל חוקרים ותיאורטיקנים בדבר השלבים של התהליך היצירתי (Butcher, 1968):

1. **שלב ההכנה** שבו אוספים מידע, חומרי גלם, ומאתרים את הצורך, את הבעיה;
2. **שלב הדגירה**, המהווה שלב לא מודע, כמוס, משהו מעין היריון רוחני בציפייה לגילוי;
3. **שלב ההארה** המביא לגילוי פתאומי, צץ רעיון, יש השראה - אהה!
4. **שלב האימות** שבו בודקים את התוצר, ומעבדים אותו לתוצר ממשי.

שלב ההארה הוא הקריטי מבין ארבעת השלבים, ויש השערה שהוא מערב תהליכים שכליים ראשוניים, שאינם נשלטים על-ידי חוקי ההיגיון והמציאות הרגילים. התהליך האסוציאטיבי של היצירתיות שונה מתהליכים רגילים בהם גירוי מסוים מזכיר גירוי אחר הצמוד לו. כמו למשל, בתחום המתמטיקה אם שואלים תלמיד מה התוצאה של

בתנאים ההכרחיים לפתרון יצירתי של בעיית אתגר מתמטית:

- פתרון בעיות הוא תהליך שכלי מורכב בו יש צורך לחזות, לדמיין, לנתח, ולצרף רעיונות. תהליך זה דורש מוטיבציה, יכולת ריכוז וזמן.
 - פתרון בעיות דורש תשובות חדשות, מקוריות, ולפעמים בלעדיות, וזה דורש דמיון רחב, גמישות בחשיבה, ויכולת סריקה של מידע בזיכרון.
 - פתרון בעיות דורש בסיס ידע רחב הכולל: מושגים, עקרונות, עובדות, ותהליכי עיבוד מידע מתמטי. היכולת לסרוק במהירות, ולדלות רעיונות וקשרים המתאימים לפתרון הבעיה, היא התנאי המאפשר לפותר לבחור באורח מושכל את המבנה המתאים לפתרון הבעיה.
 - פתרון בעיות יצירתי דורש: הבנה מעמיקה של הנקרא, כמו גם יכולת חישוב טובה ומתאימה לצורכי הבעיה. תנאי זה הכרחי כדי לסווג את הבעיה בקטגוריה הנכונה, ולמנוע פתרון אקראי שאינו עונה לדרישות.
- כדי להביא את הלומד למיצוי היכולת היצירתית שלו במתמטיקה, על המורים להציג לתלמידים בעיות אתגר המפתחות ומוליכות לחשיבה יצירתית. על המורה לשלוט באותן מיומנויות, שהוזכרו בסעיף הקודם, וליצור סביבה מתאימה להעברת המיומנויות ללומד. פויה כותב בספרו "כיצד פותרין" (Polya, 1957, p.1): "אם הוא (המורה) ממלא את הזמן העומד לרשותו בתרגול תלמידיו בפעולות שגרה, הריהו ממת את התעניינותם, מעכב את התפתחות מחשבתם ומחמיץ את אפשרויותיו. אך אם הוא מגרה את סקרנותם של תלמידיו, בהציגו לפנייהם בעיות בתחום הישג תפיסתם, ומסייע להם לפתור את בעיותיהם באמצעות שאלות מנחות, עשוי הוא לנטוע בהם טעם וחיבה למחשבה עצמאית ולפתח, אגב כך, כלים לכך."

פתרון בעיות מהווה את לב ליבה של המתמטיקה, כאשר פתרון בעיות כולל גם פתרון תרגילים שאין בהם אלגוריתם מוסכם קבוע מראש. המתמטיקאי Littlewood (1953), כתב שחידה מתמטית טובה, עדיפה על תריסר תרגילים בינוניים (במקור השתמש ליטלווד במילה joke ולא במילה riddle). חידה מתמטית מהווה אתגר לחשיבה, ובני אדם מחפשים אתגרים ונהנים מהתמודדות עם אותם אתגרים.

כאן אפשר למצוא את החיבור שבין פתרון בעיות מתמטיות, לבין התהליך היצירתי. אם נתייחס להגדרה של Torrance (1969), התהליך כולל תחושה של אלמנטים מפריעים, חסרים, והצורך לגבש רעיונות בקשר אליהם. בעיית אתגר מתמטית יוצרת תחושה של הפרעה ומחסור בנתונים הנחוצים לפתרונה.

פתרון בעיות מתמטי ויצירתיות

המתמטיקאי היצירתי אויילר (המאה ה-18), תיאר תהליך פתרון בעיות מתמטיות מורכבות במודל בן ארבעה שלבים, הדומים לארבעת השלבים של חשיבה יצירתית. אפשר למצוא אותם בניסוח קצת שונה אצל פויה (Polya, 1957):

1. הבנת הבעיה
2. עריכת תכנית לפתרון
3. ביצוע התכנית
4. סקירה לאחור - הערכה וביקורת.

תהליך פתרון בעיות דורש קריאה עניינית וממינת של נתוני הבעיה, בחירה הולמת של אסטרטגיה המתאימה לצירוף הנתונים הקיימים בבעיה, פתרון הבעיה, ולבסוף, ביצוע בקרה של הפתרון. שילוב תהליך זה עם הדברים שנכתבו לעיל על-ידי חוקרים שונים, מאפשר להתמקד

מטרת המחקר

לבחון את יכולתם של מורים למתמטיקה ופרחי הוראה מתחומים אחרים לפתור בעיות אתגר לא שגרתיות בתחום הסדרות, ולא דווקא סדרות מספריות.

שאלות המחקר

1. האם מורים למתמטיקה בבית הספר היסודי, ופרחי הוראה המתכשרים להוראה בתחומי דעת אחרים, מצליחים להתמודד עם בעיות אתגר לא שגרתיות במתמטיקה ומה השוני במידת ההצלחה בין שתי קבוצות אלה?
2. האם יימצא הבדל בפתרון בעיות לא שגרתיות בסדרות, בין סדרות מספריות לבין סדרות שאינן מספריות, כמו למשל, סדרות של אותיות או של צורות הנדסיות?

מתודולוגיה

המחקר הינו כמותי השוואתי, בו ענו נבדקות משתי אוכלוסיות על [שאלון השלמת סדרות](#).

אוכלוסיות המחקר

15 מורות למתמטיקה בבית הספר היסודי, בעלות ותק של שלוש שנים ומעלה, 36 פרחי הוראה מתחומי דעת אחרים.

כלי המחקר

לצורך המחקר חובר [שאלון המכיל שש שאלות](#). בכל אחת מהשאלות מוצגת סדרת איברים, ועל הנבדקות היה להשלים את האיבר הבא (a_{n+1}) בכל אחת מהסדרות.

הסדרות המופיעות בשאלות מתחלקות לשלושה סוגים:

- א. סדרות מספריות
- ב. סדרות של אותיות
- ג. סדרות של צורות הנדסיות.

כאמור, יצירתיות מהווה תהליך קוגניטיבי בו יוצרים משהו שלא היה ידוע מקודם באמצעות רכיבים ידועים. גילפרוד, שעסק בצורך בפיתוח חשיבה יצירתית, הגדיר חשיבה מסתעפת, המאפשרת לאדם לזרום לכיוונים רבים ומגוונים של אפשרויות. חשיבה מסתעפת מחזקת את הפוטנציאל להגיע בעקבותיה לתוצר המתאים ביותר (Guilford & Hoepfner, 1971). הוא הציע סוללה של מבחנים לבדיקת יצירתיות, באמצעות חשיבה מסתעפת הבודקת, בין השאר, גמישות מחשבתית. דוגמה להפקה מסתעפת של יחסים סימבוליים היא הצגה של סדרת מספרים, כמו למשל: 1,3,5,10,11,17, כאשר הדרישה להגיע באמצעות פעולות החשבון למספר 8.

מאחר והמורה הוא זה שאמור לפתח את יכולת פתרון הבעיות אצל תלמידיו, בעיות אשר בחלקן דורשות חשיבה יצירתית, חשוב להכיר את יכולתם וכישוריהם של מורים ופרחי הוראה בתחום זה, כדי להתאים תכנית הכשרה מתאימה, המטפחת יצירתיות בפתרון בעיות אתגר לא שגרתיות. במחקר שלהלן נבחנה מקומה של היצירתיות בפתרון בעיות בקרב פרחי הוראה ובקרב מורים בפועל מתוך רצון לנסות ולזהות נקודות חולשה שבהן ניתן יהיה לטפל במסגרת הכשרת מורים והשתלמויות מורים.



ממצאים

לוח 1: התפלגות התשובות בקרב המורות ופרחי ההוראה*

שאלה מספר:	כלל האוכלוסייה N = 51		מורים N = 15		פרחי הוראה N = 36	
	ענו נכון	שגו	ענו נכון	שגו	ענו נכון	שגו
1	48 (94%)	3 (6%)	14 (93%)	1 (7%)	34 (94%)	2 (6%)
2	27 (53%)	18 (35%)	11 (73%)	4 (27%)	16 (44%)	14 (39%)
3	7 (14%)	33 (65%)	3 (20%)	1 (7%)	4 (11%)	32 (89%)
4	27 (53%)	14 (27%)	10 (67%)	3 (20%)	17 (47%)	11 (31%)
5	45 (88%)	4 (8%)	15 (100%)		30 (83%)	4 (11%)
6	37 (73%)	11 (22%)	14 (93%)	1 (7%)	23 (64%)	10 (28%)

* רק על השאלה הראשונה ענו כל המשתתפות במחקר.

ניתוח הממצאים

א.סדרות מספריות

שאלה מס' 2: יש להשלים את האיבר הבא בסדרה:
1, 3, 4, 7, 11,....

התשובה הנכונה לשאלה היא 18.

אסטרטגיות הפתרון השונות של העונות תשובות נכונות:

הדפוס לתשובה זאת הוא מהצורה: $a_{n+1} + a_n = a_{n+2}$.

27 נשאלות מתוך 51 השיבו תשובה נכונה.

אם משווים בין המורות ובין פרחי ההוראה, נמצא כי כל המורות ענו, בין אם נתנו תשובה נכונה או תשובה שגויה. תשובה: "מספר פריק" ניתנה על-ידי מורה. המורות האחרות ששגו כתבו או את המספר 16, או את המספר 17. לעומת זאת אצל פרחי ההוראה נעשו ניסיונות להתחקות אחר אפשרויות שונות, אולם לאור העובדה שנושא הסדרות זר להן באופן יחסי, אלה שענו וטעו חיפשו קשרים והקשרים או אלגוריתמים שונים, רחבים יותר, דבר המעיד על סממנים של חשיבה יצירתית.

שאלה מס' 1: יש להשלים את האיבר הבא בסדרה: 1, 3, 7, 15, 31,....

התשובה הנכונה לשאלה היא 63.

אסטרטגיות הפתרון השונות של העונות תשובות נכונות:

על שאלה 1 ענו נכון 48 מתוך 51 מהנחקרות, וזוהו שלוש אסטרטגיות של פתרון. מחצית מהתשובות הנכונות

התקבלו כתוצאה משימוש באלגוריתם מהצורה:

$$a_{n+1} = 2^{n+1} - 1$$

כלומר, האיבר השישי הוא $2^6 - 1$.

מחצית מהתשובות הנכונות האחרות השתמשו

באלגוריתם מהסוג: $a_{n+1} = a_n + 2^n$. משתתפת אחת עשתה

שימוש באלגוריתם מהסוג: $a_{n+1} = 2a_n + 1$.

אם משווים בין המורות ופרחי ההוראה, נמצא כי מורה

אחת שגתה (כתבה 32) ושתי הטעויות האחרות (53 או

59) נתנו על-ידי פרחי ההוראה.

ג. סדרות של צורות הנדסיות

שאלה מס' 4: יש להשלים את האיבר הבא בסדרה:



במקרה זה אין רק תשובה אחת נכונה, מאחר והכוונה בסדרה זו היא לסדר את השמות של הצורות ההנדסיות לפי סדר אלף-ביתי של האות הראשונה שלהם. התשובה הנכונה יכולה להיות כל צורה הנדסית שהאות התחילית שלה נמצאת אחרי האות מ"ם בסדר האלף-בית, כמו לדוגמה, ריבוע, או (וזו אפשרות הנלקחת בחשבון במיוחד אם מתייחסים ליצירתיות), קיימת אפשרות גם שהאות הראשונה נשארת מ"ם, אבל האות השנייה שתופיע בשם הצורה תהיה כזאת שמיקומה בסדר האלף-בית הוא אחרי האות למ"ד, שהיא האות השנייה של "מלבן", ולכן תשובה מהסוג: מעוין, מעגל וכיו"ב, היא תשובה נכונה.

אסטרטגיות הפתרון השונות של העונות תשובות נכונות:
 27 השיבו תשובה נכונה, מתוך 10 מורות ו- 17 פרחי הוראה. תשובתן ניתנה על-ידי סרטוט הצורה או שם הצורה של האיבר הבא. מתוך המשיבות נכון 16 רשמו ריבוע, כאשר 8 מהן מורות והשאר פרחי הוראה. רק סטודנטית אחת הסבירה מה עמד מאחורי תשובתה. היא כתבה כך: "זה ריבוע כי זו צורה משוכללת בעלת 4 צלעות...." התשובה מתאימה, אבל ההסבר וההנמקה אינם נכונים. היא מצאה את החוקיות בסדרה באופן הבא: "קודם, באליפסה יש 0 צלעות, אין קטעים בכלל, האיבר השני שהוא דלתון הוא מצולע (אבל לא ראתה שיש בו צלעות שוות), אח"כ בטרפז יש זוג אחד של צלעות שוות (אולי התייחסה למקרה פרטי של טרפז שווה שוקיים),

בניגוד למורים, שש סטודנטיות לא ענו כלל, ובין אלה ששגו רווחה התופעה של היסוס בין שתי תשובות אפשריות, מאחר ולא הצליחו להחליט. חשוב לציין כי המורות, במסגרת ההשתלמויות שעליהן לעבור (כמו מסגרות של התמקצעות או השתלמויות אחרות), נחשפו לנושא "סדרות", ולכן חיפשו דפוס קבוע אותו הן מכירות, כמו למשל, הסדרה המוכרת של המספרים השווים לסכום שני המספרים הקודמים - סדרת פיבונאצ'י. אצל פרחי ההוראה שאינן מכירות סדרות, התנהגותן נמצאה התנהגות של חיפוש פתוח, ולא כבול למסגרת, המתאים למאפייני חשיבה יצירתית, וזאת ללא קשר עם פתרון היה נכון או שגוי.

ב. סדרת אותיות

שאלה מס' 3: יש להשלים את האיבר הבא בסדרה:
 ר, ש, ש, ר, ח, ש....

התשובה הנכונה הייתה: ש.

אסטרטגיות הפתרון השונות של העונות תשובות נכונות:
 7 מכלל הנבדקות ענו נכון. הסדרה מורכבת מהאות הראשונה של ימי השבוע, (ראשון, שני, שלישי, רביעי, חמישי, שישי) ולכן האיבר הבא המבוקש הוא ש. (שבת).

מבין התשובות השגויות היו 15 שהשיבו: ש, ח. הם מצאו את הדפוס של ר,ש,ש,ר ולכן השיבו בהמשך שתי אותיות, כלומר שני איברים כך שהשלימו ל: ח,ש,ש,ח. אחד ההסברים שצורפו לתשובה זאת היה שיש סימטריה, שיקוף, היפוך, וסטודנטית אחת נימקה כי שני זוגות האיברים הראשונים הם בהיפוך האותיות, לכן שני האיברים הבאים גם הם יהיו בהיפוך. אם נתעלם מההוראה שניתנה בשאלון שהתייחסה להשלמת האיבר הבא (איבר יחיד), הרי אפשר לראות בפתרון זה משהו יצירתי ובמידה מסוימת, אף פתרון נכון.

שאלה מס' 6: יש להשלים את האיבר הבא בסדרה:



התשובה הנכונה היא מרובע כלשהו.

אסטרטגיות הפתרון השונות של העונות תשובות נכונות:

מתוך 37 התשובות הנכונות 14 ניתנו על-ידי מורות, והשאר על-ידי פרחי הוראה. התשובות סורטטו או נכתבו בשם המפורש מרובע.

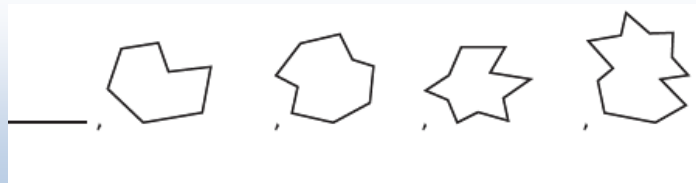
דין ומסקנות

מטרת המחקר הייתה לבדוק את יכולתם של מורי מתמטיקה בבית הספר היסודי, ושל פרחי הוראה שאינם מתכשרים ללמד מתמטיקה, להתמודד עם אתגרי חשיבה לא שגרתיים בתחום הסדרות, שחלקן לא מספריות. מדובר בשאלות שאין להן אלגוריתם קבוע מראש, ונדרשת מידה מסוימת של שבירת מסגרות חשיבה רגילות, ומעבר לחשיבה הנוטה למאפייני חשיבה יצירתית: חיפוש דגם חדש ולא ידוע של פתרון מתוך סדרת נתונים, המציגה פריטים מוכרים אך לא בהקשר ידוע מראש. הנבדק חייב להניח הנחות עצמאיות בלי דעות קדומות, לפני שיבחר את הפתרון המתאים עבור השאלה הפתוחה (Yee, 2005).

שאלת המחקר הראשונה בדקה אם מורי מתמטיקה ופרחי הוראה יצליחו להתמודד עם בעיות אתגר לא שגרתיות. הממצאים מראים שמידת ההצלחה לענות נכון, קשורה למידת הסטייה של השאלה מדפוסים מוכרים של שאלות בתחום הנבדק - השלמת סדרה. מסקנה זו מתקשרת לשאלת המחקר השנייה, שבדקה האם ימצאו הבדלים

במלבן יש 2 זוגות של צלעות שוות, ולכן בריבוע כל הצלעות שוות, ולכן זו צורה משוכללת". הרעיון יפה ויצירתי אבל אותה סטודנטית הגיעה לתשובה נכונה בדרך שגויה. מבין שאר התשובות הנכונות 6 משתתפות רשמו משולש (כולן היו פרחי הוראה), שלוש רשמו עיגול (שתי מורות וסטודנטית אחת), סטודנטית אחת רשמה מעוין, וסטודנטית אחת רשמה מתומן (מצולע בעל 8 צלעות). משתתפת נוספת כתבה כתשובה נכונה את המצולע משושה משוכלל. בנימוקיה היא התייחסה למספר הזוגות של צלעות מקבילות. היא כתבה כך: " בדלתון אין אף זוג של צלעות מקבילות. בטרפז יש זוג אחד, במלבן יש 2 זוגות, ובמשושה משוכלל יש שלושה זוגות." התשובה מקורית ויצירתית אך אינה מתאימה לתנאים, וזאת בגלל העובדה שאליפסה היא צורה שאינה מצולע.

שאלה מס' 5: יש להשלים את האיבר הבא בסדרה:



התשובה הנכונה היא מחומש או במילים אחרות מצולע בעל 5 צלעות.

אסטרטגיות הפתרון השונות של העונות תשובות נכונות:

התקבלו 45 תשובות נכונות, כולן על-ידי סרטוט ובחלק מהתשובות הוספה גם המילה מחומש או מצולע בעל 5 צלעות. כל 15 המורות ענו נכון. השאר (30) היו פרחי הוראה. מתוך 45 התשובות הנכונות שהתקבלו ב- 40 מהתשובות הצוירים התייחסו למצולע קמור. בחמש התשובות האחרות צויר מחומש קעור. (3 סטודנטיות ו- 2 מורות).

הנשאלות וגם בהקשר לנושא הסדרות, מפריע לחשיבה הרגילה בנורמות מסוימות של נתונים ושל קשרים ביניהם.

אפשר לומר במידה רבה של ביטחון, שאכן נמצא הבדל בתוצאות בין סדרות שאינן מספריות, כמו, סדרות של אותיות ושל צורות הנדסיות המשלבת אותיות. הבדל זה מעיד על מעין קיבעון: כאשר מדובר בהנחיות להשלמת סדרה מספרית, יש רק מספר אחד אפשרי (למעט כמה שהיחס בין שני פתרונות), לעומת זה כשמדובר בסדרת אותיות, שהנבדקים אינם רגילים אליה, אז האפשרויות פתוחות.

שאלה נוספת שזכתה לאחוז דומה של עונים נכון (רק כמחצית) היא שאלה מס' 2, שאמנם עסקה בסדרה מספרית אבל לא שגרתית (למרות הפופולאריות שלה).

השאלה הציגה סדרת מספרים שכל מספר שווה לסכום שני המספרים שלפניו. זוהי סדרה בנוסח סדרת פיבונאצ'י המפורסמת, וקשר כזה בין מספרים בסדרה אינו שגרתית. סדרות שגרתיות מאופיינות בדגם קבוע של הפרש, יחס, או של הפרש הפרשים, כאשר הדגם נראה לעין בקריאה ראשונית. דגם זה של סכום שני מספרים מאפשר סדרות רבות והחוקיות נראית לעין, אבל מאחר ואינה שגרתית, נוצר "עיוורון" - קיבעון. ייתכן שאם בשאלה במקום להציג חמישה איברים ולחפש את האיבר השישי, היו מציגים שישה איברים ומבקשים לזהות את האיבר השביעי, ניתן היה להתחקות על היעדר דפוס של הפרש קבוע, ולחשוב על סדרה אחרת.

בנוסף, אפשר לראות במגוון התשובות השגויות, עם סיבה אפשרית, סממן המתאים לחשיבה יצירתית, המבקשת שטף של אפשרויות פתרון, אם אין מתייחסים לפתרון נכון או לא נכון. ולראיה, בעיה שעסקה בסדרות מספריות, אמנם לא שגרתית, אבל בעלת חוקיות לא מורכבת במיוחד (שאלה מס' 1) זכתה לאחוז ההצלחה הגבוה ביותר.

באחוזי ההצלחה בין בעיות המציגות סדרות מספריות לבין סדרות המציגות סדרות שאינן מספריות, כמו, סדרות של אותיות או של צורות הנדסיות.

חשיבה מתמטית מזוהה, בדרך כלל, עם מספרים וצורות, ואילו השפה, המשמשת מתווך להוראות ולשאלות, נתפסת כחלק נפרד מנתוני השאלה. אולם בתחום הסדרות עוסקים, בדרך כלל, רק בסדרות מספריות, ואילו סדרות העוסקות בצורות אינן חלק משגרת לימודי המתמטיקה.

השאלה בעלת אחוזי ההצלחה הנמוכים ביותר הייתה השאלה שהציגה סדרת אותיות המייצגות את תחיליות ימי השבוע. אחוז נמוך של משתתפות ענה נכון, ואחוז הלא משיבות בכלל היה הגדול מבין שש השאלות. שאלה זאת הייתה שונה בתוכנה משאר השאלות, כי עסקה באותיות ולא במספרים ובצורות. מכאן אפשר להסיק ששאלה עם נתונים שלא מורגלים אליהם במהלך הלמידה לאורך ביה"ס וההכשרה, כאן אותיות ולא מספרים, יוצרת מחסום לחשיבה ומונעת התמודדות מתאימה. אפשר לראות חיזוק לכך בחלק מהתשובות השגויות שכללו צירוף של 2,3,4,5,6 ואף יותר אותיות, למרות שהדרישה הייתה להשלים את האיבר (בלשון יחיד) הבא. הנבדקים רגילים לאותיות בצירופים שונים ולא בצורה בודדת. רוב התשובות היצירתיות היו של פרחי ההוראה ולא של המורים בפועל. ייתכן כי סדרה שלא מיוצגת על-ידי מספרים או דפוס מוכר אחר מהסביבה המתמטית הקרובה, נועלת את החשיבה או מלחיצה את המורה, ואז פועל המנגנון המכוון לא לענות כהעדפה על מתן תשובה שגויה.

התשובה השנייה עליה אחוז העונים נכון היה נמוך, הייתה שאלה ששילבה צורות הנדסיות עם שמות הצורות (שאלה מס' 4). הנבדקים היו צריכים לזהות דגם של סדר אותיות עולה באלף-בית, רק כמחציתם נתנו תשובה נכונה. נתון זה מחזק את המסקנה לשאלה הקודמת, ששילוב אלמנטים שלא מורגלים אליהם, בשאלות הסטנדרטיות

לסיכום, ממצאים אלה מביאים למסקנה שיש להכשיר את המורים להתמודד עם בעיות אתגר לא שגרתיות, ולפתח אצלם את החשיבה היצירתית.

מקורות

- Butcher, J. H. (1968). *Human intelligence*. Methuen & Co. Ltd.
- Gell-Mann, M. (1994). *The Quark and the Jaguar: Adventures in the Simple and the Complex*. NY: W. H. Freeman Press.
- Guilford, J.P., & Hoepfner, R. (1971). *The analysis of intelligence*. New-ork: McGraw-Hill.
- Littlewood, J. E. (1953). *A Mathematician's Miscellany*. London: Methuen & Co. Ltd.
- Martindale, S. (1989). Personality, situation and creativity, In J.A. Glover, R.R. Ronning, & C.R. Reynolds (Eds.), *Hand book of creativity* (pp. 211-232). N.Y: Plenum Press.
- Polya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (2nd ed). Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Torrance, E. P., (1969). *Guiding creative talent*. New Delhi: Prentice-Hall of India.
- Yee, F.P. (2005). Developing creativity in the Singapore primary mathematics Classes: Factors that support and inhibit. *Thinking Classroom*, 6 (4), 14-46.

על כותבי המאמר:

ד"ר אביקם גזית

מרצה לחינוך מתמטי במכללת סמינר הקיבוצים ובית ברל וחבר סגל המחלקה לחינוך ולפיסולוגיה באוניברסיטה הפתוחה. הוציא לאור שלושה ספרים שעניינם אתגר חשיבה מתמטיים, תולדות המתמטיקה וספר שירה.



ד"ר דורית פטקין

ראש החוג למתמטיקה במכללת סמינר הקיבוצים בתל-אביב, מדריכה מורים ו"פרחי הוראה", בעלת ניסיון עשיר בדרכי הוראה ובטיפול בטעויות ובתפיסות מוטעות של תלמידים במתמטיקה.



השאלה שזכתה לאחוז הצלחה השני בדירוג לאחר שאלה מס' 1, הייתה השאלה שעסקה בסדרת מצולעים אשר מספר צלעותיהם קטן ב-2 מצורה לצורה. הדגם מאוד ברור, ובעצם יש כאן השלכה מסדרה חשבונית מספרית לסדרה המיוצגת באמצעות צורות. השאלה האחרונה (שאלה מס' 6), שעסקה גם היא בסדרת מצולעים, אשר מספר צלעותיהם קטן במספר לא קבוע מצורה לצורה, זכתה ש-3/4 מהנשאלות ענו נכון. אולי בגלל השילוב של סדרה של צורות גיאומטריות עם הפרשים במספר הצלעות, וכן לאור העובדה שגם השאלה הקודמת עסקה בהפרשים של מספר צלעות של צורות בסדרה. אפשר לומר שככל שהשאלה עוסקת בסדרה פחות שגרתית, ודורשת חשיבה פתוחה יותר, המזוהה עם חשיבה יצירתית, יש ירידה בהתמודדות ובאחוז הצלחה, שהיה בין 94% ל-73% עבור שאלות יותר שגרתיות וירד ל-53% בשאלות המציגות מצבים פחות שגרתיים, והגיע עד לכמעט אי-הצלחה, כלומר, רק 14% הצלחה, וזאת בשאלה החורגת מתחום המתמטיקה הקלאסית (מספרים וצורות), המציגה סדרת אותיות המתייחסות לימי השבוע, לכאורה מצב מוכר אבל בהקשר לא שגרתית. ולעניין החשיבה היצירתית, האמורה לבוא לידי ביטוי בפתרון בעיות לא שגרתיות: למרות שפרחי ההוראה הציגו אחוז קטן יותר של תשובות נכונות לעומת מורות המתמטיקה, הרי שבתוך הפתרונות השגויים נמצאו רעיונות לא שגרתיים ויצירתיים. חלק מהתשובות שהוצגו בממצאים מעידות על שבירת מסגרת החשיבה ויציאה מקונפורמיות. הגיוון בתשובות השגויות או הנכונות, במקרה בו לשאלה יש מספר תשובות אפשריות, נמצא בקרב פרחי ההוראה. ייתכן שתהליך ההוראה-למידה בצד השתתפות בהשתלמויות, תורמים לידיע העובדתית של המורות, אבל מצד שני חוסמים ובולמים חשיבה יצירתית, שאינה נדרשת בתכנית הלימודים.